1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача физического эксперимента – измерение физических величин. ***Измерением*** называется операция, с помощью которой устанавливается, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответствующей величины, принятой за единицу. Измерения бывают ***прямые*** и ***косвенные***. В прямых измерениях физическая величина измеряется непосредственно. Таковы, например, измерения времени секундомером, напряжения – вольтметром. При косвенных измерениях искомая величина не измеряется, а вычисляется по результатам измерений других величин, связанных с искомой определенной математической зависимостью. Например, тепловую мощность, выделяющуюся в электроплитке, можно найти, умножив силу тока в плитке на напряжение на зажимах. Сила тока и напряжение измеряются непосредственно.

Всякое измерение дает лишь приближенный результат. Проделав эксперимент и измерив некоторую физическую величину, мы не можем утверждать, что получили её истинное значение. Поэтому необходимо указать, насколько полученный результат может быть близким к истинному значению, иными словами, указать – какова точность измерения. Для этого вместе с полученным результатом указывают приближенную погрешность измерений. Например, запись результата измерений периода колебаний маятника в виде

$$T = (2{,}5 \pm 0{,}2)\ \text{с}$$

означает, что истинное значение периода T лежит, скорее всего, в пределах от 2,3 до 2,7 с.

Абсолютной погрешностью физической величины x называется модуль разности истинного значения X этой величины и значения x, полученного в результате измерений:

$$\Delta x = |X - x|.$$

Относительной погрешностью δx величины x называется отношение абсолютной погрешности к модулю истинного значения:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|X|}.$$

Поскольку истинное значение обычно неизвестно, полагают

$$\delta x \approx \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Абсолютная погрешность имеет ту же размерность, что и измеряемая величина. Относительная погрешность – безразмерна. В приведенном выше примере абсолютная погрешность периода равна 0,2 с, относительная – 0,08 или 8 %.

Оценивать и указывать погрешность полученного результата очень важно, без этого ценность результата часто оказывается равной нулю.

Пусть нас интересует зависимость сопротивления проводника от температуры. Проведя измерения, получили:

$$R_1 = 100\ \text{Ом} \quad \text{при} \quad t_1 = 10\ °\text{C};$$

$$R_2 = 101\ \text{Ом} \quad \text{при} \quad t_2 = 20\ °\text{C};$$

Спрашивается – зависит ли сопротивление проводника от температуры? Стоит ли придавать значение различию сопротивлений в 1 Ом?

На этот вопрос нельзя ответить, не зная погрешности измерения. Если погрешность составляет 0,1 Ом, то различие существенно и можно утверждать, что сопротивление растет с повышением температуры. Если же погрешность составляет 2 Ом, то из приведенных результатов нельзя сделать никаких выводов относительно искомой зависимости, а различие результатов может быть обусловлено случайными причинами, например погрешностями измерительных приборов.

Как мы убедились, не зная погрешностей измерений, нельзя не только оценить точность результатов, но часто даже нельзя сказать, наблюдали мы ожидаемое явление или нет.

Оценка погрешности может влиять на методику самого эксперимента. В реальном эксперименте на погрешность конечного результата влияет множество факторов, и важно оценить, какой из них дает наибольший вклад в погрешность результата. Только тогда мы сможем принять меры для уменьшения этой погрешности.

Предположим, в приведенном выше примере для определения сопротивления была собрана схема, изображенная на рис. 1, в которой использовался вольтметр с погрешностью показаний 2,5 % и амперметр с погрешностью 0,1 %. Подумайте, можно ли при этом утверждать, что мы обнаружили зависимость сопротивления от температуры? Является ли измерение сопротивления прямым или косвенным?

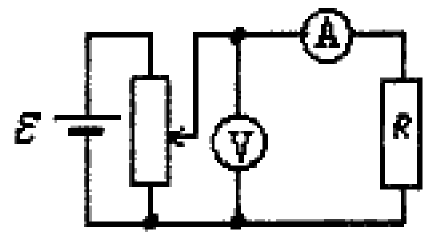

Рис. 1. Схема измерения сопротивления

Погрешность результата будет обусловлена в основном погрешностями вольтметра, и для повышения точности измерения нужно заменить именно этот прибор, повышать же точность измерения силы тока не имеет смысла.

С другой стороны, если погрешность в 2,5 % является удовлетворительной, опытный экспериментатор вряд ли станет применять амперметр с погрешностью 0,1 %; он использует менее точный прибор, который стоит в несколько раз дешевле.

Точность, которой следует добиваться в эксперименте, зависит от его цели, и вовсе не нужно проводить каждый эксперимент как можно более точно. Но во многих экспериментах, в частности при измерениях фундаментальных величин (скорость света, заряд и масса электрона и др.), нам просто неизвестно, какая точность окажется достаточной. Тогда мы стараемся добиться максимальной точности. Точные измерения позволяют проверить наши теоретические представления, и когда возникают расхождения, это приводит к новым теориям и открытиям.

Ошибки можно разделить на два типа – ***систематические*** и ***случайные***.

Систематические ошибки обычно остаются постоянными на протяжении всей серии измерений, случайные же хаотически изменяются и в равной мере могут быть как положительными, так и отрицательными.

Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте. При многократном повторении измерений они служат причиной разброса результатов отдельных измерений, благодаря чему их можно обнаружить путем повторных измерений. Имеются надежные способы уменьшения этих ошибок. Увеличивая число измерений и находя среднее арифметическое результатов, мы будем получать величину, которая будет все ближе и ближе к истинному значению.

Разновидность случайных ошибок – грубые ошибки или промахи. Это обычно неправильные отсчеты по прибору, неправильная запись отсчета и т.п. В большинстве случаев промахи хорошо заметны, так как соответствующие им отсчеты резко отличаются от других. При обработке результатов измерений такие отсчеты следует отбрасывать. В сомнительных случаях вопрос о том, является ли данный результат промахом, решают с помощью специальной математической процедуры.

Подчеркнем – промах можно заметить, только если проделано несколько измерений одной и той же величины. Поэтому, какую бы величину вы ни измеряли, никогда не ограничивайтесь одним измерением, обязательно повторите его несколько раз.

Для предотвращения промаха необходимо работать четко и внимательно, аккуратно записывать отсчеты. Вероятность появления промаха значительно снижается при записи отсчетов в заранее подготовленные таблицы.

Еще один способ избежать промахов – записывать в лабораторный журнал непосредственные отсчеты по шкале прибора без какого-либо пересчета.

Если, например, на шкале вольтметра, рассчитанного на 300 В, имеется 75 делений и стрелка остановилась на 56-м делении, нужно сначала записать показания в делениях шкалы, и лишь затем пересчитывать их в вольты. Если же цена деления шкалы равна единице измеряемой величины, то никакого пересчета не требуется, и отсчет записывают сразу в единицах измеряемой величины.

Систематические ошибки возникают вследствие погрешностей измерительной аппаратуры (спешит или отстает секундомер, неверная линейка), а также из-за того, что условия эксперимента отличаются от предполагаемых теорией, а поправку на это несоответствие не делают (например, не учитывается сопротивление амперметра в схеме на рис. 1). Систематические ошибки опаснее случайных, поскольку их значительно труднее обнаружить. Общих рецептов на этот счет не существует, нужно в каждом конкретном случае тщательно продумывать методику эксперимента и придирчиво выбирать аппаратуру.

2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Предположим, мы провели серию измерений некоторой физической величины x. Результат отдельного измерения обозначим x_i, общее число измерений обозначим n. Если систематическая ошибка отсутствует, разумно предположить, что значения x_i расположатся вблизи неизвестного нам истинного значения X измеряемой величины, причем отклонения в сторону больших и меньших значений будут равновероятными. Опыт показывает, что в подавляющем большинстве случаев такое предположение справедливо. Тогда в качестве наилучшего приближения к истинному значению следует взять среднее арифметическое x отдельных измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1)$$

Точность соответствия среднего значения истинному зависит от ряда факторов, в первую очередь, от точности каждого отдельного измерения и от числа измерений. Рассмотрим результаты двух серий измерений, которые приведены на рис. 2. Разброс значений x_i на рис. 2, *а* значительно меньше, чем на рис. 2, *б*, поэтому не удивимся, если среднее значение измерений первой серии почти совпадает с истинным значением, а во второй серии будет заметно от него отличаться.

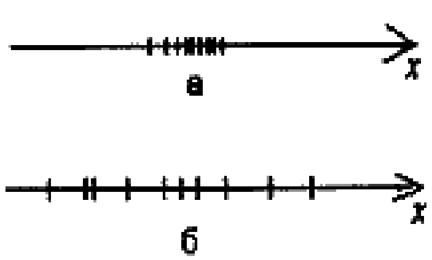

Рис. 2. Распределение результатов измерения

Выполнив измерения, нужно указать результат эксперимента так, чтобы им могли пользоваться другие. Необходимо не только привести полученный результат, но и дать информацию о его точности. Принято указывать интервал значений измеряемой величины $\bar{x} \pm \Delta x$, в пределах которого с определенной вероятностью может оказаться истинное значение измеряемой величины. Величина Δx называется ***погрешностью*** или ***ошибкой*** результата, интервал от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ – ***доверительным интервалом***.

Доверительный интервал не является исчерпывающей характеристикой точности результата. Для того, чтобы приведенный доверительный интервал имел конкретный смысл, нужна количественная характеристика его достоверности, показывающая, насколько можно быть уверенным в том, что истинное значение измеряемой величины окажется в пределах доверительного интервала. Такая характеристика – вероятность того, что среднее значение $\bar{x}$ отличается от истинного не более, чем на Δx – называется ***доверительной вероятностью***. Она равна доле результатов однотипных серий измерений, попадающих в пределы доверительного интервала, т.е. отличающихся от истинного значения не более, чем на Δx. Обозначим её α. Поясним смысл этой величины примером.

Пусть результат серии измерений записан в виде $X = 25 \pm 2$ и сказано, что приведенный доверительный интервал (от 23 до 27) соответствует доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$. Что это означает?

Повторим серию измерений большое число раз, например сделаем $N = 1000$ однотипных измерений. Результаты серий будут отличаться друг от друга, причем примерно в $\alpha N = 950$ сериях результаты будут отличаться от истинного значения измеряемой величины не более, чем на $\Delta x = 2$, а результаты остальных серий выйдут за пределы доверительного интервала.

Известно несколько способов определения доверительного интервала по результатам серии измерений. Один из простейших – метод Корнфельда – заключается в выборе доверительного интервала в пределах от минимального до максимального результата измерений:

$$\bar{x} - \Delta x = x_{\text{мин}}; \quad \bar{x} + \Delta x = x_{\text{макс}}.$$

Отсюда получаем

$$\bar{x} = \frac{x_{\text{макс}} + x_{\text{мин}}}{2}; \tag{2}$$

$$\Delta x = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}}{2}. \tag{3}$$

Как доказывается в теории, такому доверительному интервалу соответствует доверительная вероятность:

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \tag{4}$$

где n – число измерений в данной серии.

Неудобство метода в том, что при заданном числе измерений мы не можем произвольно выбрать доверительную вероятность. Скажем, при $n = 5$ нам не удастся найти доверительный интервал, соответствующий $\alpha = 0{,}99$. Кроме того, рассчитанные этим методом погрешности не могут использоваться при сложении погрешностей, которое проводится в случае, когда результирующая погрешность окончательного результата измерений обусловлена несколькими факторами, например погрешностями различных измерений. Поэтому рекомендуем использовать метод Корнфельда лишь для грубой предварительной оценки погрешностей, например для быстрого сравнения случайных и приборных погрешностей.

После вычисления погрешности Δx следует найти относительную погрешность:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|},$$

которая может быть выражена в процентах:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\ \%.$$

Окончательный результат приводится с указанием абсолютной и относительной погрешностей и доверительной вероятности.

Величины Δx, полученные в разных однотипных сериях измерений, несколько отличаются друг от друга. Разброс их тем больше, чем меньше измерений в серии. Определяя доверительный интервал по одной серии измерений, мы допускаем некоторую неточность. Другими словами, погрешность нашего результата сама вычисляется с некоторой погрешностью.

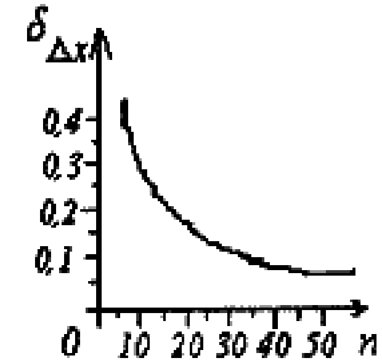

Рис. 3. Погрешность в величине погрешности

Зависимость относительной погрешности в величине погрешности от числа измерений в серии представлена на графике (рис. 3), который показывает, что нет смысла проводить вычисление погрешностей с большой точностью. Промежуточные вычисления погрешностей проводят не более, чем с двумя значащими цифрами. При записи результата достаточно ограничиться одной цифрой в погрешности, но если это цифра 1, можно оставить две цифры.

Пример 1. В результате $n = 5$ измерений получено $x_{\text{мин}} = 30{,}5$; $x_{\text{макс}} = 36{,}8$. Требуется указать результат измерений по методу Корнфельда.

Вычисляем:

$$\bar{x} = \frac{x_{\text{макс}} + x_{\text{мин}}}{2} = 33{,}65;$$

$$\Delta x = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}}{2} = 3{,}2;$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 0{,}94.$$

Теперь, казалось бы, можно записать результат в виде:

$$X = 33{,}65 \pm 3{,}2.$$

Однако такая запись неверна. Точность соответствия истинного значения X и экспериментального $\bar{x}$ определяется величиной погрешности Δx. В приведенном примере X может отличаться от указанного на несколько единиц, поэтому бессмысленно приводить в результате десятые и сотые доли. Для правильной записи результата следует вначале округлить погрешность до одной значащей цифры, а затем округлить результат $\bar{x}$ так, чтобы его последняя значащая цифра соответствовала значащей цифре погрешности. Тогда получим:

$$X = 34 \pm 3; \quad \delta x = 0{,}1; \quad \alpha = 0{,}94.$$

3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Среднеквадратическая погрешность σ_x величины x является общепринятой универсальной мерой погрешности измерений. Это обусловлено её замечательными свойствами: уменьшением ошибки среднего значения результатов при увеличении числа измерений и возможностью сложения ошибок, обусловленных различными причинами.

Вычислив среднее значение по формуле (1):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

найдем отклонения результатов измерений от среднего $(x_i - \bar{x})$. Этими отклонениями и определяется среднеквадратическая погрешность

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} . \tag{5}$$

Как видно из (5), квадрат среднеквадратической погрешности σ_x^2 есть среднее значение квадрата отклонений результатов измерений от среднего. Формула (5) дает лишь приблизительное значение σ_x. Точное определение предполагает вычисление выражений (1) и (5) в пределе при $n \to \infty$. На практике число измерений всегда конечно, и нам придется пользоваться этими выражениями при конечных n, допуская некоторую ошибку в определении σ_x*.

* При оценке σ_x по конечному числу измерений более точный результат получается, если в знаменателе (5) вместо n поставить $(n-1)$. Мы будем пренебрегать этим уточнением.

Очевидно, чем больше разброс результатов измерений, тем больше σ_x. Величина σ_x в отличие от результатов отдельных измерений не является случайной. Она характеризует весь процесс измерений и зависит от факторов, определяющих разброс результатов, – методики эксперимента, свойств используемых приборов, качеств экспериментатора. В связи с этим результаты вычислений по формуле (5) весьма слабо зависят от числа измерений n.

Окончательным результатом измерения являются не отдельные значения x_i, а среднее значение $\bar{x}$. Рассмотрим, как ведет себя отклонение среднего значения $\bar{x}$ от истинного. Если проделать несколько серий по n измерений и вычислить для каждой серии свое среднее значение, обнаружим, что эти средние значения отличаются друг от друга, но разброс их значительно меньше, чем разброс результатов отдельных измерений. Чем больше измерений в каждой серии, тем меньше разброс средних значений. Иными словами, чем больше измерений, тем точнее среднее значение соответствует истинному.

Разброс средних значений будем характеризовать среднеквадратической погрешностью среднего $\sigma_{\bar{x}}$. Между величинами $\sigma_{\bar{x}}$ и σ_x существует простая связь:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \tag{6}$$

т.е. среднеквадратическая погрешность среднего из результатов n измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше среднеквадратической погрешности отдельных измерений.

Соотношение (6) можно вывести, но мы этим заниматься не будем. Важнее понять его смысл: эта формула показывает, как точность результата серии измерений зависит от числа измерений в серии и указывает пути повышения этой точности.

Пусть, например, требуется уменьшить случайную ошибку результата эксперимента в 10 раз. Эта ошибка определяется величиной $\sigma_{\bar{x}}$, и для ее уменьшения нужно изменить методику эксперимента так, чтобы разброс отдельных измерений уменьшился в 10 раз, или при сохранении прежней методики увеличить в 100 раз число измерений. На практике используют оба пути, но в учебной лаборатории методика эксперимента обычно жестко задана, и повышать точность измерений приходится лишь увеличением числа измерений.

Таким образом, основной мерой случайных погрешностей является среднеквадратическая погрешность среднего $\sigma_{\bar{x}}$, которую согласно (5) и (6) будем вычислять по формуле:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,. \qquad (7)$$

Вычисление $\sigma_{\bar{x}}$ можно упростить, преобразовав выражение:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\,. \qquad (8)$$

Этой формулой можно пользоваться, работая с вычислительным средством высокой точности (калькулятор, ПВМ). Под знаком радикала стоит малая разность больших величин, незначительные ошибки которых могут дать большие погрешности величины $\sigma_{\bar{x}}$. Поэтому промежуточные вычисления при использовании (8) следует проводить с высокой точностью, без округлений.

В научных статьях, как правило, приводят доверительный интервал «плюс-минус одна среднеквадратическая погрешность»:

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}},$$

соответствующий доверительной вероятности $\alpha = 0{,}7$. Такой интервал называют стандартным и при указании погрешности часто не приводят значение доверительной вероятности. Значения доверительной вероятности для некоторых других доверительных интервалов, верные при достаточно больших n (практически при $n \geq 5$), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Погрешность Δx	0	$0{,}5\sigma_{\bar{x}}$	$\sigma_{\bar{x}}$	$1{,}5\sigma_{\bar{x}}$	$2\sigma_{\bar{x}}$	$2{,}5\sigma_{\bar{x}}$	$3\sigma_{\bar{x}}$
Доверительная вероятность α	0	0,4	0,7	0,9	0,95	0,99	0,997

Обратите внимание на то, как при увеличении доверительного интервала быстро убывает доля результатов, не входящих в этот интервал. Если при $\Delta x = 2\sigma_{\bar{x}}$ за пределами доверительного интервала оказывается 5 % результатов, то при $\Delta x = 3\sigma_{\bar{x}}$ всего 0,3 %.

Пример 2. Требуется определить диаметр провода d и указать среднеквадратическую погрешность. Результаты измерений, выполненных с помощью микрометра, приведены в табл. 2. В этой же таблице заготовлены колонки для записи промежуточных вычислений.

Таблица 2

№ измерения	d_i, мм	$\lvert d_i - \bar{d}\rvert$, мм	$(d_i - \bar{d})^2$, мм^2	Результат
1	1,86	0,03	$9\cdot10^{-4}$	
2	1,80	0,03	$9\cdot10^{-4}$	$\bar{d} = 1{,}83$ мм
3	1,88	0,05	$25\cdot10^{-4}$	
4	1,79	0,04	$16\cdot10^{-4}$	$\sigma_{\bar{d}} = 0{,}01$ мм
5	1,81	0,02	$4\cdot10^{-4}$	
6	1,83	0,00	0	$\delta d = \frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}} = 0{,}6\,\%$
Сумма	10,97		$63\cdot10^{-4}$	

Последовательность вычислений такова: находим $\sum_{i=1}^{n} d_i$ и вычисляем $\bar{d}$, затем заполняем третью и четвертую колонки таблицы, вычисляем $\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2$ и, наконец, находим $\sigma_{\bar{d}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}$.

4. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Результат любого измерения определяется показаниями прибора. Абсолютно точных приборов не существует, поэтому их показания отличаются от истинного значения измеряемой величины. Кроме того, показания прибора обычно округляют до целого деления шкалы или до определенной доли деления. Если случайные погрешности невелики, все измерения после округления дадут один и тот же результат. В этом случае достаточно ограничиться двумя-тремя измерениями (но не одним!), и не нужно вычислять случайную погрешность. Однако следует учесть приборную погрешность.

Будем различать погрешность показаний прибора и погрешность отсчета по шкале.

Погрешность показаний, т.е. несоответствие показаний прибора истинному значению измеряемой величины, можно определить при сравнении показаний данного прибора и более точного эталонного прибора. Эта погрешность может быть как систематической (например, неверная градуировка), так и случайной. В паспортных данных приводят максимальное значение суммарной погрешности (систематическая плюс случайная), которое называют ***предельной приборной погрешностью***. Может быть указана относительная или абсолютная погрешность. Абсолютную предельную погрешность обозначим h.

В табл. 3 приведены предельные погрешности некоторых распространенных приборов.

Исправный прибор не должен давать погрешность, превышающую предельную. Это означает, что доверительная вероятность, соответствующая предельной погрешности, близка к единице. На практике погрешность показаний обычно меньше предельной. Этого добиваются путем периодической проверки и настройки приборов.

Вместо предельной погрешности h может быть указан класс точности прибора γ, определяющий выраженное в процентах отношение предельной погрешности h к некоторому нормирующему значению x_N измеряемой величины:

$$\gamma = \frac{h}{x_N} \cdot 100\,\%.$$

Таблица 3

Характеристики измерительных приборов

Измерительный прибор	Диапазон измерения	Класс точности	Предельная погрешность
Линейки измерительные металлические	300 мм 500 мм 1000 мм	–	0,10 мм 0,15 мм 0,20 мм
Штангенциркули	0 – 125 мм 0 – 200 мм 0 – 320 мм	–	0,05 мм при значении отсчета по нониусу 0,05 мм и 0,1 мм при значении отсчета 0,1 мм
Микрометры с ценой деления 0,01 мм	0 – 25 мм	1	4 мкм
Весы лабораторные	5 – 100 г 10 – 200 г	4	Три значения цены деления отсчетной шкалы
Секундомеры механические	0 – 60 с 0 – 30 мин	2 (3) 2 (3)	0,2 с при скачке секундной стрелки 0,1 с и 0,3 с при скачке 0,2 с 0,4 с (0,7 с) при скачке 0,1 с и 0,6 с (1,0 с) при скачке 0,2 с
Термометры ртутные стеклянные	от – 35 до 100 °С	–	Значение цены деления шкалы, если она равна 1; 2; 5 град/дел.; 2 значения цены деления шкалы, если она равна 0,5 град/дел.

Отсюда

$$h = x_N \cdot \frac{\gamma}{100}. \tag{9}$$

Значение x_N для различных приборов означает разное. Приведем выдержку из ГОСТ 13600 – 68.

«Нормирующее значение … принимается равным:

а) для средств измерений с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, – конечному значению рабочей части шкалы;

б) для средств измерений с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится внутри рабочей части шкалы, – арифметической сумме конечных значений рабочей части шкалы (без учета их знака);

в) для средств измерений, предназначенных для измерения величин, для которых установлено номинальное значение, – этому номинальному значению;

г) для средств измерений с логарифмической или гиперболической шкалой – всей длине шкалы».

К группам «а» и «б» относится большинство стрелочных электроизмерительных приборов. Абсолютная предельная погрешность таких приборов одинакова в любом месте шкалы, а относительная – тем меньше, чем больше значение измеряемой величины. Для уменьшения относительной погрешности следует выбирать диапазон измерений прибора так, чтобы стрелка отклонялась не менее, чем на половину рабочего участка шкалы.

Для магазинов сопротивлений, емкостей и индуктивностей нормирующим значением является набранное на магазине значение соответствующей величины (группа «в»). Генераторы сигналов часто имеют шкалу, близкую к логарифмической, омметры – близкую к гиперболической (группа «г»).

Класс точности может быть указан на шкале прибора, но это не всегда возможно. Часто используются многопредельные приборы, в которых одна и та же шкала при различных режимах работы или способах включения прибора соответствует различным измеряемым величинам. В таких случаях в паспортных данных указывают погрешности для каждого из допускаемых вариантов использования прибора. Формулы для вычисления погрешностей могут быть более сложными, чем (9). Их также приводят в паспортных данных прибора.

Классы точности присваиваются из ряда $1 \cdot 10^n$, $1{,}5 \cdot 10^n$, $2 \cdot 10^n$, $2{,}5 \cdot 10^n$, $4 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, $6 \cdot 10^n$, где $n = 1; 0; -1; -2$ и т.д.

Если класс точности неизвестен и нет паспортных данных прибора, можно использовать обычно применяемое правило градуировки: предельная погрешность равна цене деления шкалы прибора.

Для сравнения приборных и случайных погрешностей нужна единая мера их измерения. Для случайных погрешностей такой мерой является среднеквадратическая погрешность, обусловленная разбросом результатов измерений. Обозначим ее $\sigma_{разбр}$. Хотелось бы найти и среднеквадратическую погрешность показаний прибора $\sigma_{показ}$, определяемую разбросом показаний различных приборов данного типа. Для оценки $\sigma_{показ}$ используют «правило 3σ». Согласно табл. 1 практически все отсчеты заключены в интервале $\pm 3\sigma$, а по данным прибора – в интервале $\pm h$. Поэтому полагают $h \approx 3\sigma_{показ}$, или

$$\sigma_{показ} = \frac{h}{3}. \tag{10}$$

Погрешность отсчета, связанная с округлением, зависит от того, до какой доли деления шкалы производится округление, а также от размера делений, условий наблюдения шкалы, навыков экспериментатора.

Как правило, не имеет смысла оценивать доли деления, меньшие 0,2 деления шкалы. Если размер деления менее 1,5 мм, округление проводят до половины или до целого деления. Среднеквадратическую ошибку отсчета $\sigma_{отсч}$ можно принять равной третьей части той доли деления d, которая оценивается:

$$\sigma_{отсч} = \frac{d}{3}. \tag{11}$$

В качестве окончательной оценки приборной погрешности выберем ту из величин $\sigma_{показ}$ или $\sigma_{отсч}$, которая больше

$$\sigma_{приб} = \max(\sigma_{показ}, \sigma_{отсч}). \tag{12}$$

Желательно, чтобы погрешности округления не увеличивали заметно погрешность результата. Для этого нужно обеспечить $\sigma_{отсч} \le \sigma_{показ}$. Отсюда следует полезное правило: оцениваемую долю деления выбирайте так, чтобы соответствующее этой доле значение измеряемой величины было меньше предельной погрешности прибора.

В приборах с цифровой индикацией погрешности отсчета отсутствуют (за исключением грубых ошибок, вызванных неверным прочтением показаний), а погрешности округления являются составной частью погрешности показаний прибора. Например, предельная погрешность измерения постоянных напряжений цифровым вольтметром В7-20 вычисляется по формуле

$$h = 0{,}005U_x + 0{,}001U_k,$$

где U_x – измеряемое напряжение, U_k – конечное значение напряжения для установленного диапазона измерений. Первое слагаемое соответствует погрешностям градуировки прибора, второе обусловлено погрешностями округления. Далее в понятие приборная погрешность будем включать все отмеченные выше погрешности прибора, как систематические, так и случайные. Случайными погрешностями будем называть лишь зарегистрированные в эксперименте разбросы результатов измерений.

Определив приборную и случайную погрешности, необходимо их сравнить.

Записывая результат измерений, будем приводить большую из них, полагая

$$\sigma_{\bar{x}} = \max\left(\sigma_{\bar{x}\,\text{приб}}, \sigma_{x\,\text{приб}}\right). \tag{13}$$

Сравнение приборных и случайных погрешностей позволяет выбрать оптимальное число измерений. Предположим, случайная погрешность получилась больше приборной. Спрашивается – на сколько нужно увеличить число измерений, чтобы получить результат с максимальной точностью? На первый взгляд кажется, что чем больше сделаем измерений, тем точнее результат, и, обладая достаточным усердием и временем, можно добиться любой желаемой точности. На деле это не совсем так. Увеличивать число измерений n рационально лишь до определенного предела. С ростом n уменьшается случайная погрешность в определении среднего значения результатов отдельных измерений. После того, как она станет меньше приборных, определяющую роль станут играть приборные погрешности, не зависящие от числа измерений. Дальнейшее увеличение числа измерений уже не будет повышать точность результата. Отсюда следует, что оптимальное число измерений такое, при котором случайная погрешность результата опыта одного порядка с приборными или несколько меньше приборных. Не следует, однако, забывать, что сверху число измерений ограничено временем или средствами, которыми Вы располагаете, а снизу – требованием сделать не менее двух-трех измерений, чтобы убедиться в отсутствии промаха и малости случайных погрешностей.

В простых экспериментах случайная погрешность часто бывает пренебрежительно мала. Для того, чтобы быстро обнаружить и тем самым упростить расчет погрешностей, поступим так. Вычислим приборную погрешность h, затем проделаем три измерения и оценим случайную погрешность по методу Корнфельда:

$$\Delta x = \left(x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}\right)/2 .$$

Если окажется $\Delta x < h/3$, случайными погрешностями можно пренебречь и увеличивать количество измерений не нужно.

Пример 3. Миллиамперметр класса 1,5 со шкалой от 0 до 300 мА дает в любом месте шкалы абсолютную предельную погрешность

$$h = 300 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \text{ мА}.$$

Прибор того же класса точности, но со шкалой от –200 до 200 мА дает погрешность

$$h = (200 + 200) \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} = 6 \text{ мА}.$$

Пример 4. В табл. 4 приведена выдержка из паспортных данных низкочастотного генератора Г3-56.

Таблица 4

Диапазон частот, кГц	Погрешность установки частоты, Гц
0,2 – 20	$0{,}01 f_{\text{вых}} + 0{,}5$
0,02 – 20	$0{,}02 f_{\text{вых}} + 0{,}5$
20 – 200	–

Шкала частот прибора – логарифмическая, с изменением частоты в 10 раз на каждом из четырех диапазонов: 0,02 – 0,2; 0,2 – 2; 2 – 20 и 20 – 200 кГц.

Отрезки, откладываемые вдоль шкалы, пропорциональны не самой частоте, а ее логарифму. Такая шкала примечательна тем, что погрешность, составляющая определенную долю полной длины шкалы, дает в любом месте шкалы одну и ту же абсолютную погрешность логарифма частоты и, следовательно, одну и ту же ***относительную*** погрешность самой частоты (докажите это).

Найдем класс точности прибора на диапазоне 2 – 20 кГц. Согласно табл. 4 относительная предельная погрешность $\dfrac{\Delta f}{f} = 0{,}01$ (величиной 0,5 Гц на этом диапазоне можно пренебречь). Полной длине шкалы соответствует изменение логарифма частоты на величину:

$$\lg f_{\text{макс}} - \lg f_{\text{мин}} = \lg \frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} = \lg 10 = 1 .$$

Погрешность прибора соответствует изменению логарифма частоты на величину:

$$\Delta \lg f = \lg(f + \Delta f) - \lg f = \lg \frac{f + \Delta f}{f} = \lg\left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right) = \lg 1{,}01 = 4{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Отношение погрешности к полной длине шкалы:

$$\frac{\Delta \lg f}{\lg f_{\text{макс}} - \lg f_{\text{мин}}} = 4{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Умножая это значение на 100 и округляя до ближайшего стандартного значения, найдем класс точности:

$$\gamma = 0{,}5.$$

П р и м е р 5. Тестер Ц-315 при измерении постоянных токов и напряжений имеет класс точности 1,5 и шкалу на 50 делений. Округляя показания до целых делений, получаем погрешность отсчета, превышающую погрешность показаний. Целесообразнее снимать отсчеты с точностью до половины деления, тогда погрешностью отсчета можно пренебречь.

П р и м е р 6. В табл. 5 приведена выдержка из паспортных данных электронного милливольтметра В3-38. Указаны предельные погрешности в процентах от предела измерения.

Таблица 5

Погрешности милливольтметра В3-38

Диапазон частот, МГц	Погрешность измерения напряжения, %, на пределах измерения	
	1 – 300 мВ	1 – 300 В
$(20-45)\cdot 10^{-6}$	±4	±4
$45\cdot 10^{-6} - 1$	±2,5	±4
1 – 3	±4	±6
3 – 5	±6	±6

Шкала прибора имеет 50 делений. Укажите рациональные способы округления показаний на различных диапазонах частот и пределах измерения.

П р и м е р 7. При $n = 10$ измерениях получена случайная погрешность $\sigma_{\text{разбр}} = 15$. Нужно найти оптимальное число измерений n_0, если приборная погрешность $\sigma_{\text{приб}} = 5$.

При оптимальном числе измерений случайная погрешность должна быть равна приборной, а для этого должна стать в 3 раза меньше, чем при $n = 10$, так как

$$\frac{\sigma_{\text{разбр}}}{\sigma_{\text{приб}}} = 3.$$

Поскольку случайная погрешность результата обратно пропорциональна $\sqrt{n}$ (формула (6)), число измерений нужно увеличить в

$$\left(\frac{\sigma_{\text{разбр}}}{\sigma_{\text{приб}}}\right)^2 \approx 10 \text{ раз}.$$

Следовательно, оптимальное число измерений:

$$n_0 = \left(\frac{\sigma_{\text{разбр}}}{\sigma_{\text{приб}}}\right)^2 \approx 100.$$

П р и м е р 8. Выясним, имеет ли смысл увеличивать число измерений диаметра провода (см. пример 2)? Как мы уже нашли,

$$\sigma_{\bar{d}\,\text{разбр}} = 1{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Предельная погрешность показаний микрометра согласно табл. 3 равна 4 мкм, следовательно,

$$\sigma_{\text{показ}} = \frac{h}{3} = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Судя по приведенным в табл. 2 данным, округление при снятии показаний проводилось до целых делений, т.е. до 0,01 мм, отсюда

$$\sigma_{\text{отсч}} = \frac{d}{3} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Сравнивая приведенные величины, убеждаемся в преобладании случайной погрешности. Следовательно, увеличивая количество измерений, можно повысить точность результата.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В большинстве экспериментов интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо этого мы измеряем другие величины a, b, c и т.д., а затем вычисляем искомую величину z, которая является известной функцией указанных первичных величин:

$$z = z(a, b, ...).$$

Допустим, для каждой первичной величины мы нашли средние значения $\overline{a}, \overline{b}, ...$, и погрешности $\Delta a, \Delta b, ...$. В качестве наилучшего приближения для величины z возьмем значение, получающееся при подстановке вместо истинных значений $A, B, ...$ средних экспериментальных значений:

$$\overline{z} = z(\overline{a}, \overline{b}, ...).$$

Для определения погрешности Δz поступим следующим образом. Изменим одну из первичных величин, например a, на величину ее погрешности и найдем, на сколько при этом изменится величина z. В результате найдем погрешность Δz_a, обусловленную погрешностью одной из первичных величин:

$$\Delta z_a = \left| z(\overline{a} + \Delta a, \overline{b}, ...) - z(\overline{a}, \overline{b}, ...) \right|.$$

Если погрешность Δa невелика, величина Δz вычисляется по формуле:

$$\Delta z_a = \left| \frac{\partial z}{\partial a} \right| \Delta a. \qquad (14)$$

При вычислении производной все величины, кроме a, в формуле для z считаются постоянными – это частная производная. Значение производной, как и значение z, находим, подставляя вместо истинных величин их средние экспериментальные значения.

Аналогичным образом найдем погрешности величины z, обусловленные погрешностями других первичных величин, например

$$\Delta z_b = \left| \frac{\partial z}{\partial b} \right| \Delta b.$$

Для определения результирующей погрешности Δz казалось бы достаточно просто сложить погрешности, обусловленные отдельными первичными величинами. Однако при этом для Δz мы обязательно получим завышенный результат. Действительно, чтобы величина Δz равнялась упомянутой сумме погрешностей, все первичные величины должны одновременно отклониться на величину своих погрешностей так, чтобы обусловленные этими отклонениями изменения величины z были одного знака, а это маловероятно. Скорее всего отклонения величины z, вызванные различными независимыми факторами, будут частично компенсировать друг друга, и погрешность величины z будет меньше упомянутой суммы.

Погрешности Δa, Δb и другие могут вычисляться различными методами, например некоторые определены по методу Корнфельда, другие являются предельными приборными погрешностями. Определенных правил сложения произвольных погрешностей нет. Известно лишь, как складываются среднеквадратические ошибки. Для нахождения среднеквадратичной ошибки величины z, обусловленной погрешностью величины a, достаточно в формуле (14) в качестве Δa взять среднеквадратическую погрешность величины a:

$$\sigma_{\overline{z}a} = \left| \frac{\partial z}{\partial a} \right| \sigma_{\overline{a}}. \qquad (15)$$

Аналогично

$$\sigma_{\overline{z}} = \left| \frac{\partial z}{\partial b} \right| \sigma_{\overline{b}}$$

и т.д. Результирующая среднеквадратическая погрешность $\sigma_{\overline{z}}$ вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\overline{z}} = \sqrt{\sigma_{\overline{z}a}^2 + \sigma_{\overline{z}b}^2 + ...}, \qquad (16)$$

которая означает, что квадрат результирующей погрешности равен сумме квадратов погрешностей, обусловленных различными независимыми факторами. Это – общее и очень важное свойство среднеквадратических погрешностей. Если бы, например, при прямых измерениях получились сравнимые случайные приборные погрешности, результирующую погрешность следовало бы вычислять по формуле:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}\,\text{разбр}} + \sigma^2_{x\,\text{приб}}}, \tag{17}$$

которая дает более верный результат, чем (13).

Как ни странно, пользоваться формулами (16), (17) легче, чем просто складывать погрешности. Дело в том, что при вычислении по этим формулам можно значительно сократить число погрешностей, принимаемых во внимание. Пусть, например,

$$\sigma_{\bar{z}a} = 1{,}0; \quad \sigma_{\bar{z}b} = 0{,}3.$$

По формуле (16) находим

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{1{,}0 + 0{,}09} = 1{,}04.$$

Поскольку нет смысла оставлять в погрешности три значащие цифры, полагаем

$$\sigma_{\bar{z}} = 1,$$

другими словами, погрешность величины b не дает практически никакого вклада в $\sigma_{\bar{z}}$, и при вычислении $\sigma_{\bar{z}}$ её не нужно учитывать. Вообще, при вычислении $\sigma_{\bar{z}}$ можно смело отбрасывать погрешности, не превышающие 1/3 (или даже 1/2) от максимальной. Часто бывает, что одна из погрешностей, например $\sigma_{\bar{z}a}$, значительно превосходит любую другую. Тогда вообще не требуется вычислять $\sigma_{\bar{z}}$, так как

$$\sigma_{\bar{z}} = \sigma_{\bar{z}a}.$$

Подчеркнем, прежде чем вычислять $\sigma_{\bar{z}}$, необходимо получить численные значения всех составляющих этой величины $\sigma_{\bar{z}a}$, $\sigma_{\bar{z}b}$ и т.д. Только тогда сможем упростить вычисление $\sigma_{\bar{z}}$, пренебрегая некоторыми из погрешностей. Но главное – становится ясным, какое измерение дает наибольший вклад в погрешность результата. Это необходимо знать при поиске путей повышения точности эксперимента.

Учитывая важность выделения максимального вклада в результирующую погрешность, рекомендуем на первых порах вообще не складывать погрешности, полагая

$$\sigma_{\bar{z}} = \max\left(\sigma_{\bar{z}a}, \sigma_{\bar{z}b}, \ldots\right). \tag{18}$$

По той же причине мы рекомендовали формулу (13), а не (17), для нахождения погрешностей прямых измерений.

Если величина z является произведением нескольких функций первичных величин, например

$$z = F_1(a)F_2(b)\ldots,$$

то вначале удобнее вычислить относительную погрешность по формулам:

$$\delta_{\bar{z}a} = \frac{\sigma_{\bar{z}a}}{|\bar{z}|} = \frac{\sigma_{F_1}}{|F_1|} = \left|\frac{1}{F_1}\frac{dF_1}{da}\right|\sigma_{\bar{a}},$$

$$\delta_{\bar{z}b} = \left|\frac{1}{F_2}\frac{dF_2}{db}\right|\sigma_{\bar{b}},$$

$$\delta_{\bar{z}} = \sqrt{\delta^2_{\bar{z}a} + \delta^2_{\bar{z}b}} + \ldots \tag{19}$$

или

$$\delta_{\bar{z}} = \max\left(\delta_{\bar{z}a}, \delta_{\bar{z}b}, \ldots\right), \tag{20}$$

и лишь затем – абсолютную ошибку:

$$\sigma_{\bar{z}} = |\bar{z}|\delta_{\bar{z}}. \tag{21}$$

Получив окончательный результат эксперимента, запишите его с указанием абсолютной и относительной погрешности. Если доверительная вероятность не задана, приведите среднеквадратическую погрешность. Для нахождения погрешности по заданной доверительной вероятности воспользуйтесь табл. 1. Затем проведите анализ погрешностей. Нужно осветить следующие вопросы.

Какое измерение дает наибольший вклад в погрешность результата?

Какие погрешности (случайные или приборные) преобладают в эксперименте?

Согласуется ли результат опыта с теорией или с табличными данными? Если нет, то каковы причины расхождения? Расхождение будем считать незначительным, если доверительные интервалы сравниваемых величин перекрываются.

Попробуйте также указать возможные источники систематических ошибок и пути повышения точности эксперимента.

Пример 9. Пусть $z = a^2 \cos b$, и в итоге обработки прямых измерений величин a и b получено

$$A = (126 \pm 2)\ \text{см}; \quad B = (23 \pm 1)\ \text{град}.$$

Требуется определить z и погрешность $\sigma_{\bar z}$, а также выяснить, какую из величин a и b следует измерять точнее для уменьшения погрешности результата эксперимента.

Вычисляем производные и находим:

$$\bar z = \bar a^2 \cos \bar b = 146 \cdot 10^2\ \text{см}^2;$$

$$\delta_{\bar z a} = \frac{\sigma_{\bar z a}}{|\bar z|} = 2\frac{\sigma_{\bar a}}{\bar a} = 3{,}2 \cdot 10^{-2};$$

$$\delta_{\bar z b} = \frac{\sigma_{\bar z b}}{\bar z} = \left|\operatorname{tg} \bar b\right| \cdot \sigma_{\bar b} = 7{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

Поскольку $\delta_{\bar z a}$ значительно больше $\delta_{\bar z b}$, полагаем

$$\delta_{\bar z} = \delta_{\bar z a} = 3 \cdot 10^{-2};$$

$$\sigma_{\bar z} = \bar z \delta_{\bar z} = 5 \cdot 10^2\ \text{см}^2;$$

$$z = (1{,}46 \pm 0{,}05) \cdot 10^4\ \text{см}^2.$$

6. ГРАФИКИ

Графики являются одним из наиболее важных средств, имеющихся в распоряжении экспериментатора для анализа данных. Как правило, графики строят при изучении функциональной зависимости одной величины от другой: $y = f(x)$.

Графики представляют результаты измерений в наиболее наглядной форме при минимальной их обработке, выдавая максимум информации на минимальном пространстве. Построив график, мы сразу выявляем характерные особенности изучаемых зависимостей: области возрастания или убывания, максимумы и минимумы, области наибольшей и наименьшей скорости изменения, периодичность и т.д. Получить эти сведения, пользуясь только таблицами экспериментальных данных, можно лишь после их трудоемкой обработки. Графики позволяют быстро проверить соответствие теории и экспериментальных данных, а также спланировать дальнейшие эксперименты, например выявить области изменения переменных, требующих более подробного экспериментального исследования.

Наглядность – не единственное достоинство графиков. Они помогают решать и более серьезные задачи.

Обработка графиков позволяет вывести эмпирические соотношения между изучаемыми величинами, т.е. найти вид функции $y = f(x)$ и определить ее параметры, что часто и является конечной целью эксперимента. Графики позволяют найти области, в которых существует та или иная зависимость между величинами, и на основании этого сделать выводы о характере физических процессов (см. пример 12).

Графический метод эффективен лишь при грамотном применении. Необходимо пользоваться определенными правилами построения графиков, выбирать откладываемые по осям величины так, чтобы получилась наиболее показательная зависимость, и владеть хотя бы элементарными способами обработки графического материала. Отметим, что компьютерные программы построения графиков также следуют нижеизложенным правилам.

6.1. Построение и оформление графиков

Выбор бумаги и координатных осей. График выполняется на миллиметровой (или специальной) бумаге, на которую наносятся координатные оси. По оси абсцисс, как правило, откладывается переменная, принятая за независимую (аргумент), по оси ординат – функция. Размер листа выбирается достаточно большим, чтобы удобно строить график и пользоваться им. Удобны листы миллиметровки в 1 и 2 стандартных формата писчей бумаги (210x297 мм), выпускаемые в виде планшетов.

При нанесении осей оставьте место для заголовка и поясняющих подписей, а также для вклейки или подшивки графика в лабораторный журнал.

Графические зависимости, снимаемые с экрана осциллографа, выполняются на кальке, которая затем наклеивается на лист более плотной бумаги. При необходимости количественной обработки графика на кальку наносят координатную сетку, или переносят график на миллиметровку.

Выбор интервалов. Интервалы изменения переменных по обеим осям выбираются независимо друг от друга так, чтобы была представлена лишь экспериментально исследованная область изменения измеренных величин, а сам график занимал бы практически все поле чертежа. При этом начало координат (точку (0, 0)) необязательно помещать на графике. Это разумно лишь в том случае, когда не потребуется значительного увеличения размеров графика, или когда точка (0, 0) есть наиболее надежный результат измерения (например, или измерении сопротивления точка $U = 0$, $I = 0$).

Выбор масштабов и нанесение шкал по осям. Ценность графика во многом зависит от удачного выбора масштаба. За единицу масштаба выбирают отрезки, кратные 5, 10, 50, 100 мм, позволяющие легко отсчитывать на миллиметровой бумаге доли делений координатной сетки.

Шкала должна легко читаться, поэтому расстояние между соседними делениями шкалы (единица масштаба) должно соответствовать «круглому» числу единиц измеряемой величины (1, 2, 5, реже – 4, или те же цифры, умноженные на 10^n). Число делений с цифрами на каждой оси должно быть минимально необходимым для ясного понимания шкалы и составляет обычно от 4 до 10. Рядом с осью или в конце оси указывается откладываемая величина и ее размерность. Множитель 10^n, определяющий порядок величины, включается в единицы измерения, например: «U, мкВ» или «U, 10^{-6} В». Пример обозначения безразмерных величин:

«N, отн. ед.», «N, 10^3 ед.».

Выбрав масштаб и разметив шкалы, проверьте себя: найдите координаты двух-трех произвольно взятых на листе точек. Если на определение двух координат каждой точки затрачивается более 10 с или возникают ошибки – шкалы размечены неудачно.

При изменении величин в широком диапазоне значений (на несколько порядков) и при исследовании функциональных зависимостей широко применяют логарифмические координатные сетки. Они бывают двух типов: полулогарифмическая, когда логарифмический масштаб взят только для одной координатной оси, и двойная логарифмическая (или просто логарифмическая), когда логарифмические шкалы строят на обеих осях. Выпускается бумага с логарифмической или полулогарифмической сеткой.

Логарифмическая шкала неравномерна. На оси откладывают отрезки, пропорциональные логарифму измеряемой величины, однако цифры проставляют в соответствии со значениями самой измеряемой величины, а не ее логарифма. Примером могут служить шкалы: шкала «x» – логарифмическая неравномерная, а шкала «$\lg x$» – равномерная (рис. 4, *а*, *б*). На координатной оси графика полезно давать разметку обеих шкал.

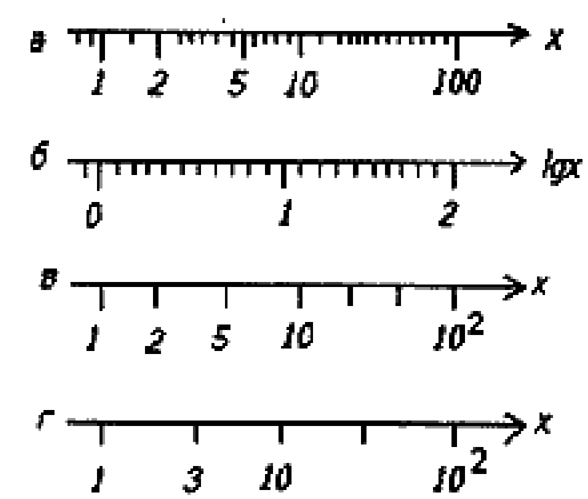

Рис. 4. Логарифмические шкалы

Если нет логарифмической бумаги, несложно разметить логарифмическую шкалу на миллиметровке с достаточной для большинства применений точностью. Полезно запомнить:

$$\lg 2 = 0{,}3\,; \quad \lg 3 = 0{,}5\,; \quad \lg 5 = 0{,}7\,.$$

Поэтому на логарифмической шкале интервалы от 1 до 2, от 2 до 5 и от 5 до 10 составят 0,3; 0,4 и 0,3 интервала, соответствующего изменению величины «на декаду», т.е. в 10 раз, а цифра «3» расположится примерно посередине между 1 и 10. Построенные таким образом шкалы представлены на рис. 4, *в*, *г*.

Масштаб выбирается так, чтобы на декаду приходился отрезок, который удобно делить на части, например 50 или 100 мм.

Физические величины обладают размерностью, поэтому вычисляют логарифмы не самих величин, а их отношения к единице измерения, общей для всех экспериментальных точек, по которым строится график.

Нанесение точек и погрешностей. Точки на график нужно наносить точно и тщательно, обводя их кружком или другим знаком. Если на одном листе представляются результаты нескольких экспериментов, точки, относящиеся к различным группам опытов, обозначают разными знаками (кружки, треугольники и т.д.).

Погрешности указывают для одной или для обеих измеряемых величин в виде отрезков длиной в доверительный интервал, в центре которых расположены экспериментальные точки, или в виде прямоугольника, стороны которого равны доверительным интервалам (рис. 5).

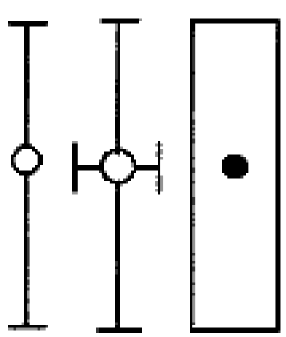

Рис. 5. Указание погрешностей

Поскольку указание погрешностей загромождает график, делайте это лишь тогда, когда информация об ошибках действительно нужна: при построении кривой по экспериментальным точкам, при определении ошибок с помощью графика, при сравнении экспериментальных данных с теоретической кривой, а также в случаях, когда погрешность сильно меняется в пределах графика. Часто достаточно указать погрешность для одной или нескольких точек.

При точных измерениях погрешность может быть не видна на графике. Такой график годится для наглядного представления результатов эксперимента, но для графического анализа данных без потери точности нужно построить дополнительный график, выбрав масштаб и откладываемые по осям величины так, чтобы погрешность измерений или разброс экспериментальных точек составили несколько мелких делений шкалы.

Проведение кривой по экспериментальным точкам. Если нанесенные на график экспериментальные точки недостаточно наглядно отражают результаты эксперимента, то проводят «наилучшую» кривую, проходящую через доверительные интервалы возможно ближе к экспериментальным точкам. Не следует соединять точки ломаной линией. Обычно физические зависимости соответствуют гладким, плавно меняющимся функциям, поэтому старайтесь проводить кривые без резких изломов и перегибов. На каждом участке графика точки должны располагаться примерно поровну по обеим сторонам кривой.

Если большое количество точек указывает на излом или скачок графика, которые не объясняются погрешностями измерений или изменением условий опыта (например, переходом на другую шкалу, заменой или подстройкой прибора в процессе опыта, изменением напряжения сети), то эти особенности следует отразить на графике и попытаться объяснить их теоретически, а также более тщательно исследовать экспериментально область изменения переменных вблизи особенностей. Как правило, в этих областях происходят качественные изменения в поведении изучаемой физической системы, проявляются новые эффекты, т.е. эти области наиболее интересны для исследователя.

В ряде случаев линии проводят лишь для части экспериментальных точек, например для области, где просматривается линейная зависимость между переменными.

Кривая не должна заслонять экспериментальных точек, поскольку именно точки являются результатом опыта, а кривая – лишь толкование результата.

При построении кривой необходимо учитывать погрешности измерений. Например, на рис. 6, *а* данные эксперимента можно интерпретировать как $y = \text{const}$, объяснив разброс точек случайными ошибками, а на рис. 6, *б* такая интерпретация вряд ли возможна.

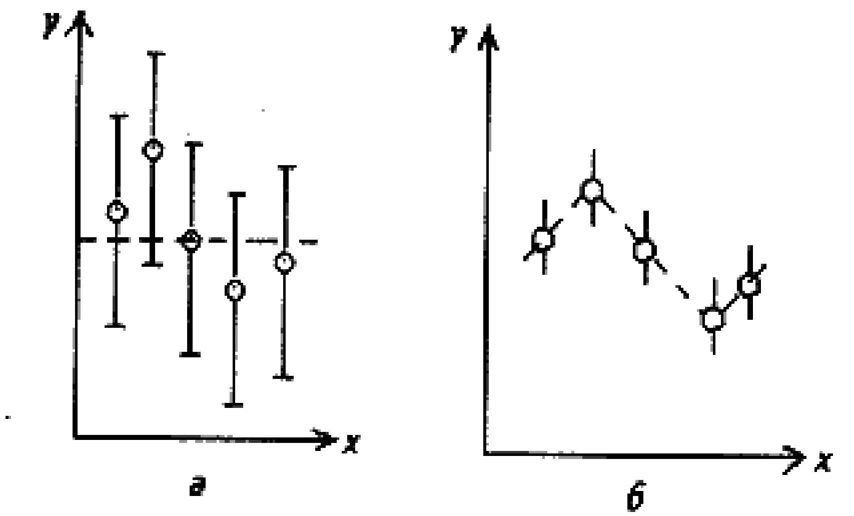

Рис. 6. Интерпретация данных при различных погрешностях

Оформление графиков. Графики снабжаются заголовками и пояснениями, содержащими точное и краткое описание того, что показывает график. Обязательно указываются откладываемые по осям величины и их размерности.

Если на одном графике представлены результаты нескольких экспериментов, расшифровываются обозначения экспериментальных точек. При наличии нескольких кривых эти кривые обозначаются цифрами, поясняемыми в подписи к графику. Заголовок и пояснения располагают под графиком или на свободном от кривых и экспериментальных точек месте на самом графике.

6.2. Графический анализ данных

Сравнение с теорией. Для проверки теоретической зависимости на график наносят экспериментальные точки с указанием погрешностей, а также строят теоретическую кривую.

Экспериментальные точки должны быть хорошо видны на графике, а точки, по которым строилась теоретическая кривая – не видны. Вследствие погрешностей измерения экспериментальные точки не лягут точно на кривую. В зависимости от того, пройдет ли теоретическая кривая через доверительные интервалы экспериментальных точек, результаты эксперимента признают согласующимися (рис. 7, *а*) или не согласующимися (рис. 7, *б*) с теорией. В последнем случае следует проверить отсутствие систематических ошибок в измерениях, правильность расчетов и, возможно, пересмотреть теорию. Теория является упрощенным, идеализированным описанием реального мира. Поэтому часто согласие теории с экспериментом наблюдается лишь в ограниченной области изменения переменных, а в других областях существенны явления, которые данной теорией не учитываются.

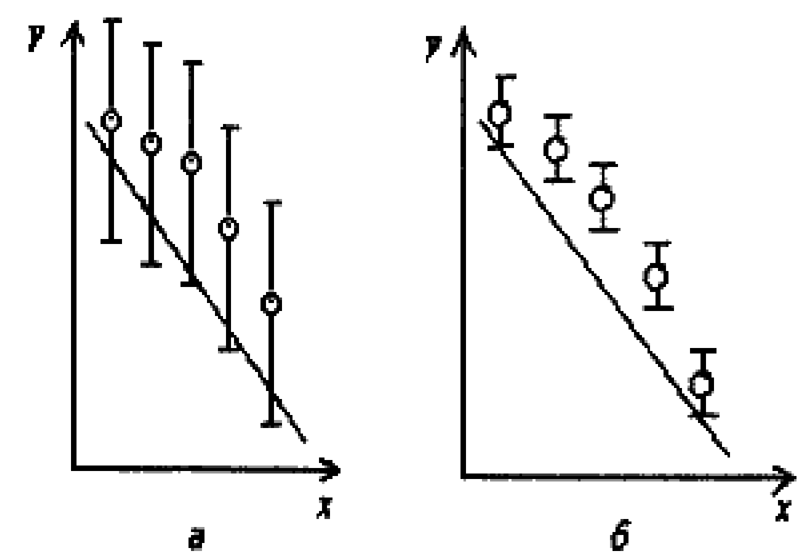

Рис. 7. Сравнение экспериментальных данных с теорией

Выбор наиболее показательной зависимости. При точных измерениях на графике могут оказаться неразличимы погрешности измерений или отклонения экспериментальных точек от теоретической кривой. Такой график не позволит сравнить теорию с экспериментом или сделать заключение о характере изучаемой зависимости. В этом случае строится дополнительный график для величины, которая в отсутствие погрешностей была бы постоянной или равнялась нулю, например график для разностей между теоретическими и экспериментальными значениями. Масштаб такого графика всегда можно выбрать так, чтобы погрешности или отклонения от теории стали хорошо заметными. При проверке линейной зависимости полезен график не самой функции $y(x)$, а её экспериментально определяемой производной:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{эксп}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

При проверке прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ полезны также графики величин y/x или $y - k_{эксп}x$, где $k_{эксп}$ определяется по каким-либо двум экспериментальным точкам.

Подбор параметров. Функциональная зависимость $y(x)$ может определяться одним или несколькими параметрами, значения которых нужно найти из опыта:

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots).$$

Если вид функции известен, строят несколько графиков $y(x)$ для разных значений параметров и выбирают из них наиболее близкий к экспериментальным точкам. Это – громоздкая процедура, и для нелинейной зависимости параметры обычно подбирают с помощью ПВМ. В случае линейной зависимости есть более простые приемы нахождения параметров.

Простые приемы построения «наилучшей» прямой. Пусть между измеряемыми величинами x_i и $y_i (i = 1, \ldots, n)$ предполагается существование линейной зависимости:

$$y = kx + b$$

и требуется определить параметры этой зависимости k и b, наиболее соответствующие результатам измерений.

График этой зависимости есть прямая, причём коэффициент k определяет наклон прямой, величина b определяет отрезок, отсекаемый прямой на оси y.

Для приближенного определения параметров нужно нанести экспериментальные точки на график и провести прямую «на глаз» так, чтобы по обе стороны от нее оказалось одинаковое количество точек и отклонения точек по обе стороны от прямой были бы минимальны. Угловой коэффициент k определяется из графика. Для этого на проведенной прямой выбирают произвольно две точки, по возможности дальше отстоящие друг от друга, находят по шкалам на осях графика координаты этих точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и вычисляют угловой коэффициент:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (22)$$

Погрешность находим по формуле:

$$\Delta k = \frac{\Delta y}{x_{макс} - x_{мин}}, \qquad (23)$$

где $x_{макс}$ и $x_{мин}$ – координаты крайних точек, использованных для проведения прямой; Δy – погрешность в определении y. Если погрешность измерения y неизвестна или отклонения точек от проведенной прямой больше этой погрешности, в качестве Δy следует взять наибольшее из этих отклонений.

Для более точного определения k воспользуемся методом парных точек. Пронумеруем экспериментальные точки (рис. 8), возьмем две из них, например 1 и 4, и проведем через них прямую. Эта прямая имеет угловой коэффициент:

$$k_1 = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}.$$

Возьмем затем другую пару точек – 2 и 5, снова построим прямую и определим ее угловой коэффициент. Проведя, таким образом, еще несколько прямых, получим набор значений угловых коэффициентов. Их среднее даст угловой коэффициент k искомой прямой.

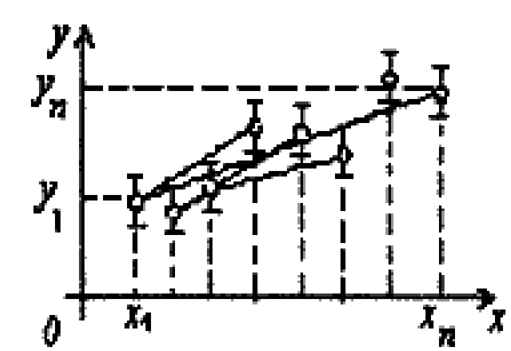

Рис. 8. Построение прямой методом парных точек

Погрешность углового коэффициента Δk определяется так же, как и погрешность среднего значения серии измерений.

Точки для проведения вспомогательных прямых следует выбирать так, чтобы расстояния между координатами x_i этих точек были для всех прямых одинаковыми и немного превышали половину всего интервала значений величины x. При этом точность определения k будет наибольшей и лишь немного хуже, чем при использовании метода наименьших квадратов.

Вспомогательные прямые не обязательно проводить на графике, достаточно ограничиться лишь вычислением угловых коэффициентов этих прямых, а на графике построить только наилучшую прямую.

Для нахождения b нужно учесть, что наилучшая прямая должна проходить через центр тяжести экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,;\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\,.$$

Из уравнения прямой находим

$$b=\overline{y}-k\overline{x}\,. \tag{24}$$

Погрешность определения b:

$$\Delta b=\max\left(\Delta\overline{y},\ \overline{x}\Delta k\right). \tag{25}$$

В качестве грубой оценки $\Delta\overline{y}$ используем максимальное отклонение точек от проведенной прямой. Если прямая пересекается с осью в пределах экспериментально исследованной области (от x_1 до x_n), то основной вклад в Δb дает $\Delta\overline{y}$, если за пределами этой области – погрешность Δb определяется погрешностью Δk.

Интерполяция и экстраполяция. При экспериментальном изучении зависимости $y(x)$ получаем значения y_i лишь для конечного числа значений аргумента x_i. Процедура нахождения значений $y(x)$ в произвольных точках x в пределах экспериментально изученной области называется ***интерполяцией***, за пределами этой – ***экстраполяцией***. Та и другая могут быть графической или аналитической (расчетной).

При графической интерполяции по экспериментальным точкам строят плавную кривую и находят значения $y(x)$ по графику. Если зависимость $y(x)$ – линейная, таким графиком является «наилучшая» прямая. При расчетном методе подбирают аналитическую зависимость $y(x)$ по методу наименьших квадратов (МНК).

Более простой, но менее точной является линейная интерполяции: полагая, что между соседними экспериментальными точками зависимость $y(x)$ – линейная, соединяют эти точки отрезками прямых.

График, предназначенный для линейной интерполяции (но не для представления результатов опыта!), имеет вид ломаной линии, проходящей через экспериментальные точки.

Не путайте линейную интерполяцию с интерполяцией при помощи наилучшей прямой.

Интерполяцией широко пользуются при градуировке шкал приборов. Сначала находят показания прибора для нескольких эталонных (заранее известных) значений измеряемой величины, затем строят градуировочный график, определяющий измеряемую величину как функцию показаний прибора. Примеры: градуировка шкалы монохроматора (спектрометра) по известным длинам волн спектра излучения ртути; градуировка шкалы амперметра по показаниям другого, «эталонного» амперметра; градуировка шкалы генератора с помощью частотометра и т.д.

Экстраполяцию стараются применять лишь в случаях, когда результаты опыта ясно указывают на линейный характер зависимости $y(x)$. По данным опыта находят наилучшую прямую и используют ее график или уравнение. Для экстраполяции это уравнение пишут в виде:

$$y=\overline{y}+k\left(x-\overline{x}\right),$$

но не в виде:

$$y=kx+b\,,$$

поскольку величина b сама определяется через $\overline{x}$, $\overline{y}$, k, т.е. является результатом интерполяции с помощью прямой, проведенной через наиболее достоверную точку ($\overline{x}$, $\overline{y}$).

При интерполяции с помощью наилучшей прямой основной вклад в погрешность Δy вносит погрешность нахождения $\overline{y}$, при экстраполяции – погрешность углового коэффициента Δk. Особое внимание на точность определения k обращается при экстраполяции на расстояния, значительно превышающие размер экспериментально исследованной области.

Использование функциональных шкал. Линейная зависимость легко обнаруживается и проверяется на графике (достаточно приложить линейку к экспериментальным точкам) и очень удобна для анализа. Поэтому при обработке результатов измерений к ней стараются привести нелинейные зависимости, для чего строят графики, откладывая по осям не сами измеряемые величины, а функции этих величин.

Часто встречающиеся в физике степенные и показательные зависимости преобразуются в линейные с помощью логарифмических шкал. Если $y = ax^p$, то

$$\lg y = \lg a + p \lg x, \tag{26}$$

и график получится линейным в логарифмических координатах.

Если же

$$y = ae^{kx},$$

то

$$\ln y = \ln a + kx, \tag{27}$$

и график будет линейным в полулографическом масштабе (по оси x откладывается сама измеряемая величина, а по оси y – логарифм измеряемой величины). Проведя наилучшую прямую и определив ее угловой коэффициент, найдем величины p или k и их погрешности. Для графического определения величины a нужно найти на проведенной прямой точку, для которой абсцисса равна нулю, и определить ординату этой точки, которая даст значение $\ln a$. Более надежным является определение a из уравнений (26) или (27).

Поскольку работа с функциональными шкалами требует определенных навыков, а применять их приходится довольно часто, рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика при температуре T, выше некоторой характерной для данного материала «температуры Кюри» $T_к$, меняется по закону $\varepsilon = A/(T - T_к)$. Для экспериментального определения $T_к$ измеряют зависимость от температуры емкости конденсатора с данным сегнетоэлектриком между обкладками. Поскольку емкость $C \sim \varepsilon$, то $C^{-1} \sim (T - T_к)$ и для графического анализа данных нужно строить зависимость C^{-1} от температуры. Если экспериментальные точки лягут на прямую линию, то точка пересечения этой линии с осью абсцисс дает значение $T_к$.

Пример 11. Момент инерции тела J зависит от расстояния r центра инерции до оси вращения:

$$J = J_0 + mr^2,$$

где m – масса тела. Для экспериментальной проверки этой зависимости можно построить график, откладывая по оси абсцисс r^2, а по оси ординат – измеренные значения J. Точки графика должны лечь на прямую линию, угловой коэффициент которой даст значение m.

Пример 12. Требуется выяснить характер обтекания жидкостью колеблющегося в ней маятника. Теория предсказывает, что при ламинарном обтекании амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону $a \sim e^{-\beta t}$ за счет сил вязкого трения. Результаты опытов, проведенных при различных начальных значениях амплитуды, представлены в табл. 6, погрешность всех измерений амплитуды равна $\Delta a = 1$ мм.

Таблица 6

Амплитуда колебаний маятника, мм

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, с	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
a, мм. Опыт 1	280	152	98	68	50	37	29	22	18	14	11	9
a, мм. Опыт 2	43	33	25	20	16	12	10	8	6	–	–	–

С учетом предсказаний теории строим график в полулогарифмическом масштабе (рис. 9) и убеждаемся, что точки ложатся на прямую лишь при $a < 50$ мм. Отсюда делаем вывод, что ламинарное обтекание имеет место лишь при малых амплитудах.

Обратите внимание на указание погрешностей. Абсолютная погрешность Δa для всех точек одинакова, но на логарифмической шкале отрезки пропорциональны относительной погрешности $\Delta a / a$, поэтому погрешность видна на графике лишь для малых значений a.

Для определения β воспользуемся методом парных точек и данными опыта 1. Из графика видно, что линейной зависимости соответствуют точки с 4-й по 12-ю. Поскольку

$$\ln a = -\beta t + \text{const},$$

то для двух точек с номерами i и j имеем

$$\ln a_j - \ln a_i = -\beta(t_i - t_j),$$

откуда

$$\beta = \frac{\ln a_i - \ln a_j}{t_j - t_i} = \frac{\ln a_i / a_j}{t_j - t_i}.$$

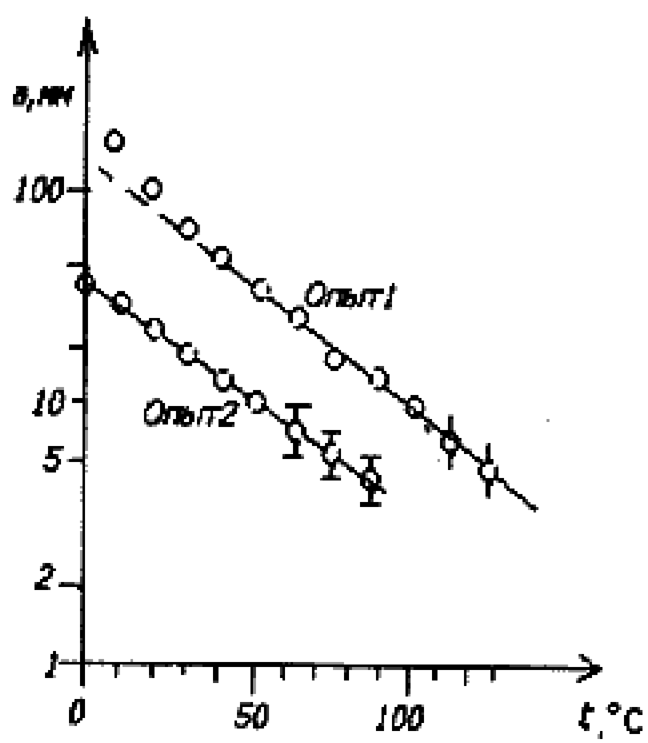

Рис. 9. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени

Вычислив β для каждой пары точек, находим среднее $\overline{\beta}$ и погрешность $\sigma_{\overline{\beta}}$ (табл. 7).

Таблица 7

Определение коэффициента затухания

Пары точек $i-j$	$\ln \frac{a_i}{a_j}$	$t_j - t_i$, с	β, $с^{-1}$	Результат
4 – 9	1,33	50	$2{,}66 \cdot 10^{-2}$	$\overline{\beta} = 2{,}49 \cdot 10^{-2}$ с
5 – 10	1,27	50	$2{,}54 \cdot 10^{-2}$	
6 – 11	1,21	50	$2{,}42 \cdot 10^{-2}$	$\sigma_{\overline{\beta}} = 0{,}06 \cdot 10^{-2}$ с
7 – 12	1,17	50	$2{,}34 \cdot 10^{-2}$	

Определяя β по графику, возьмем на проведенной прямой с «круглыми» значениями $a_1 = 100$ мм; $a_2 = 10$ мм (эти значения легко найти на логарифмической шкале) и соответствующие им моменты времени $t_1 = 10$ с; $t_2 = 105$ с (см. рис. 9), находим

$$\beta = \frac{\ln a_1 / a_2}{t_2 - t_1} = 2{,}42 \cdot 10^{-2}\ с^{-1}.$$

П р и м е р 13. Для определения постоянной времени $\tau = RC$ изображенной на рис. 10 RC-цепочки на ее вход подают переменное напряжение $U_{вх}$ неизменной амплитуды U_0, но с изменяющейся частотой ν, и изучают зависимость амплитуды выходного напряжения U_1 от частоты входного. Полученные результаты приведены в табл. 8.

Теоретическая зависимость (рис. 10, *а*)

$$U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}},$$

на первый взгляд, не указывает простых рецептов нахождения τ по экспериментальным данным. Учитывая, однако, что частота ν (и вместе с ней $\omega = 2\pi\nu$) меняется в широких пределах, рассмотрим предельные случаи:

$$U_1 = U_0 \quad \text{при} \quad \omega\tau \ll 1; \tag{28}$$

$$U_1 = \frac{U_0}{\omega\tau} \quad \text{при} \quad \omega\tau \gg 1. \tag{29}$$

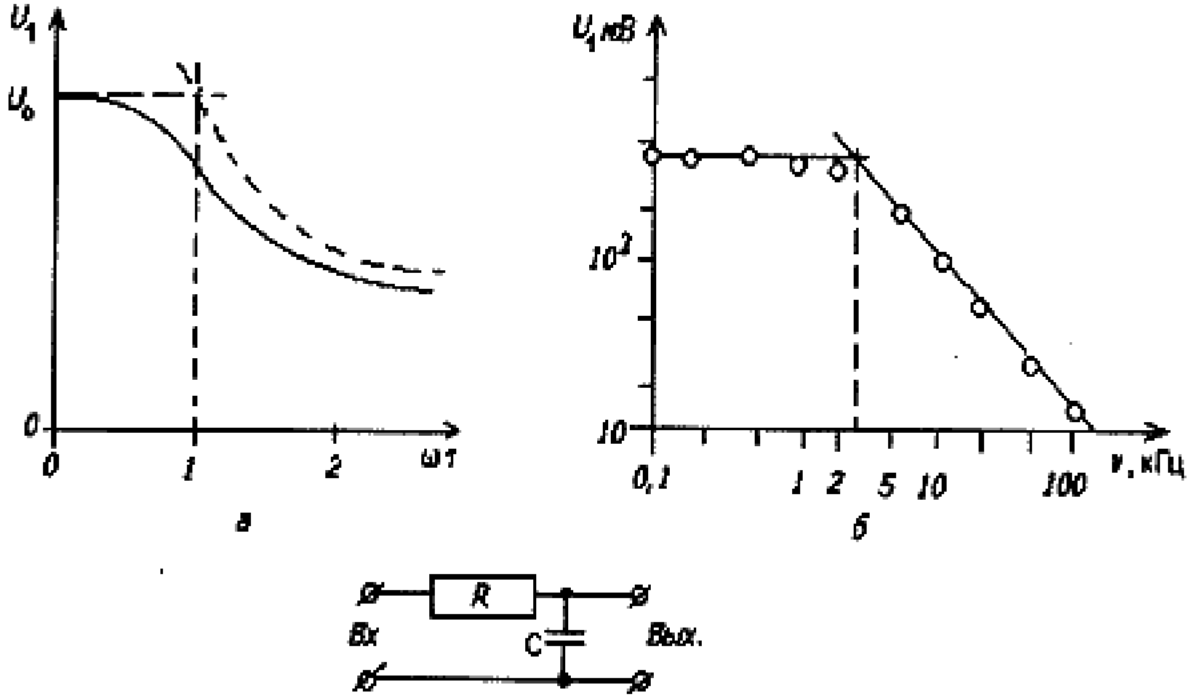

Рис. 10. Определение постоянной времени

Таблица 8

Определение постоянной времени

ν, кГц	0,10	0,20	0,50	1,00	2,00	5,0	10	20	50	100
U_1, мВ	422	416	419	400	353	216	123	59	28	15

Экстраполируя высокочастотную зависимость (29) в область низких частот до частоты ω_0, при которой $U_0/\omega_0\tau = U_0$, найдём характерную частоту $\omega_0 = 1/\tau$ и тем самым определим τ (см. рис. 10, *а*). Но экстраполяция нелинейной зависимости очень сложна (без ПВМ ее проделать практически невозможно). Воспользуемся тем, что обе зависимости (28) и (29) будут линейными в логарифмических координатах. Построив график (рис. 10, *б*), убеждаемся, что данные опыта на низких и высоких частотах ложатся на две прямые, точка пересечения которых определяет частоту $\nu_0 = 2{,}8$ кГц. Искомая постоянная времени

$$\tau = \frac{1}{2\pi\nu_0} = 5{,}7\cdot10^{-5}\ \text{с}.$$

Подумайте сами, как определить погрешность $\Delta\tau$.

7. СВОДКА ПРАВИЛ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. Прямые измерения

1. Ознакомьтесь с измерительным прибором. Запишите в журнал название и тип прибора, диапазоны измерений, цену деления шкалы l, класс точности γ и т.п. По формуле (9) или по табл. 3, или по паспортным данным прибора определите предельную погрешность h и вычислите среднеквадратическую погрешность показаний

$$\sigma_{\text{показ}} = \frac{h}{3}.$$

Выберите способ округления показаний и найдите погрешность отсчета:

$$\sigma_{\text{отсч}} = \frac{d}{3},$$

где d – оцениваемая доля шкалы; обычно $0{,}2l \le d \le l$.

Желательно иметь $d < h$, чтобы погрешностью отсчета можно было пренебречь.

В качестве приборной погрешности возьмите

$$\sigma_{\text{приб}} = \max\left(\sigma_{\text{отсч}}, \sigma_{\text{показ}}\right).$$

Запишите эту величину в журнал.

2. Проведите не менее трех измерений неизвестной величины x. Если разброс результатов $(x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}})/2$ меньше $\sigma_{\text{приб}}$, измерения можно закончить, приняв $\sigma_{\text{приб}}$ в качестве погрешности измерения. В противном случае снимите 5 – 10 отсчетов, занося их в заранее подготовленные таблицы. Вычислите среднее значение и погрешность:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,; \quad \sigma_{\bar{x}\ \text{разбр}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\,.$$

В качестве погрешности измерения возьмите

$$\sigma_{\bar{x}} = \max\left(\sigma_{\bar{x}\,\text{разбр}}, \sigma_{x\,\text{приб}}\right).$$

3. Запишите результат измерения с указанием абсолютной и относительной погрешности, характера этой погрешности (приборная или случайная) и доверительной вероятности. Если преобладает случайная погрешность и число измерений достаточно велико ($n > 5$), можно найти погрешность по заданной доверительной вероятности с помощью табл. 1 (с. 17). Для $\Delta x = \sigma_{\bar{x}}$ в этом случае $\alpha = 0{,}7$. Если преобладает погрешность показаний прибора, доверительную вероятность можно не указывать.

При записи результата округляйте погрешность до одной значащей цифры (если первая цифра 1, оставьте две цифры) и округляйте результат измерений так, чтобы последняя цифра результата соответствовала значащей цифре погрешности.

7.2. Косвенные измерения

4. Для определения величины z, являющейся функцией величин $a, b, \ldots$,

$$z = z(a, b, \ldots),$$

проведите прямые измерения этих величин, вычислите средние значения $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ и погрешности $\sigma_{\bar{a}}, \sigma_{\bar{b}}, \ldots$

5. Вычислите

$$\bar{z} = z(\bar{a}, \bar{b}, \ldots).$$

6. Найдите частные погрешности величины z, обусловленные погрешностями отдельных прямых измерений:

$$\sigma_{\bar{z}_a} = \left|\frac{\partial z}{\partial a}\right|\sigma_{\bar{a}}; \quad \sigma_{\bar{z}b} = \left|\frac{\partial z}{\partial b}\right|\sigma_{\bar{b}}.$$

В качестве погрешности величины z возьмите наибольшую из частных погрешностей:

$$\sigma_{\bar{z}} = \max\left(\sigma_{\bar{z}a}, \sigma_{\bar{z}b}, \ldots\right).$$

7. Запишите результат эксперимента с указанием абсолютной и относительной погрешностей, характера погрешности и измерения, дающего максимальный вклад в погрешность окончательного результата.

7.3. Графический анализ

8. Выполните измерения (прямые или косвенные) величин, откладываемых по осям графика. Большое число точек графика полезнее, чем большое число измерений для каждой точки, поэтому допускается провести по 1 – 2 измерения для каждой точки. Найдите погрешности измерений. При одном измерении для каждой точки будут присутствовать только приборные погрешности. В процессе измерений стройте черновой график и корректируйте интервалы измерения переменных: для гладких кривых выбирайте равностоящие значения одной из переменных; вблизи скачков, изломов или максимумов точки следует располагать чаще.

9. Нанесите на график экспериментальные точки и погрешности. Если возможно, выберите шкалы так, чтобы точки ложились приблизительно на прямую линию.

10. При интерполяции данных линейной зависимостью $y = kx + b$ выделите точки, соответствующие этой зависимости, проведите через них «на глаз» наилучшую прямую и определите ее угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты двух точек, взятых на проведенной прямой возможно дальше друг от друга. Погрешность углового коэффициента оцените по формуле:

$$\Delta k = \frac{\Delta y}{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}},$$

где $x_{\text{макс}}$ и $x_{\text{мин}}$ – координаты крайних точек, использованных при проведении прямой, Δy – наибольшая из двух величин: погрешности измерения y максимального отклонения экспериментальных точек от проведенной прямой.

Константу b определите из графика как ординату точки с нулевой абсциссой или вычислите по формуле:

$$b = \bar{y} - k\bar{x},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Погрешность определения b равна:

$$\Delta b = \max\left(\Delta y,\ \bar{x}\Delta k\right).$$

11. При достаточно большом числе точек ($n \geq 8$) для более точного определения k и b воспользуйтесь методом парных точек. Выделив точки, соответствующие линейной зависимости, разбейте их на пары так, чтобы расстояния между точками в паре были не меньше половины всего интервала изменения переменных. Для каждой пары точек, например с номерами i и j, вычислите

$$k = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}.$$

Определите среднее $\bar{k}$ и погрешность $\sigma_{\bar{k}}$ как для результатов прямых измерений (пп. 2 и 3). Величину b и её погрешность найдите согласно п. 10.