IV семестр

7.02.06

## Лекция №1

Е.И. Бутиков „Оптика" СПб

Сивухин, „Оптика"

Крезов, „Волновые процессы"

# Оптика

Волн. процесс – процесс распростр. возмущения среды, созданного в каких-то т. пр-в

Волны бывают регулярные (т.е. гармонические)
нерегулярные (пр. одиночные – солитоны)

Описание волны. Уравнение волны

$\vec{\xi}(\vec{r},t)$ – ур-ние волны

$\Phi(\vec{\xi})$ – волновое ур-ние

пр $v^2\Delta\vec{\xi}(\vec{r},t)=\ddot{\vec{\xi}}(\vec{r},t)$ (*)

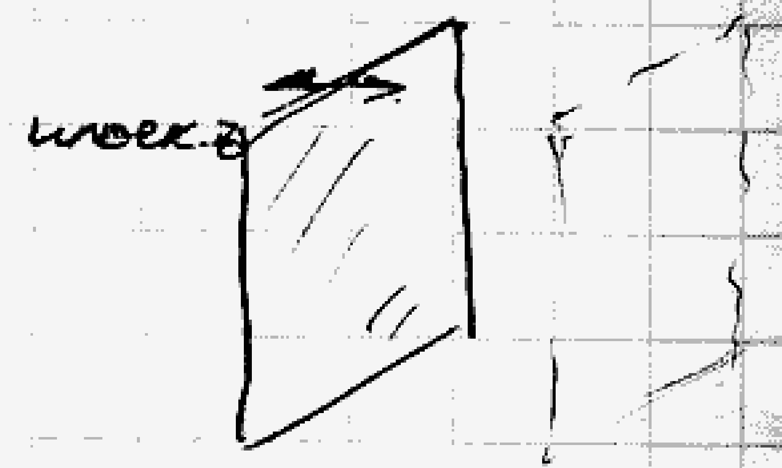
$v$ – скорость распростр. волн (движение одинак. фазы)

Волны делят на продольные и поперечные

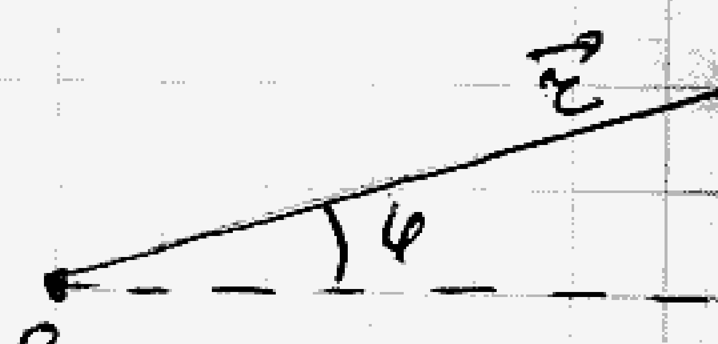
продольные $\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{\xi}$

$\vec{v}$ – распростр., $\vec{\xi}$ – смещение

$\vec{v}\perp\vec{\xi}$ – поперечная

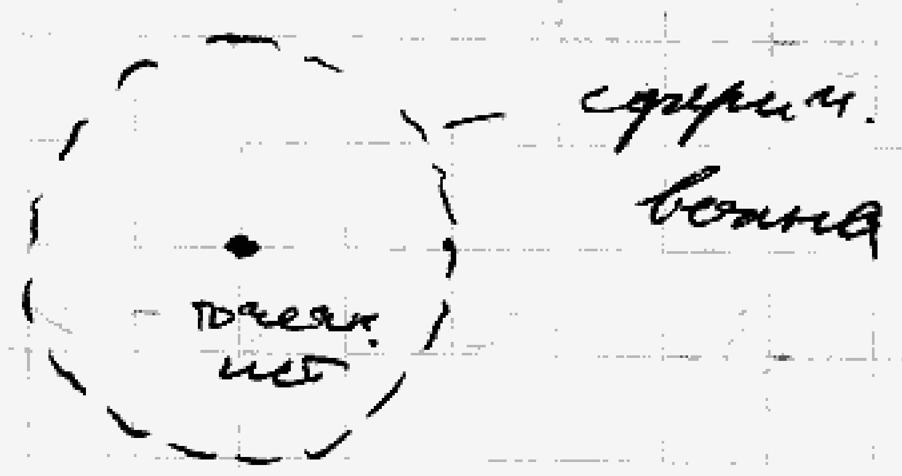



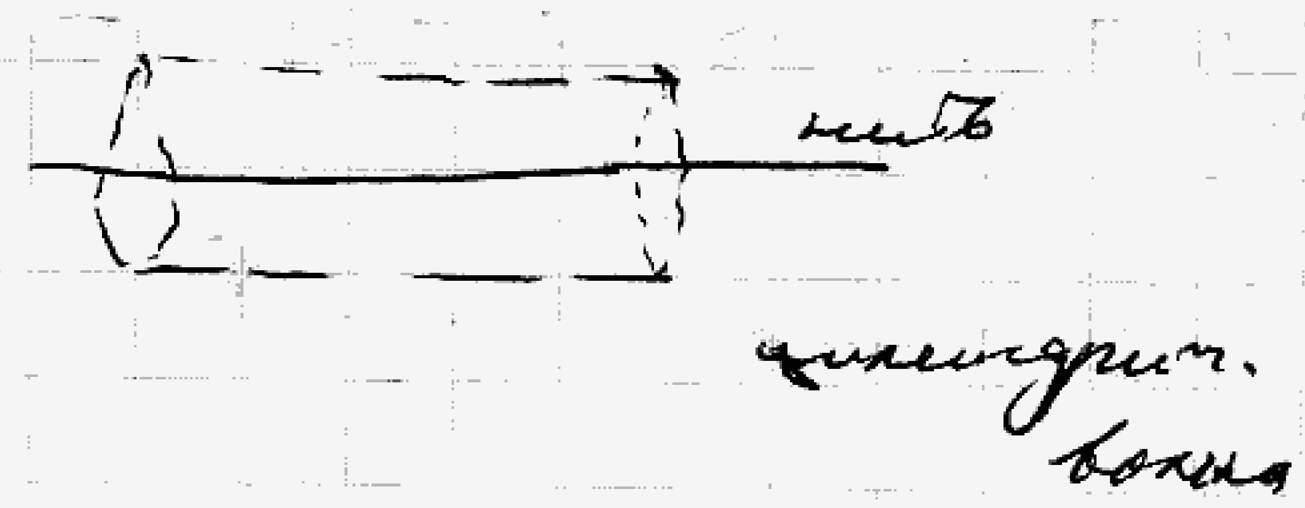

Волны → затухающие




$\vec{\xi}(0,t)=\vec{\xi}_0\cos(\omega t$

амплитуда





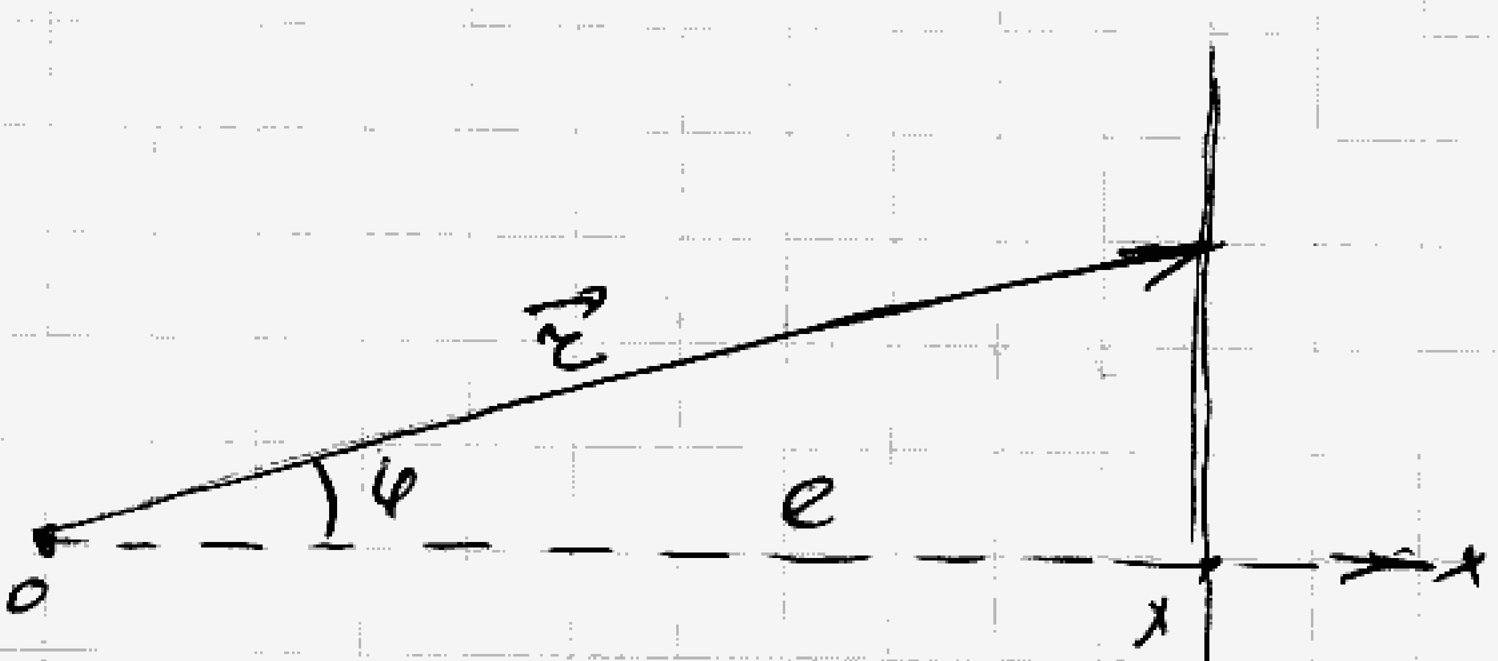
Волны → незатухающие (нет обмена энергией между частицей и средой)

→ затухающие

→ нарастающие

## Плоская Волна

(бегущая, незатухающая, регулярная)




$$\xi(0,t) = \xi_0 \cos(\underbrace{\omega t + \alpha}_{\text{фаза}})$$

$\xi_0$ — амплитуда

$\alpha$ — нач. фаза

волновой фронт – мн-во точ. пр-ва кот разд. части пр-ва где происх волн. процесс и где его нет волновая поверхность

$$\vec{\xi}(x,t) = \vec{\xi}_0 \cos(\omega(t + \tau) + \alpha) = \vec{\xi}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega r \cos\varphi}{v} + \alpha\right) =$$

задержка

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{r\cos\varphi}{v}$$

$$= \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

скор. распростр.

проекция $\vec{k}$ на $x$

$\frac{\omega}{v} = k$ волновое число

$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{e}_v$ волн. вектор

т.о.

$$\vec{\xi}(x,t) = \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

пров. ур-ние из ур-ия (x)

$$v^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x^2} = \ddot{\vec{\xi}}$$

$$\cdot\, k_x^2 v^2 \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha) = \cdot\, \vec{\xi}_0\, \omega^2 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

$$k_x^2 v^3 = \omega^2$$

т.о. $k_x = \pm \frac{\omega}{v}$ ($\pm$ т.к. проекция)

Поясним $v$ - фаз. скорость

$$\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha = const \quad \Big| \text{ дифф по } t$$

$$\omega - (\vec{k}\vec{v}) = 0$$

т.о. $(\vec{k}, \vec{v}) = \omega$

$$\vec{k} \parallel \vec{v} \qquad k\, v_{фаз} = \omega$$

$$k = \frac{\omega}{v_{фаз}}$$

$k_x > 0 \Rightarrow$ движение в напр. $x$
$\vec{v} = v\vec{e}_x$

$k_x < 0 \Rightarrow \vec{v} = -v\vec{e}_x$

---

В общем случае

$$\vec{\xi} = \vec{f}(x + bt)$$

---

Оператор Лапласа в сферической системе ($r$-я комп.)

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

---

$$\vec{\xi}(r,t) = \vec{\xi}_0\left(\frac{r_0}{r}\right)\cos(\omega t \underset{\text{сход}}{\overset{\text{расх}}{\mp}} \{k r\} + \alpha)$$ – сферич. волна

Цилиндрич. волна

$$\vec{\xi}(\rho,t) = \xi_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\cos(\omega t \underset{\text{сход}}{\overset{\text{расх}}{\mp}} k\rho + \alpha)$$

Нарастание ($\varkappa < 0$)

<u>Затухающие</u> <u>волны</u>. ($\varkappa > 0$ - коэф. затухания)

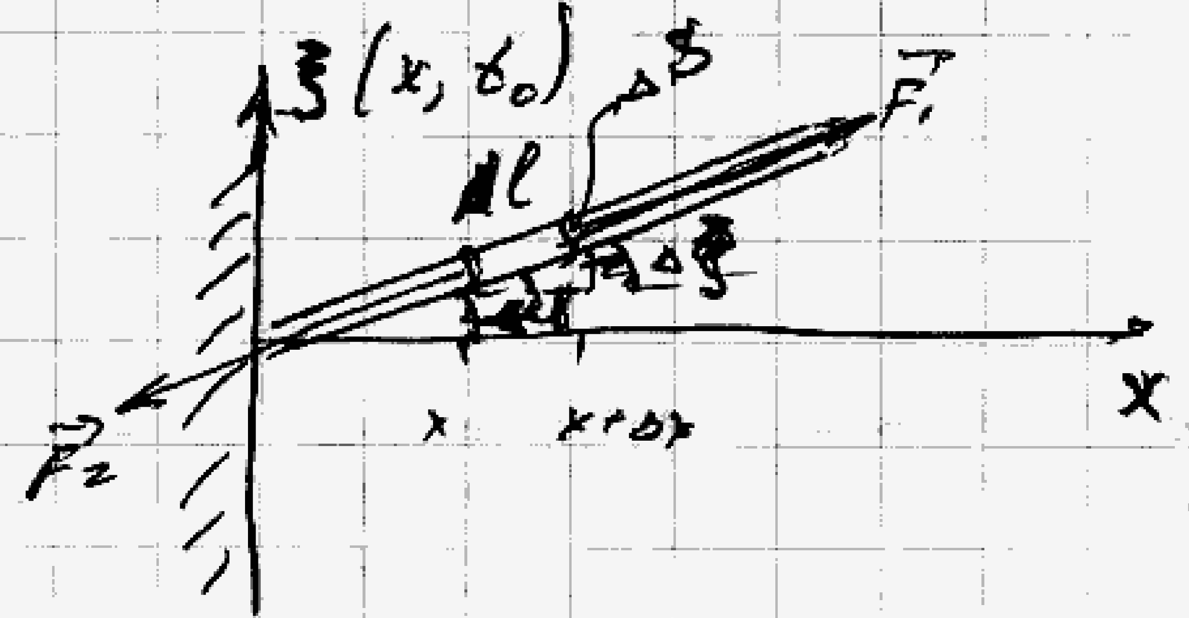
сфер $$\vec{\xi}(r,t) = \xi_0\left(\frac{r_0}{r}\right)e^{\varkappa(r-r_0)}\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

опред поглощение волны в среде

цилиндр. $\vec{\xi}(\rho, t) = \vec{\xi}_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} e^{\varkappa(\rho - \rho_0)} \cos(\omega t - k\rho + \alpha)$

$\gamma = 2\varkappa$ – коэф. поглощения

## Колебания струны (шнура)




$F_1 = F_2 = F$

$\Delta\varphi = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \ll 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ – относительное смещение

$\rho \Delta S \Delta x \ddot{\xi} \approx F_{1\xi} + F_{2\xi} \approx F\left(\Delta\xi(x+\Delta x) - \Delta\xi(x)\right) =$

$= F\left(\Delta\xi(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta\xi\right)\Delta x - \Delta\xi(x)\right) \approx F \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \Delta x^2$

т.о., $\ddot{\xi} = \frac{F}{\rho\Delta S} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

$\ddot{\xi} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

$\ddot{\xi} = v^2 \xi''_{xx}$

попереч. $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

прод. $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (аналог)

## Энергия плоской волны

$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho \underbrace{\Delta S \Delta x}_{\Delta V} \cdot (\dot{\xi})^2 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\Delta S \Delta x}_{\Delta V} v^2 (\xi'_x)^2 =$

$= \frac{1}{2}\Delta V \rho \left((\xi'_t)^2 + (\xi'_x)^2 v^2\right)$ энергия ед. объема

$$\Delta W_p = \frac{1}{2}k(\Delta\xi)^2 = \frac{k(\Delta\xi)^2(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta S E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\rho}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{2}v^2\rho\,\Delta x\,\Delta S\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

плотность энергии

$$\frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho}{2}\left((\dot\xi)^2 + v^2(\xi'_x)^2\right)$$

14.02.06

Лекция №2

$$w = \frac{1}{2}\rho(\dot\xi)^2 + v^2(\xi'_x)^2$$

для плоской волны $\vec\xi(x,t) = \vec\xi_m\cos(\omega t - k_x x + \alpha)$

$$\underset{\text{за период}}{\langle w\rangle} = \frac{1}{2}\rho\xi_m^2\omega^2$$

Поток энергии и плотность потока энергии для плоской волны

Вектор Умова

$$\Delta\Phi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}\Big|_{S_\perp} = \frac{dW}{dt}\Big|_{S_\perp} = \frac{w\,dV}{dt} = \frac{w\,\Delta S_\perp\,dx}{dt} = w\,\Delta S_\perp v$$

уже выр. для полной энергии

$$j = \lim_{\Delta S_\perp \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_\perp} = w v$$ — плотность потока энергии

$$\vec{j} = w\vec{v}$$ — вектор Умова (Умова-Пойнтинга)

$$\langle\Phi\rangle = \langle \oint_S (w\vec{v}, d\vec{S})\rangle = v\oint_S \langle w\rangle dS = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 \oint_S \xi_m^2 dS = const$$

по периоду

энергия в ед. вр. через S

а) сферический источник

Я не уверен в правильности этих формул

$$r^2 \xi_m^2 = const \Rightarrow \xi_m = \xi_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

б) Цилиндрич. источник

$$\xi_m = \xi_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}$$

## Комплексное представление.

$$\overset{\circ}{\vec{\xi}} = \vec{\xi}_m e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)} \qquad \vec{\xi} = Re\left(\overset{\circ}{\vec{\xi}}\right) = \vec{\xi}_m \cdot Re\left(e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)}\right) =$$

$$= Re\left(\overset{\circ}{\vec{\xi}}_m \cdot e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)}\right)$$

## Уравнение неразрывности для плоской волны.

(*) $\left(\vec{\nabla}, \vec{j}\right) + \frac{\partial w}{dt} = 0$ ( $= q$ - излучение или удвоение силы волны), для плоской волны

$\vec{j} = w \cdot \vec{v}$, подст. для распростр. вдоль $OX$

$\vec{v} = v \vec{e}_x$, $w = \frac{1}{2} \rho \left(\xi'_t\right)^2 + v^2 \left(\xi'_x\right)^2$

С помощью подст. в ур-е (*) - проверка.

а) $\xi'_t = \pm v \cdot \xi'_x$   б) $\xi''_{tt} = v^2 \xi''_{xx}$

## Принцип суперпозиции.

выполн. для небольших отклонений от равновесия (не вып. для полей сильно превосход. внутриатомные)

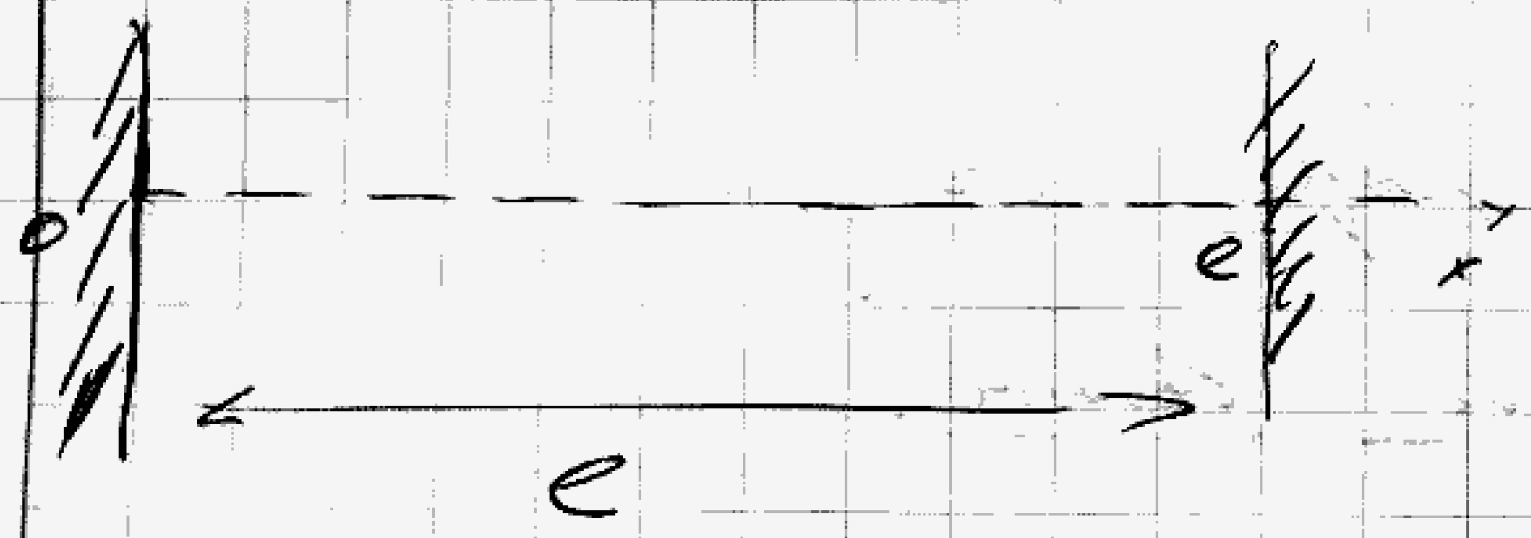
$\vec{\xi} = \sum_i \vec{\xi}_i$ - принцип суперпозиции

## Стоячие упругие волны

Обр. за счет слож. двух волн, имеющих одинак. $\xi_m$ и $\omega$ и $\vec{k}_1 \uparrow\downarrow \vec{k}_2$   ($\vec{\xi}_{m_1} = \vec{\xi}_{m_2} = \vec{\xi}_m$) ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) ($\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}$)

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_m \cos(\omega t - k_x x + \alpha) + \vec{\xi}_m \cos(\omega t + k_x x + \alpha) =$$

$$= 2\vec{\xi}_m \cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\alpha}{2}\right)$$




$\xi(0,t) = \xi(l,t) = 0$

граничные условия

$\forall t$ на левой границе $\xi = 0$ $\Rightarrow \alpha = \pi$

по. $\vec{\xi} = 2\vec{\xi}_m \sin\omega t \cdot \sin kx$

$\forall t$ на правой границе $\xi = 0$ $\Rightarrow$

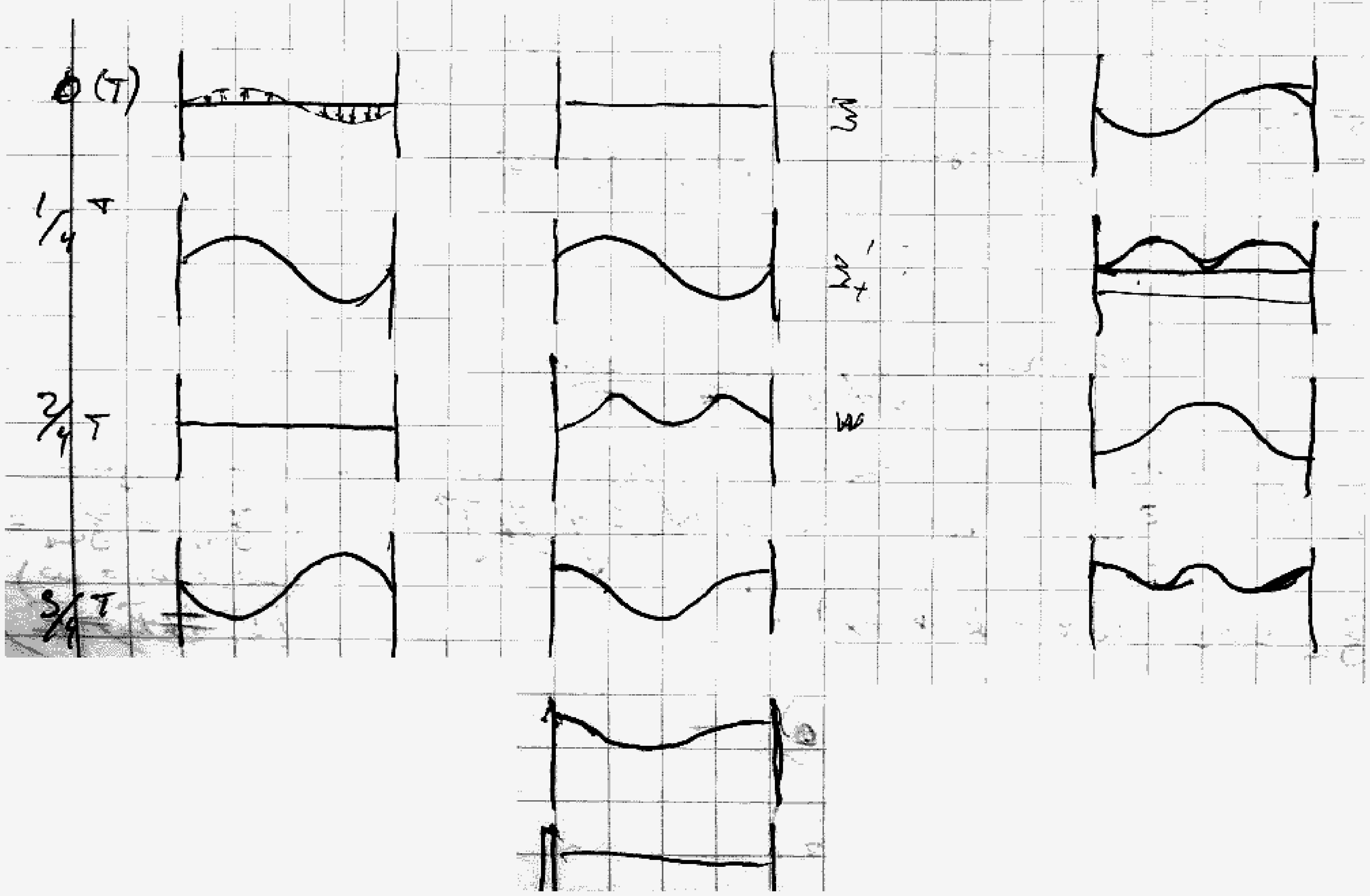
$\vec{\xi}(l,t) = 2\vec{\xi}_m \sin\omega t \cdot \sin k_n l = 0$

$k_n$ - собств. значение волнового числа

по. $k_n l = \pi(n+1)$ $\quad n = 0, \overbrace{1, 2 \ldots}^{\text{гармоники (обертоны)}}$

$n = 0$ - осн. тон (гармоника)

$n < 0$ эквив (попар.) $n > 0$ по этому не исп.



Точки где $\xi = 0$ – узлы смещения

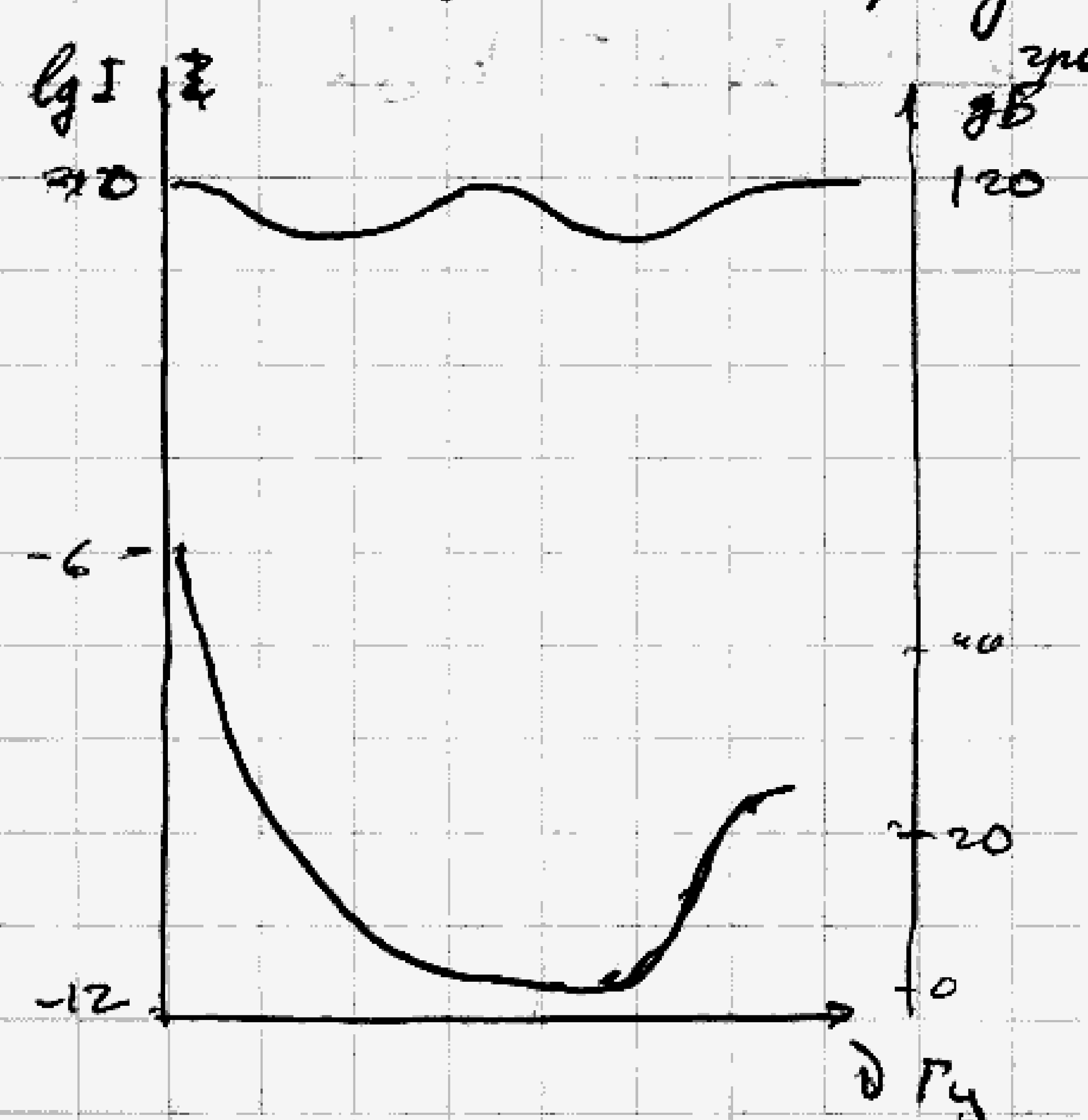
где $|\xi|$ – max – пучности смещения

## Интенсивность упругой волны

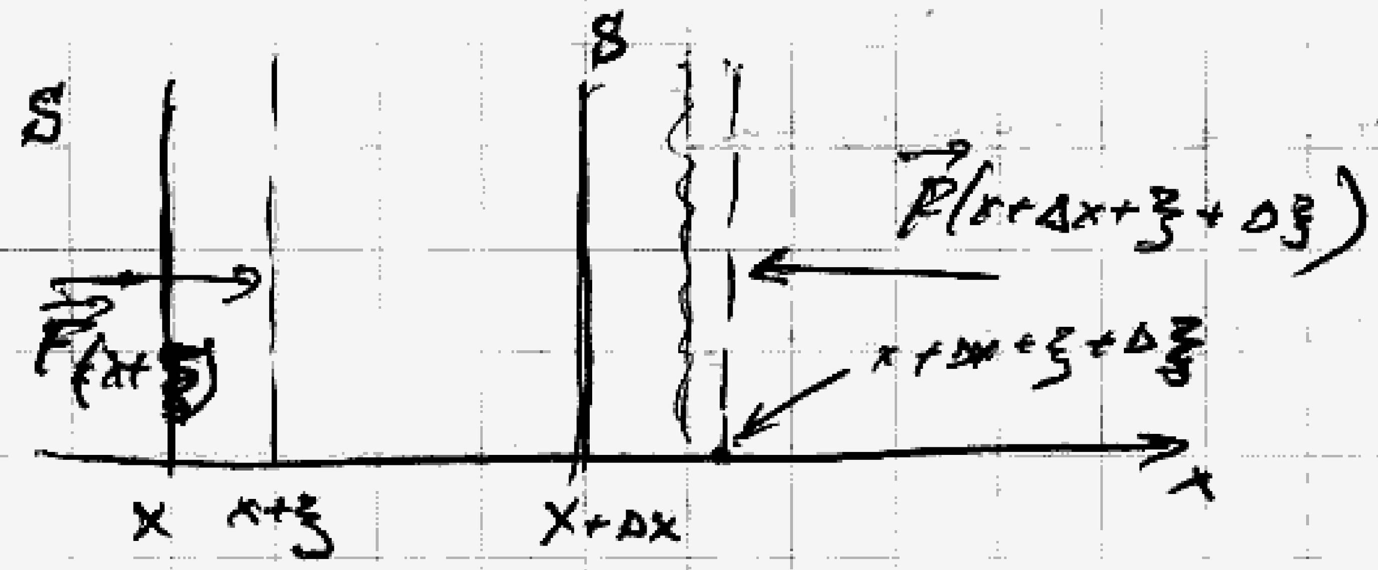
Интенсивность $I = \langle |\vec{j}| \rangle = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 v$

## Звуковые упругие незатухающие волны.

Возн. за счет наличия упругих сил между частицами среды




При распростр. звуковой волны процесс адиабат. сжат. или расш. газа. (малое время)




Ур-е движения $\quad \rho S \Delta x \cdot \xi''_{tt} = F_x(x) - F_x(x+\Delta x) \; \textcircled{=}$

$$|\xi + \Delta\xi| \ll \Delta x$$

$$\textcircled{=} \; S(\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)) \approx S\left(\Delta p(x) - \Delta p(x) - \frac{\partial \Delta p}{\partial x}\Delta x\right) =$$

$$= -S(\Delta p)'_x \cdot \Delta x \; \boxed{=}$$

$$p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma \text{ — невозмущ.}$$

$$\Delta p = \gamma p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma \frac{\Delta V}{V} \approx -\gamma p_0 \frac{V\xi'_x}{V} = -\gamma p_0 \xi'_x$$

$$\Delta V = S(x+\Delta x + \xi + \Delta\xi - x - \xi) \approx \overbrace{\cancel{S\Delta x(1+\xi'_x)}}^{S\Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x}}) = V\xi'_x$$

то

$$\boxed{=} \; p_0 \gamma S \xi''_{xx} \Delta x$$

т.о.

$$\rho S \Delta x \, \xi''_{tt} = p_0 \gamma S \xi''_{xx} \Delta x$$

$$\xi''_{tt} = \frac{\gamma}{\rho} p_0 \xi''_{xx}$$

$$\xi''_{tt} = v^2_{зв} \xi''_{xx}$$

$$v^2_{зв} = \frac{\gamma p_0}{\rho} = \frac{\gamma R T}{\mu} = \frac{\gamma k T}{\mu} \quad (\text{адиабат})$$

$$v^2_{Нь} = \ldots = \frac{p_0}{\rho} = \frac{RT}{\mu} = \frac{kT}{\mu}$$

Высота, тембр, громкость звука – самостоят.

21.02.06 Лекция №3

Дополнение к теме звуковые волны.

(1) $\Delta p = \gamma p_m \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

$\Delta p_m = \gamma p_m \xi_m k$

$\dfrac{\Delta p_m}{p_0} = \gamma^2 \xi_m \dfrac{2\pi}{\lambda} \ll 1$

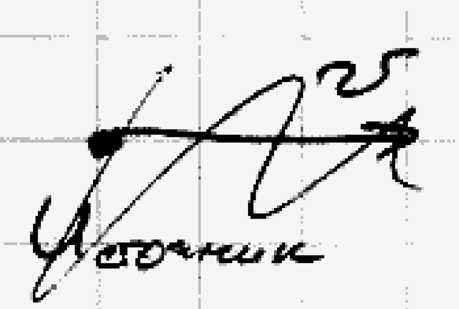
$\dfrac{\xi_m}{\lambda} \ll 1$

(2) $J = \langle | w \vec{v} | \rangle = \dfrac{\rho \xi_m^2 \omega^2}{2} v = \dfrac{\rho^2 \Delta p_m^2 \omega^2 v}{2\gamma^2 p_0^2 k^2 \rho} = \dfrac{\Delta p^2 v^2}{2\rho v^3} =$

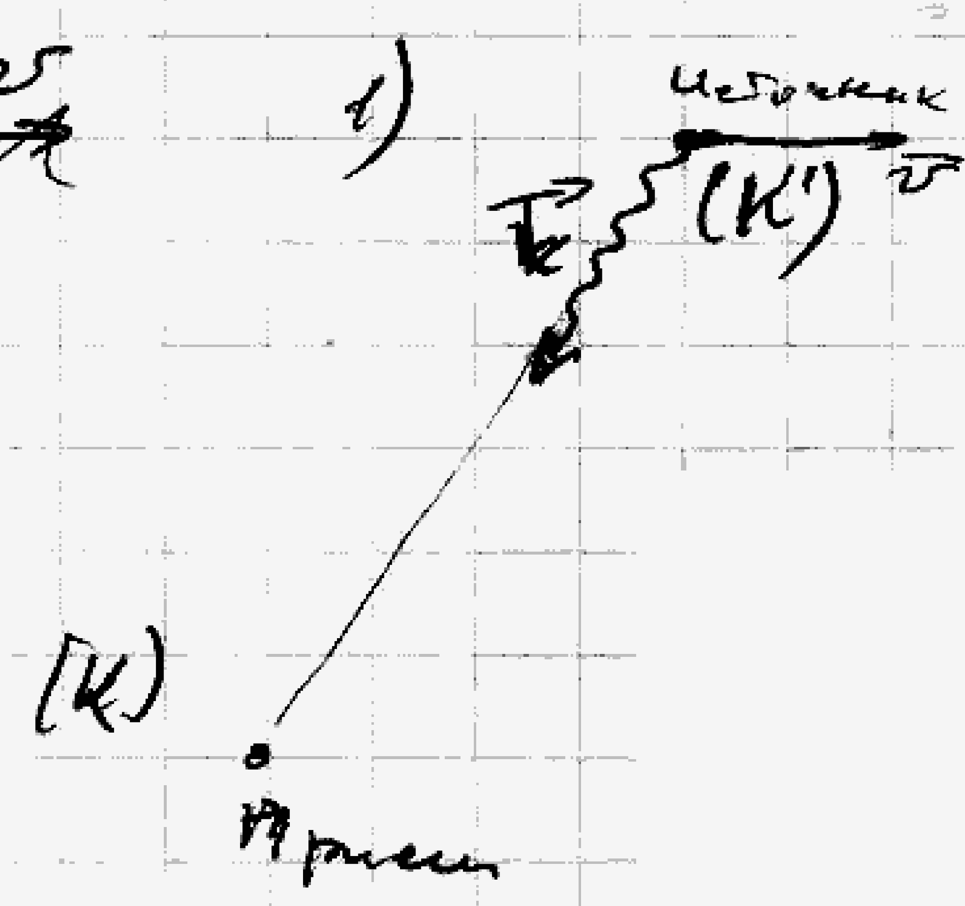
$= \dfrac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}$

Эффект Доплера

для звуковых волн.




1)




$K: \ \vec{\xi} \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)}$

$K': \ \vec{\xi} \sim e^{i(\omega' t - \vec{k}'\vec{r}' + \alpha')}$

$\vec{v}_и = const \quad 0 < \vec{v}_и < v_{зв}$

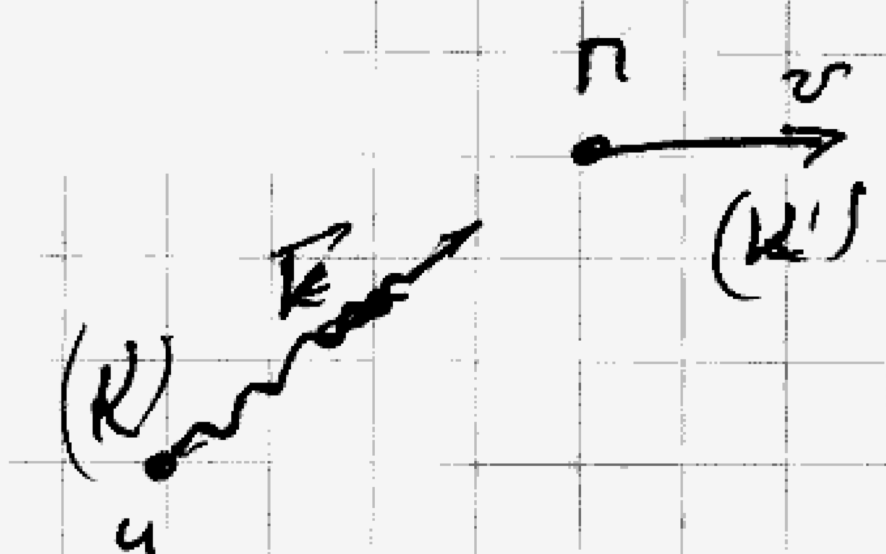
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' + \vec{v}_и \cdot t$

Т.О. $\underset{(\text{фаза})}{\varphi} \; : \; \omega_u t - \left(\vec{k}, (\vec{r}_0 + \vec{r}\,' + \vec{v}_п t)\right) + \ldots =$

$$= \omega_u t - (\vec{k}\,\vec{v}_п)\, t + \ldots \text{ нез от } t$$

$\varphi' \; : \; \omega_п t + \ldots$ нез от $t$

$$\omega_п \left(1 - \frac{(\vec{k}, \vec{v})}{v_{зв}}\right) = \underset{2\pi\nu}{\omega_u} \qquad \nu_п = \nu_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{e}_k, \vec{v}_п}{v_{зв}}\right)}$$




$$\varphi = \omega_u t - (\vec{k}, \vec{v}_п)\, t + \ldots$$

$$\varphi' = \omega_п t + \ldots$$

$$\omega_п = \omega_u \left(1 - \frac{(\vec{e}_k \vec{v}_п)}{v_{зв}}\right)$$

$$\nu_п = \nu_u \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}\right)}$$

$$\nu_п = \nu_u \cdot \frac{1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_u)}{v_{зв}}}{1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}}$$

# Электромагнитные волны.

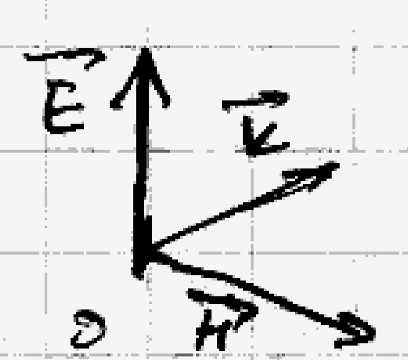
$$v^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad v^2 \Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

опр. Лапласа    лапласиан.

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}))} \qquad \vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}))}$$

$$[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-i[\vec{k}, \vec{E}_m] \cancel{e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}} = i\mu\mu_0 \omega \vec{H}_m \cancel{e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}}$$




$$\frac{H_m}{E_m} = \frac{k}{\omega\mu\mu_0} = \frac{1}{v\mu\mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}{\mu\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}$$

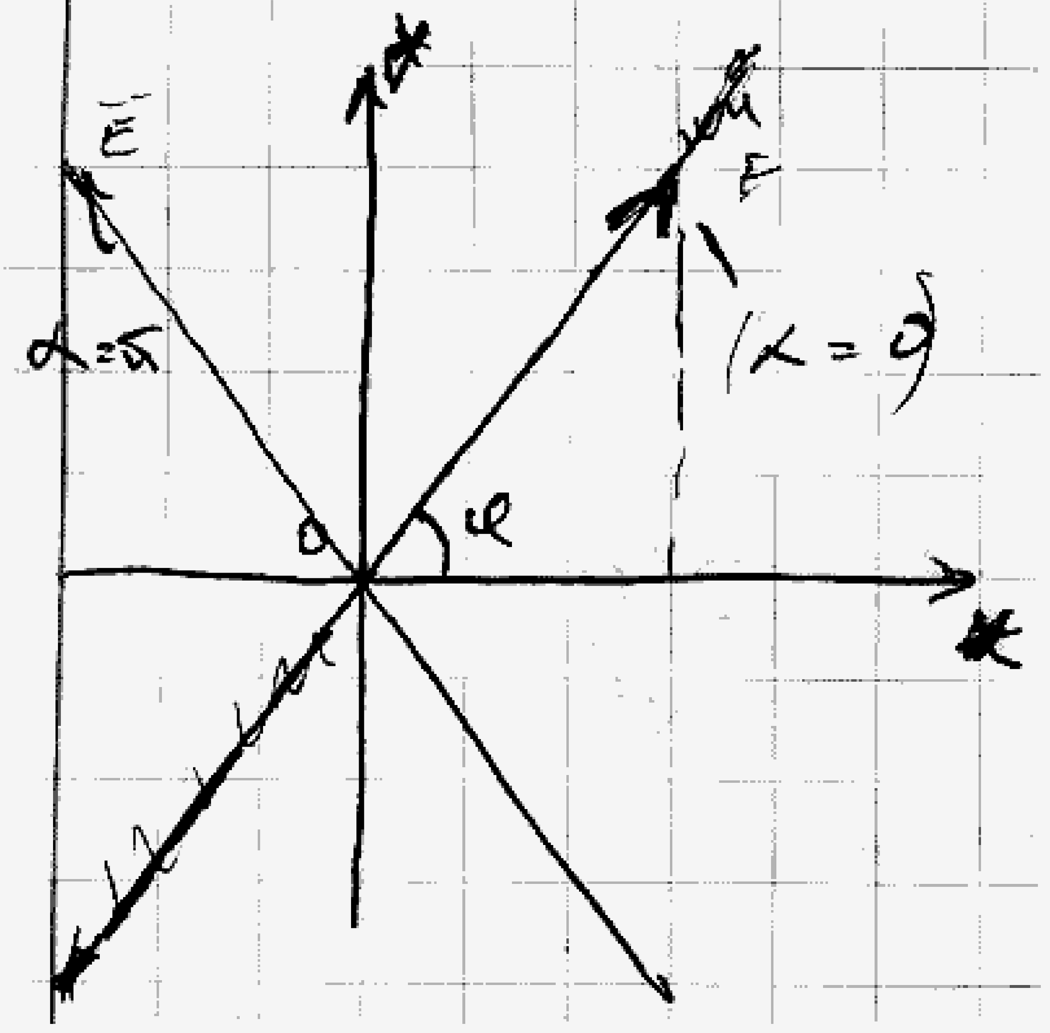
$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_m = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_m$$

Плоская поперечная волна

$$v = \frac{c}{n}$$

показат. преломл.    т.о. $n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1$

## Поляризация света





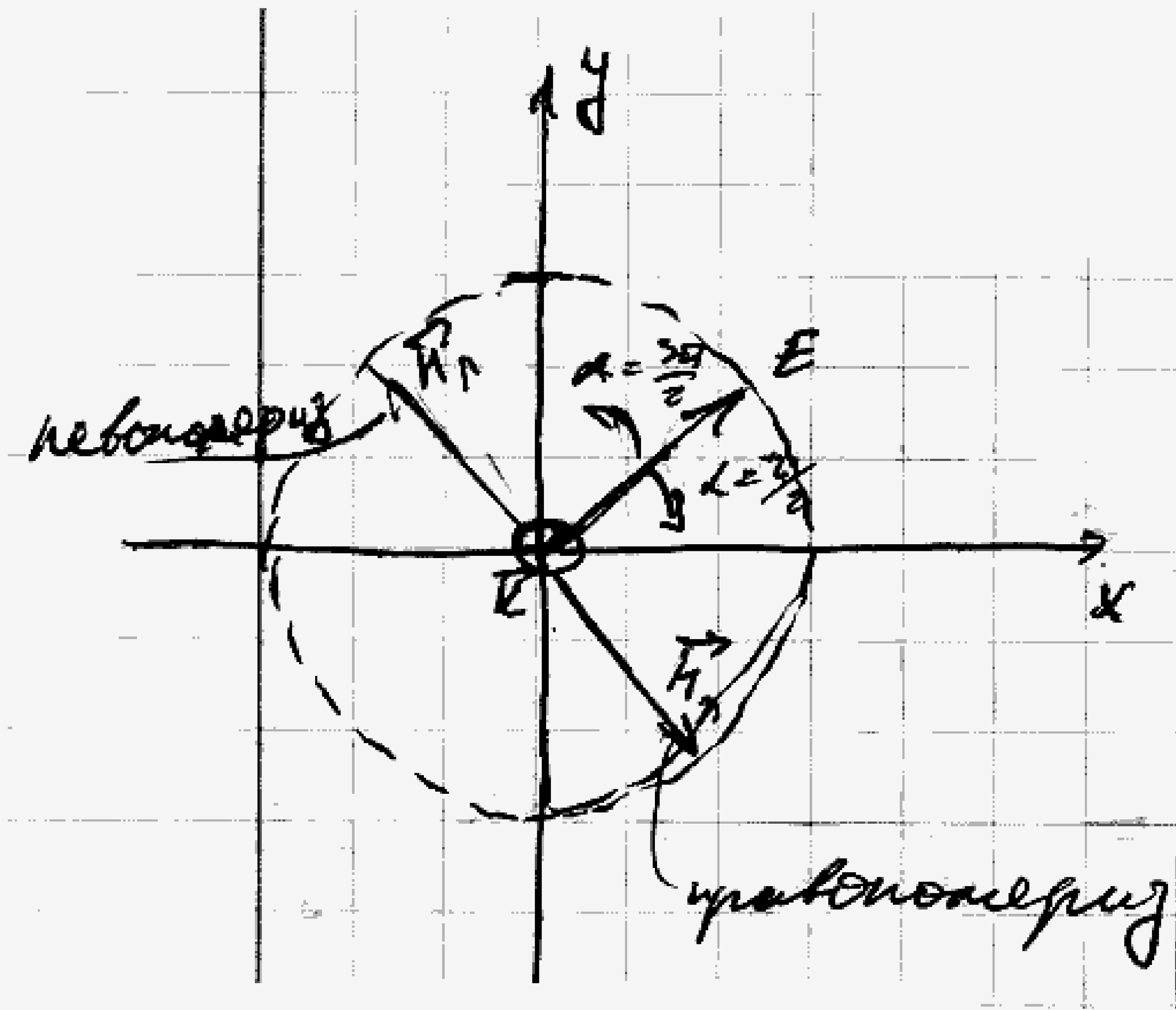
$$E_x = E_{mx} \cos\omega t \cdot \cos\varphi =$$

$$= E_{mx} \cos\omega t$$

$$E_y = E_m \cos(\omega t + \alpha) \cdot \sin\varphi =$$

$$= E_{my} \cos(\omega t + \alpha)$$

а) $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ – плоскополяриз





Рассм

б) $E_{mx} = E_{my}$

$\alpha = \pi/2$ , $\frac{3\pi}{2}$

круговые поляризация

в) $E_{mx} = E_{my}$ V $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

эллиптические поляриз.

Классические опыты

с электромагнитными волнами

(самостоят)

## Уравнение непрерывности

## (теорема Пойнтинга)

$$\begin{cases} \left( [\vec\nabla_E, \vec E], \vec H \right) = -\dfrac{\partial B}{\partial t}\cdot \vec H & (\ldots, \vec H) \\ \left( [\vec\nabla_H, \vec H], \vec E \right) = \left(\vec j + \dfrac{\partial \vec D}{\partial t}\right)\cdot \vec E & (\ldots, \vec E) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\vec\nabla_E, [\vec E, \vec H]\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t} w_H \\ -\left(\vec\nabla_H, [\vec E, \vec H]\right) = P_{уд.э} + \dfrac{\partial}{\partial t} w_E \end{cases} \Bigg| \ominus$$

$$\left(\vec\nabla, [\vec E, \vec H]\right) = -\frac{\partial}{\partial t} w_{H+E} - P_{уд.э}$$

$[\vec E, \vec H] = \vec S$ – вектор Пойнтинга $\quad \vec S \uparrow\uparrow \vec k$

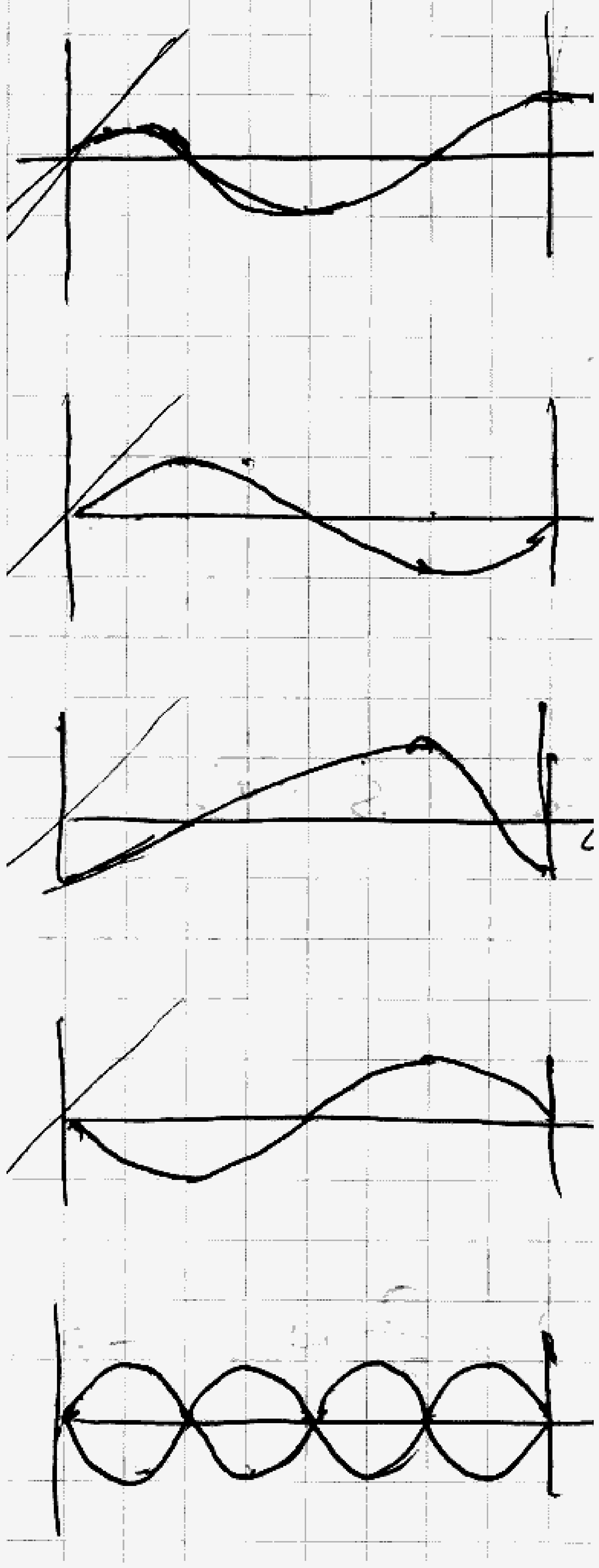
объемная плотн. энергии распростр. в напр. волны

$$\vec S = w_{H+E} \cdot \underbrace{\vec v}_{= c \text{ в вакууме}}$$

$$\left(\vec\nabla, \vec S\right) + \frac{\partial}{\partial t} w_{H+E} = -\underbrace{P_{уд.э}}_{\text{потеря энергии волной}}$$

# Стоячая электромагнитная волна.

$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad \vec{E}_{1m} = \vec{E}_{2m} = E_m$



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$

$= 2 E_m \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$

$k = k_n = \dfrac{\pi (n+1)}{\Delta}$

28.02.06.

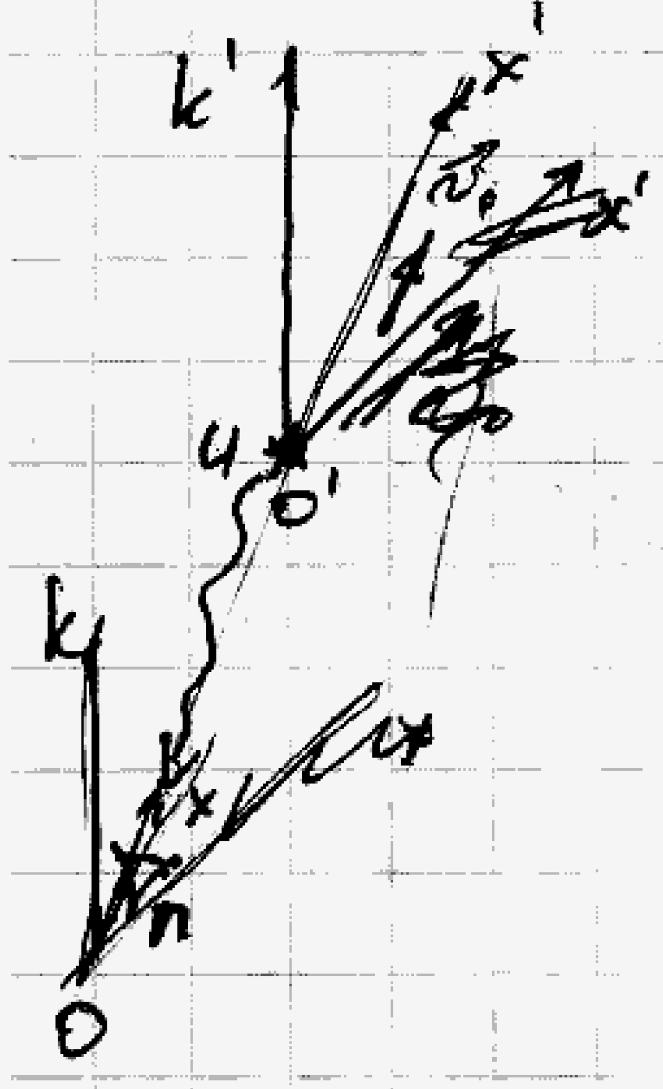
Лекция №

# Эффект Доплера для плоской электромагнитной волны.

(продольный эффект Доплера)

Рассм. две сист. отсчета

$k'_x > 0$ — "−"
$k'_x < 0$ — "+"
$\beta = \frac{v_0}{c}$




в $K$ $\quad \vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - k_x x)}$

в $K'$ $\quad \vec{E}' = \vec{E}_m e^{i(\omega' t' - k'_x x')}$

Фаза: $\omega' t' - k'_x x' = \omega' \dfrac{t - x\frac{v_0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - k'_x \dfrac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} =$

преобр. сист. Лоренц.

$$= \omega' t \frac{1 \pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dots$$

Сравниваем $\quad \omega t = \omega' t \dfrac{1 \pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

т.о. $\quad \omega = \omega' \dfrac{1 \pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \omega' \dfrac{1 \pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)}} =$

$$= \begin{cases} \omega' \sqrt{\dfrac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}}} & \text{для "+"} \\ \omega' \sqrt{\dfrac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}} & \text{для "−"} \end{cases} =$$

$$= \omega' \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v_0}{c}}{1 \mp \frac{v_0}{c}}} \approx \omega' \left(1 \pm \frac{v_0}{c}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega'} = \pm \frac{v_0}{c}$$

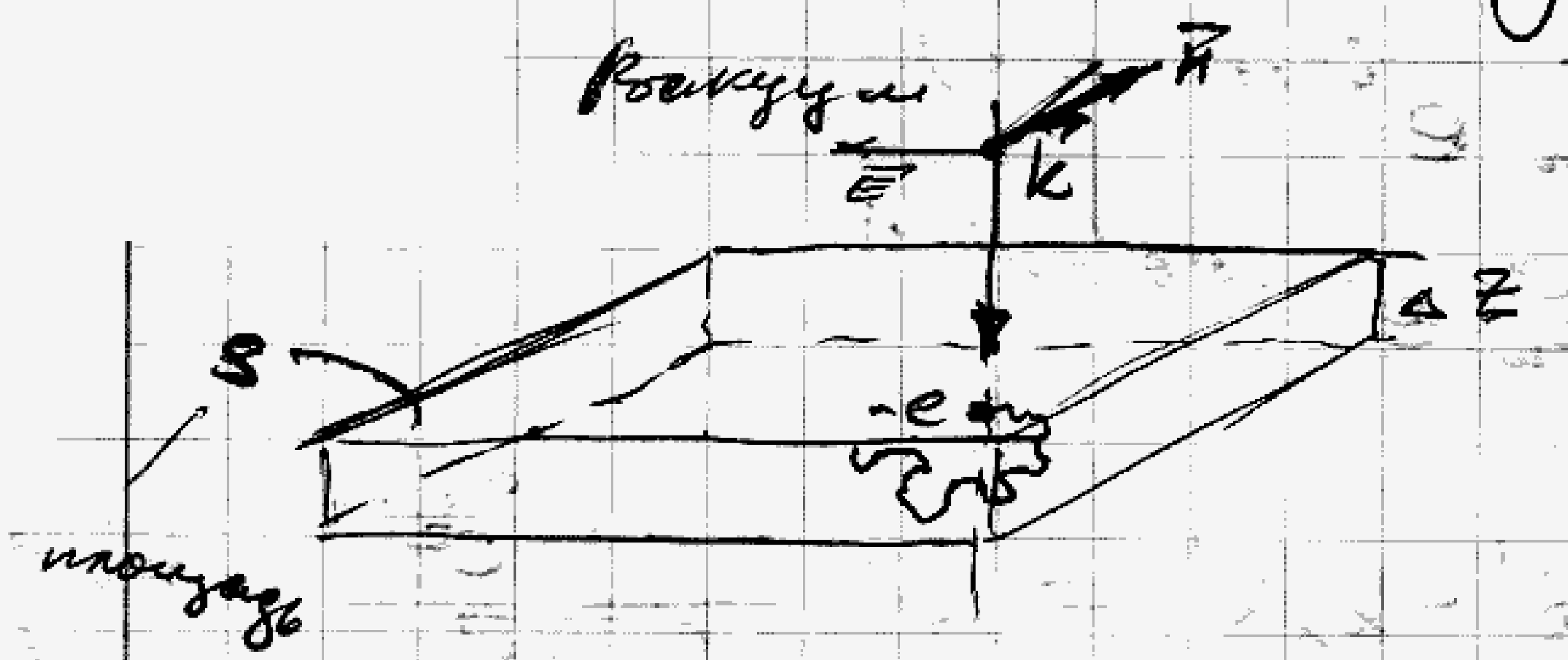
$\Delta\omega = \omega - \omega'$

красное смещение

Хаббл 1929 г. - красное смещение

Н поперечн.: $\omega = \omega' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

# Импульс и давление электромагнитной волны на стенку.




$$\vec j = \sigma \vec E$$

$$\Delta F = [\vec j, \vec B]\,\Delta V$$

$$\Delta W = (\vec j, \vec E)\,\Delta V \Delta t$$

в первый момент времени $\vec j \parallel \vec E$, $\vec j \perp \vec B$

$$\begin{cases} |\Delta F| = |[\vec j, \vec B]|\,\Delta V \\ |\Delta W| = |(\vec j, \vec E)\,\Delta V \Delta t| \end{cases}$$

B, E - амплит. зн.

$$\frac{\Delta F}{\Delta W} = \frac{jB\,\Delta V}{jE\,\Delta V \Delta t} = \frac{B}{E\Delta t}$$

a) $$\frac{\Delta F}{w\,\Delta z \cdot S} = \frac{B}{E \Delta t}$$

$v$ - скорость $\quad v = \frac{c}{n}$, $n$ - показ. преломл.

$$\frac{\Delta F}{S} = p_{давл} = \frac{\mu\mu_0 H}{E}\,\underbrace{\frac{\Delta z}{\Delta t}}_{скор}\cdot w$$

т.о. $$p_д = \frac{\mu\mu_0 H}{E} w \cdot v = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E}{\sqrt{\mu\mu_0}\,E}\, w v =$$

$$= w v \underbrace{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}_{=\frac{1}{v}} = w \frac{v}{v} = w$$

т.о. $p_g = w = \frac{|S|}{v}$

Считаем, что вся энергия поглощается.

if Без отражения $\underset{\text{отр.}}{\tau} + \underset{\text{погл}}{\rho} = 1$

$p_g = w(2-\tau) = w(\rho+1)$

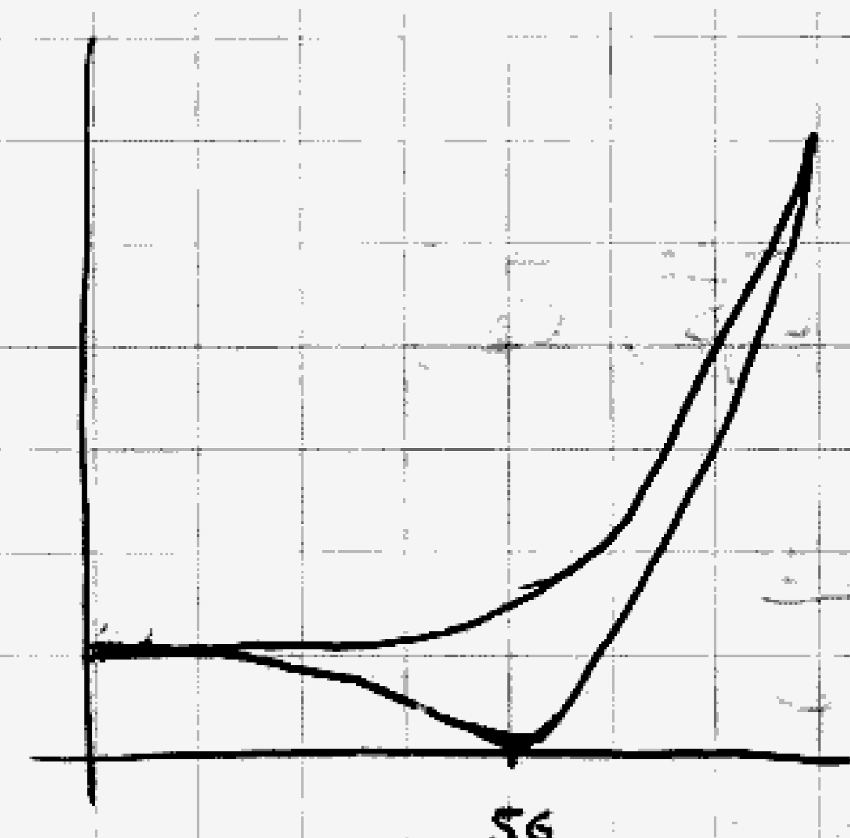
т.о.

if $\underset{\text{угол пад}}{\theta} \neq 0 \Rightarrow p_{g\theta} = w(\rho+1)\cos\theta$

б) $\frac{\Delta p_{мех}}{\Delta t, w\Delta z S} = \frac{B}{E\Delta t}$

$\left(\frac{\Delta p_u}{\Delta V} = \frac{w}{v} = \frac{S}{v^2}\right.$

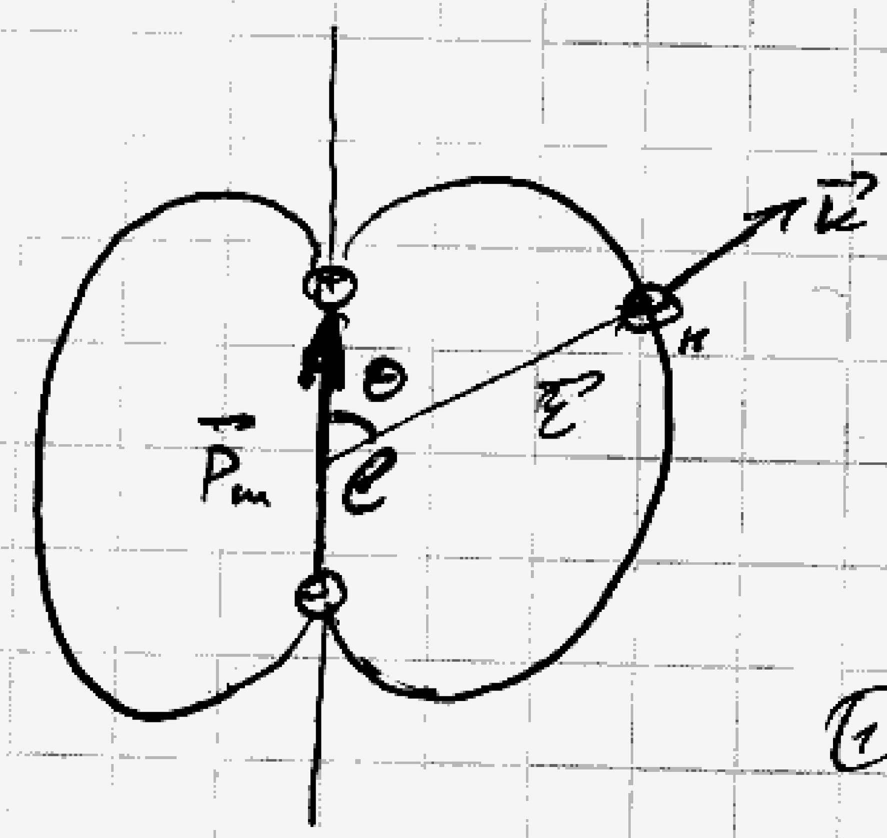
$k = \frac{S}{v^2}$




Бутиков „Оптика"

# Излучение колеблющегося диполя

$\vec{p} = \vec{p}_m \cos\omega t$




$[\nabla, \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$[\vec{k}, \vec{H}] = \omega E$

$\mu, \varepsilon = 1$

① $\vec{E} = \frac{k}{\omega}[\vec{H}, \vec{e}_r] = \frac{1}{c}[\vec{H}, \vec{e}_r]$

② $\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r] \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]$

$S = [\vec{E}\vec{H}]$

7.03.06

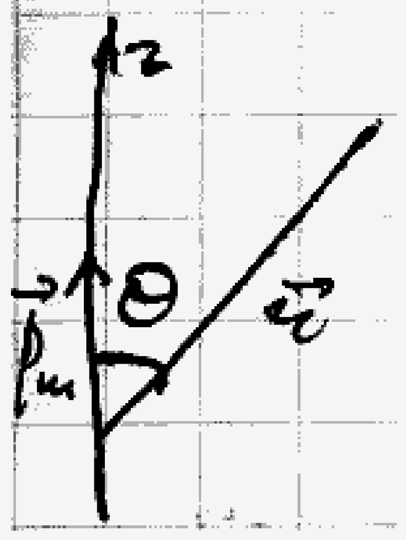
## Лекция №

$\vec{E} = \frac{1}{c\varepsilon_0}[\vec{H}, \vec{e}_r]$, $\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]$

т.о. $\vec{H} = \frac{[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^3 r}$

$[\vec{E}, \vec{H}] = S = \frac{1}{c\varepsilon_0}[[\vec{H}, \vec{e}_r], \vec{H}] = \frac{H^2 \vec{e}_r}{c\varepsilon_0}$

$\ddot{\vec{p}} = -\vec{p}_m \omega^2 \cos\omega t$




$$\vec H = \vec H_m \left(\frac{r_0}{r}\right) \sin\theta \cos\omega t$$

$$\vec E = \vec E_m \left(\frac{r_0}{r}\right) \sin\theta \cos\omega t$$

$r_0$ – расст. на кот. амплитуда $E_m (H_m)$

при $r \gg \lambda$, $r \gg l$ (Волновая зона)

Мощность, излучаемая диполем

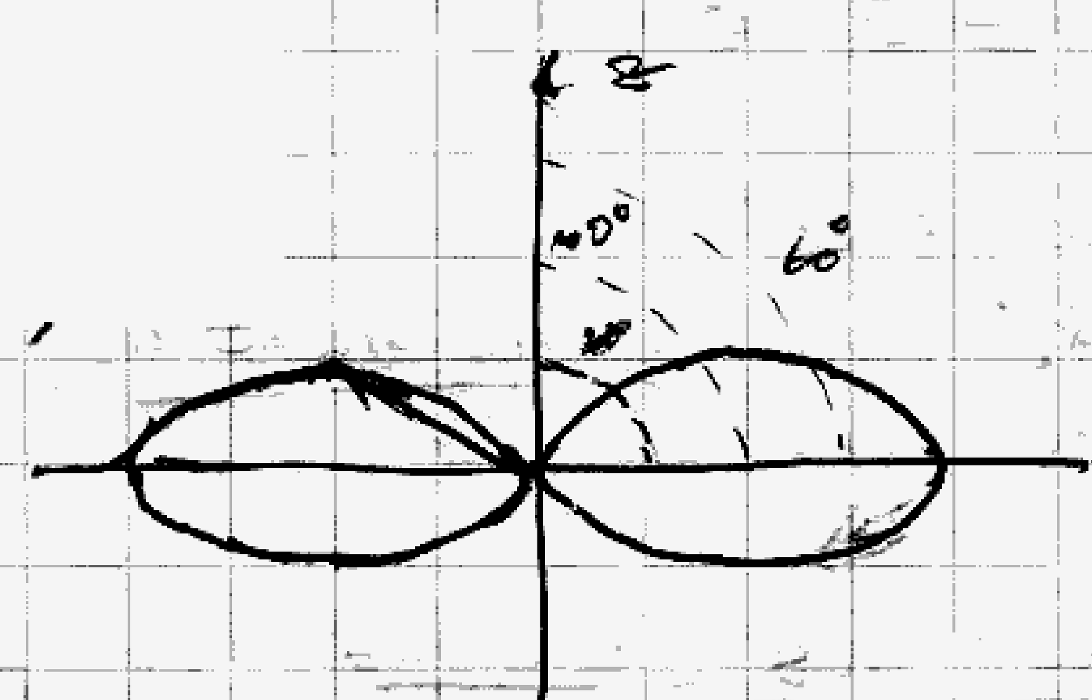
$$P = \oint_S \langle|\vec S|\rangle \, dS = \frac{p_m^2 \omega^4 \overbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt}^{T/2} \; r^2 \overbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta}^{4/3} \int_0^{2\pi} d\varphi}{c^3 \varepsilon_0 (4\pi)^2 r^2 T} =$$

S – площадь

$$= \frac{p_m^2 \omega^4 \, 4 \cdot 2\pi}{16\pi^2 \cdot 2 \cdot 3 \varepsilon_0 c^3} = \frac{p_m^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$

т.о. $|\vec S| \sim \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \cos^2\omega t$

Диаграмма излучения диполя



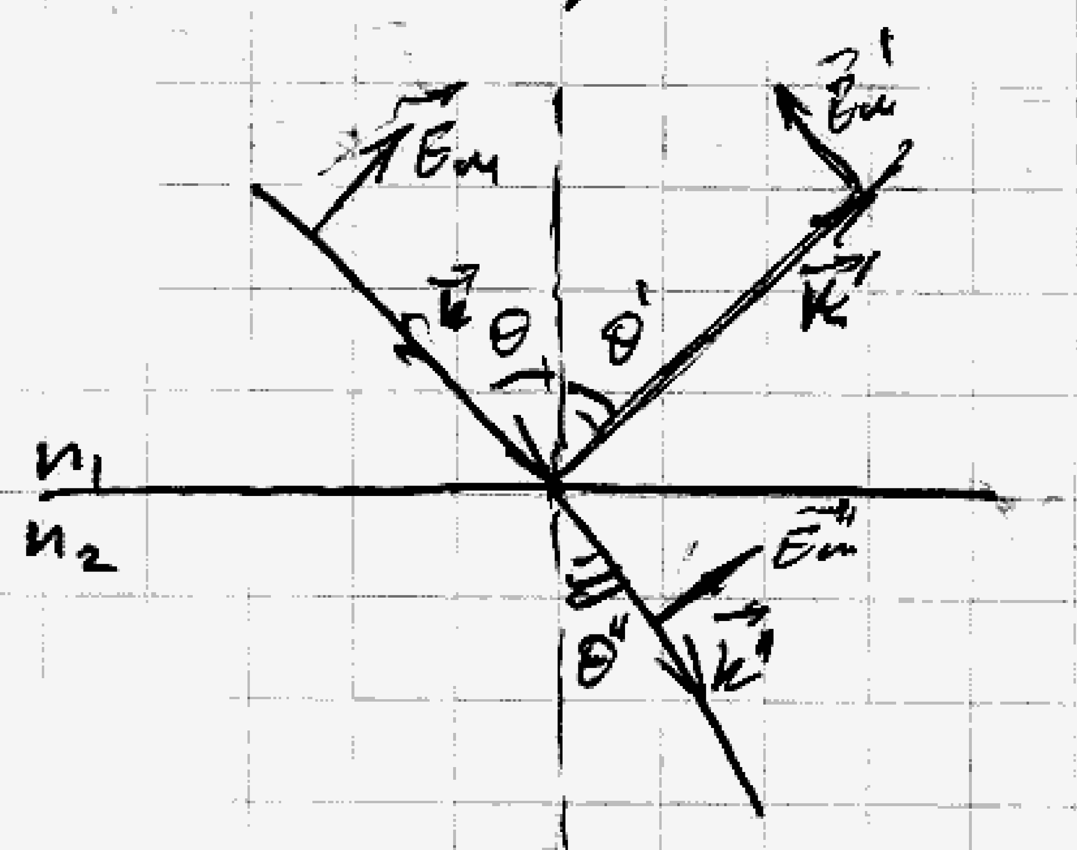
Закон рассеяния Релея

$$P \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$$ ускоренно движ. зар. частица, излучают

Излуч. Вавилова - Черенкова. $v \geq \frac{c}{n}$

З-н. отражения и преломления эл.магн. волн

а) коэф. отражения и пропускания волны ~~для~~ на идеальной границе двух диэлектриков (~~для плоской волны~~)




$$I \sim \frac{|\vec{E}_m|^2}{2} = \frac{E_m^2}{2}, \quad \frac{\vec{E}_m \cdot \vec{E}_m^*}{2}$$

исключение нет

$$\hat{\vec{E}}_m e^{i(\omega t - k_x x)} + \hat{\vec{E}}_m' e^{i(\omega' t - k_x' x)}$$

$$\cancel{+ \vec{E}_m'' e} = \hat{\vec{E}}'' e^{i(\omega'' t - k_x'' x)}$$

(сшиваем)

1) $\omega = \omega' = \omega''$

2) $k_x = k_x'$ $\Rightarrow \frac{\omega \sin\theta\, n_1}{c} = \frac{\omega \sin\theta' n_1}{c}$

3) $k_x = k_x''$

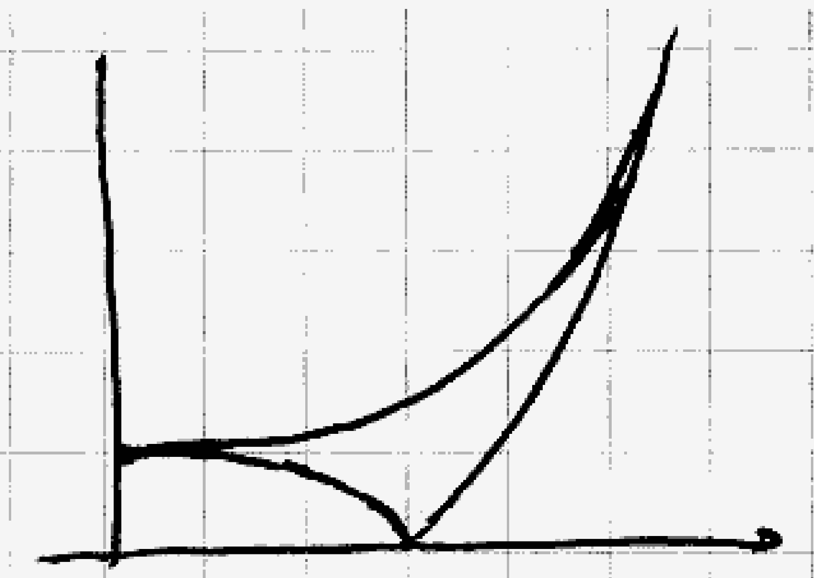
$$\frac{\omega n_1 \sin\theta}{c} = \frac{\omega n_2 \sin\theta''}{c} \qquad \theta' = \theta''$$

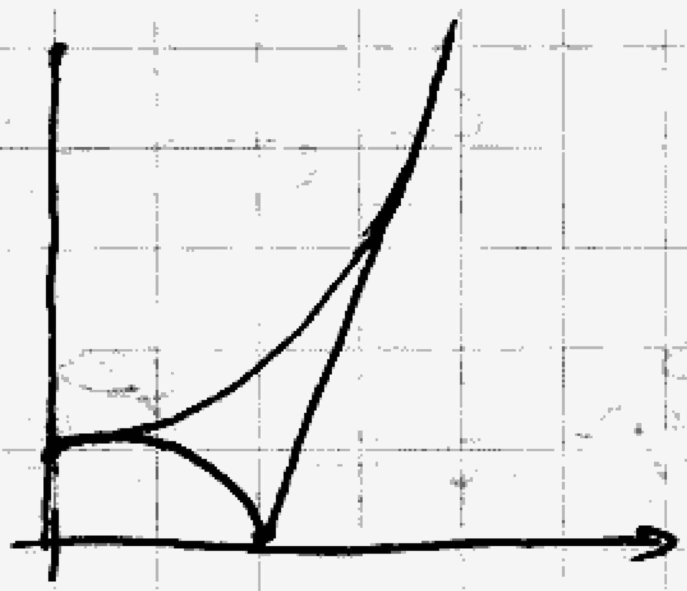
$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n$$

$\sin\theta'' = 1 \Rightarrow \sin\theta = n$

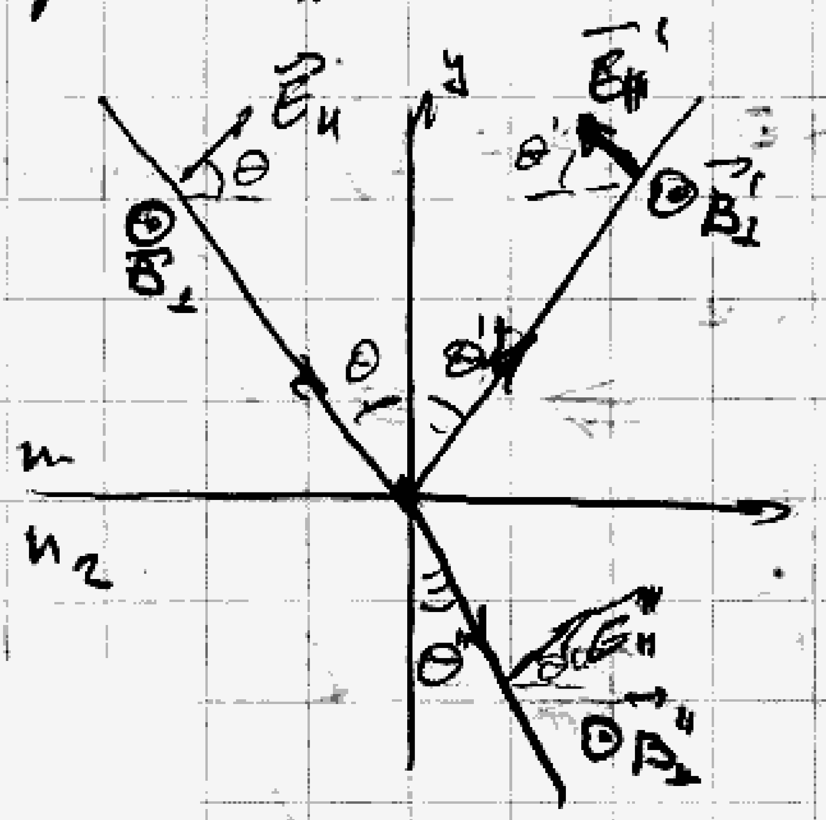
б) з-на для поперечных волн.

$\vec E = \vec E_\parallel + \vec E_\perp$ (Формулы Френеля)





б') $\vec E = \vec E_\parallel$



$\vec B = \vec B_\perp$

$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$

$E\cos\theta - E'\cos\theta' = E''\cos\theta''$

if $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow B_{\tau_1} = B_{\tau_2}$ т.о. $B + B' = B''$

$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \Rightarrow B = \frac{\alpha}{n_1}E$ $\quad B' = \frac{\alpha}{n_1}E'$

$\frac{\alpha}{n_2}E + \frac{\alpha}{n_2}E' = \frac{\alpha}{n_1}E'' \Rightarrow E'' = \frac{n_2}{n_1} = n\,(E + E')$

$n(E\cos\theta + E'\cos\theta')$ $\quad E = E'\cos\theta''$

$E(n\cos\theta - \cos\theta') = E'(n\cos\theta' + \cos\theta'')$

$\frac{E'}{E} = \frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta + \cos\theta''}$

$$\frac{\sin\theta\,\cos\theta - \cos\theta''\sin\theta''}{\sin\theta} > 0$$

# 14. 03. 06

## Лекция №6

## Формулы Френеля

$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}$

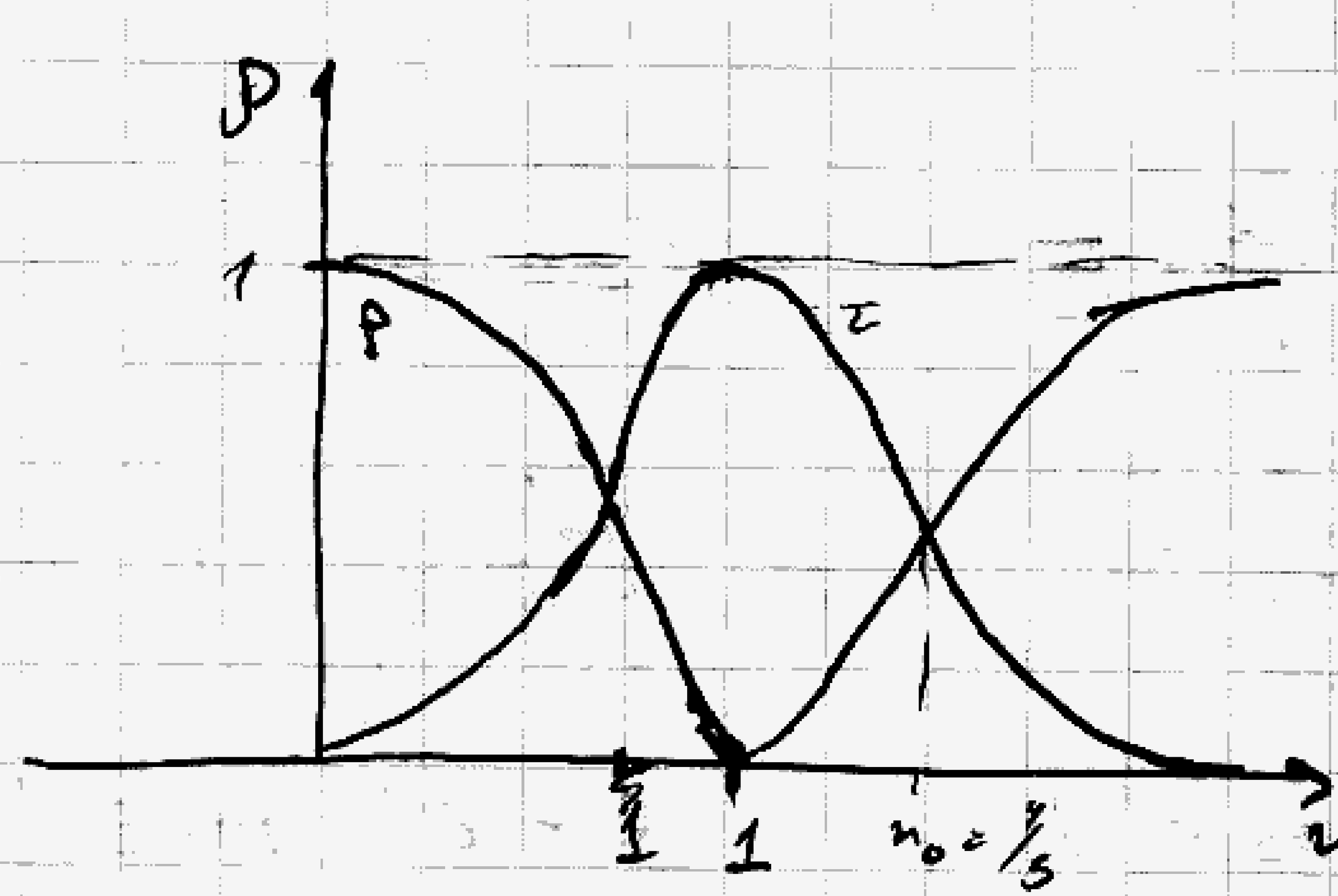
Более оптически плотная среда

$$\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta' + \cos\theta''} \begin{cases} > 0 \quad (n > 1) \to \Delta\varphi = \pi \\ < 0 \quad (n < 1) \to \Delta\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \left(\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}\right)^2 = \left(\frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta' + \cos\theta''}\right)^2 \Rightarrow \theta = 0$$

котор. отраж.

$$\theta' = \theta'' = 0 \Rightarrow \rho_{\parallel}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad \tau_{\parallel} = 1 - \rho_{\parallel} = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$$




$$\rho_{\parallel} = 0: \quad n\cos\theta - \cos\theta'' = 0$$

$$n\sin\theta'' - \sin\theta' = 0$$

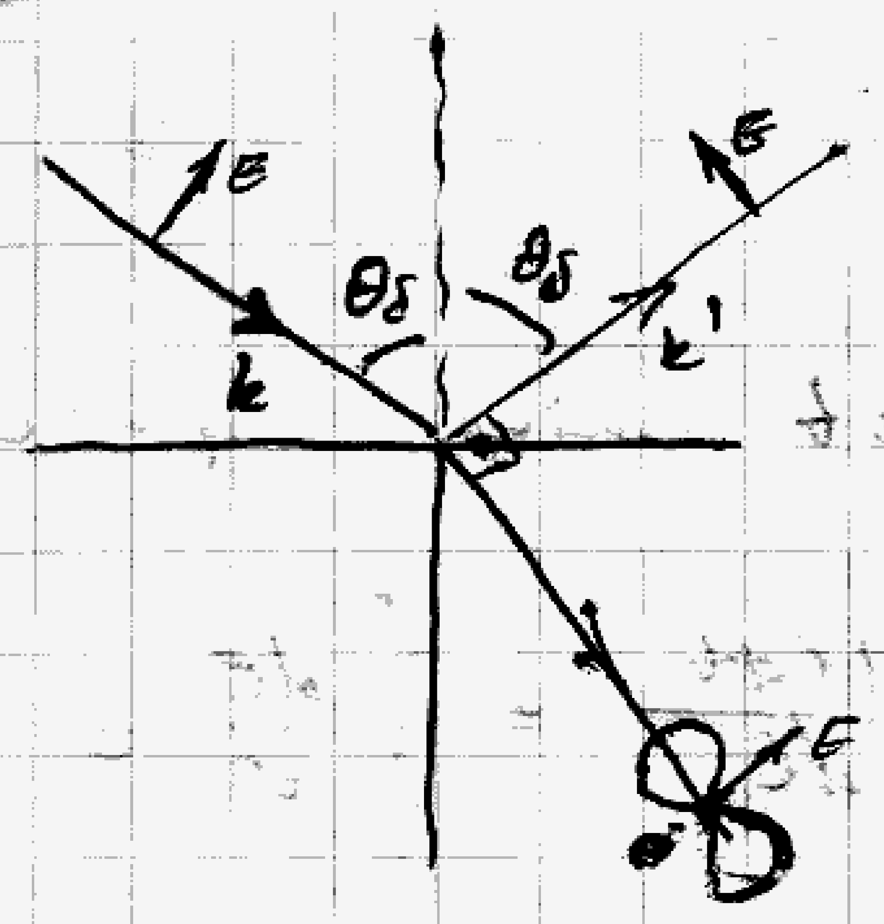
Угол Брюстера.

з-н преломл.

(при сохр. поляризации отражение отсутствует)

$$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \qquad \theta'' = \frac{\pi}{2} - \theta \to n\cos\theta = \sin\theta$$

т.о. $\operatorname{tg}\theta_Б = n$

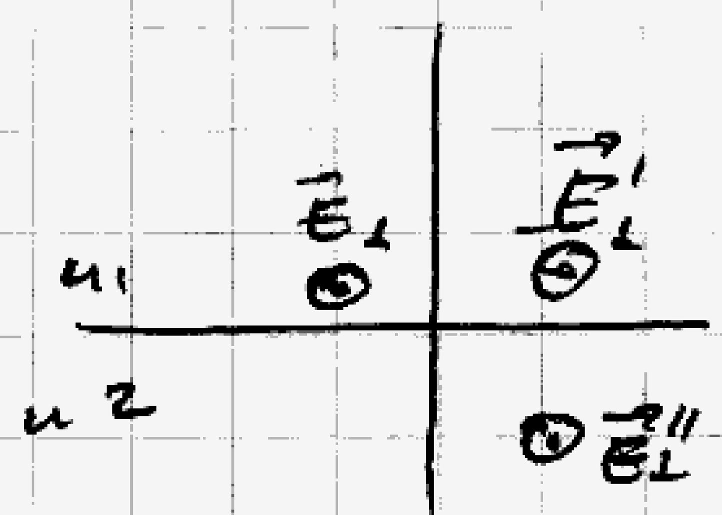



$$\vec E = \vec E$$

$$\frac{\vec E'_\perp}{E_\perp} = \frac{-n\cos\theta'' - \cos\theta}{n\cos\theta'' - \cos\theta}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \rho_\perp = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

угол Брюстера отсутств.




$$\begin{cases} n > 1 & \Delta\varphi = \pm\pi \\ n < 1 & \Delta\varphi = 0 \end{cases}$$

# Геометрическая оптика и фотометрия

## принцип Гюйгенса


каждая точка пов. достиг. волн. фронт, является источником вторичных сферических волн

т.о. волна огибает препятствие

## параметр Френеля

$$\frac{b^2}{L\lambda}$$

парам. Френеля

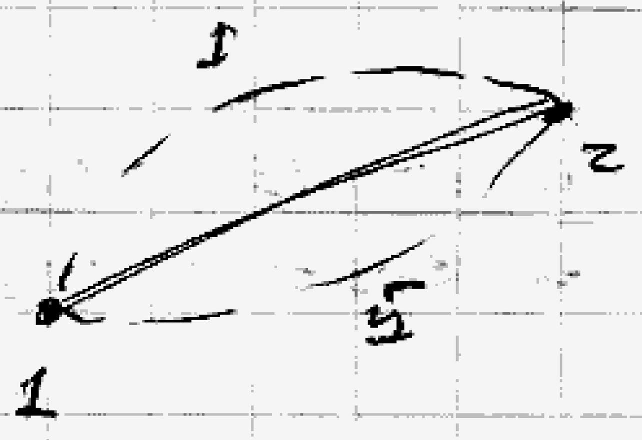
$b$ – размер препятствия

$L$ – расстояние до объекта

$\lambda$ – длина волны

if $\dfrac{b^2}{L\lambda} \gg 1$ имеет место геом. оптика

Принцип Ферма.



$$\tau_{1,2} = \int_1^2 dt = \min$$ if $n = const$

$$\tau_{12} = \int_1^2 \frac{dl\,dt}{dl} = \int_1^2 \frac{dl}{v} =$$

свет распрост. по траектории с миним. временем

$$= \frac{1}{c}\int_1^2 n(l)\,dl = \min$$

$$n(l)\,dl = ds \qquad \int_1^2 ds = s_{12}$$

Таутохронные лучи $\quad \tau_{12}^{I} = \tau_{12}^{II}$

Идеальная центрированная оптическая система

(центр - оптическая ось)

$H$ и $H'$ - главные плоскости: коэф увеличения между гл. плоскостями одинаковой $\frac{y}{y'} = 1 = \beta$

Узловые плоскости $N$ и $N'$

сопряженные лучи имеют один и тот же угол по отношению к оптической оси

$F$ и $F'$ - фокальные пл-ти: Пар. лучи попад на след. пересекаются в этих пл-тях

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \Rightarrow -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} > 1$$

+ для точки справа

− для точки слева

## Формула Ньютона

$\frac{y}{-y'} = \frac{x}{f}$ (слева) ; $\frac{y}{-y'} = \frac{x'}{f'}$ (справа)

$s = x + f \Rightarrow x = s - f \rightarrow$ $\quad xx' = ff'$

$s' = x' + f'$; $x' = s' - f' \rightarrow$

$$(s+f)(s'+f') = ff' \Rightarrow \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

## Интерференция монохроматических плоских волн

Без. когерентности

Когерентность – согласованность колеб в волне и эффекты, что к этому приводят

Природные источники света некогерентны

Интерференция – перераспределение интенсивности волн (не связано с нарушением з-на сохр. эн.)

обычно наб. разл. от дискретного ряда источников

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{1m}\cos(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r} + \alpha_1) + \vec{E}_{2m}\cos(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r} + \alpha_2)$$

$$I \sim \langle (\vec{E})^2 \rangle = \langle \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \frac{2}{2}(\vec{E}_{1m}\vec{E}_{2m})\Big(\cos\big(\underbrace{(\omega_1+\omega_2)t + (\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1+\alpha_2}_{0}\big) + \cos\big(\underbrace{(\omega_1-\omega_2)t + (\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1-\alpha_2}_{\delta}\big)\Big)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varkappa \cos\delta$$

$$\delta = (\omega_1 - \omega_2)t + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1 - \alpha_2$$

21.03.06

Лекция №

Л.Д. Горбачёв „Элементы волновой оптики. Распространение света"

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varkappa \langle\cos\delta\rangle_{\text{прибора}}$$

$$\delta = |\Delta\omega|\cdot t + k(r_1 - r_2) + \Delta\varphi$$

1) if $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ то $I = I_1 + I_2$ - нет интерференции

2) $\varkappa \neq \frac{\pi}{2}$, $\varkappa = 0$ $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

а) $0 \leq \delta \leq \pi$ $\quad -1 \leq \cos\delta \leq 1$ случайно

$\langle\cos\delta\rangle_{t_{\text{приб}}} = 0 \Rightarrow I_\Sigma = I_1 + I_2$ нет интерф.

б) $\Delta\omega \neq 0$ время когерентности - время за которое фаза

$$|\Delta\omega| t \leq \pi$$

$$\Delta\tau_{\text{ког}} \leq \frac{\pi}{|\Delta\omega|} = \frac{\pi}{2\pi c\left|\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right|} = \frac{\lambda^2}{2c|\Delta\lambda|}$$

if $\lambda_1 \approx \lambda_2$ то $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2_{\text{средн}}$

длина ког - длина на кот волны приобретают соотв. max фазу $\pi$

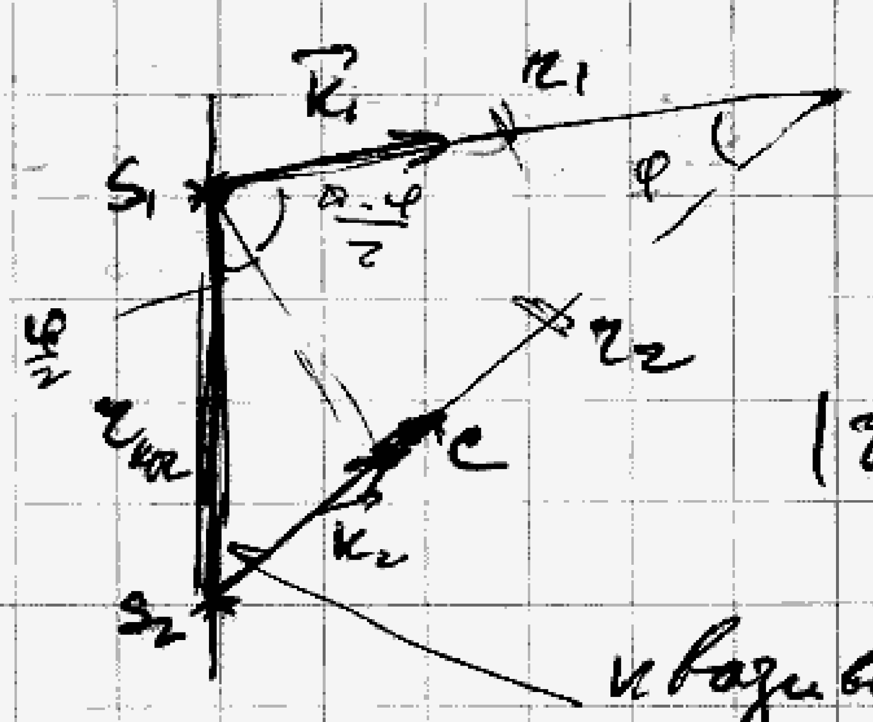
$$l_{ког} = c\,\tau_{ког} = \frac{\lambda^2}{2|\Delta\lambda|}$$

$$\tau_{приб} \gg \tau_{ког}$$

в) $\Delta\omega = 0$

$\Delta\varphi = 0$

$k|r_1 - r_2| \le \pi$ для сфер.




$[S_2C] = r_{ког}\sin\frac{\varphi}{2}$

$\| \quad |r_1 - r_2|$

$\varphi \ll 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\, r_{ког}\sin\frac{\varphi}{2} \le \pi$

квазиволновые поверхности $\lambda_{S_1} = \lambda_{S_2}$

$\cancel{\tau_{ког}}$ $\quad r_{ког}\,\varphi \le \lambda$

$\boxed{r_{ког} \le \frac{\lambda}{\varphi}}$ — усл. для расстояния между ист. на квазиволновой пов.

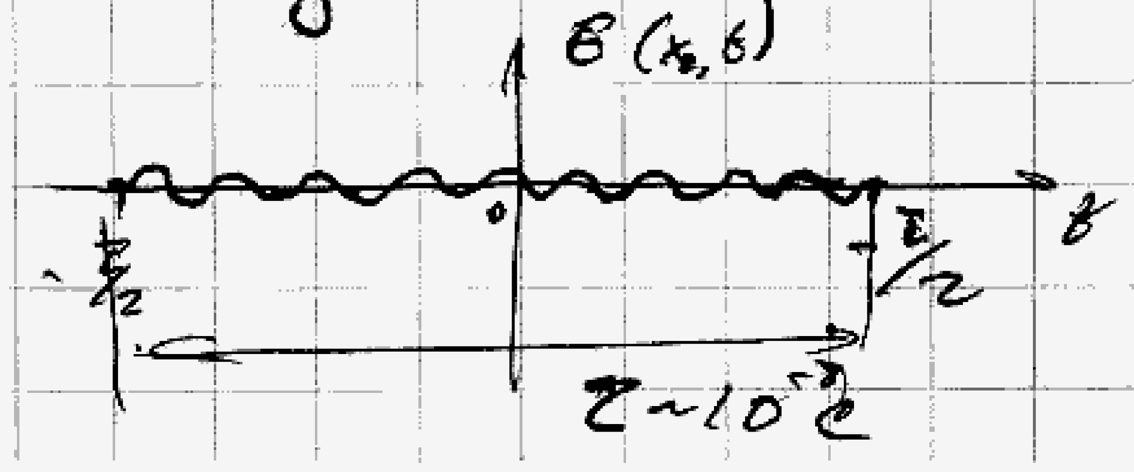
Для солнца $\varphi = 0{,}01$ рад, $\lambda = 500$ нм $\quad r_{ког} = \frac{500\cdot10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}05$ мм

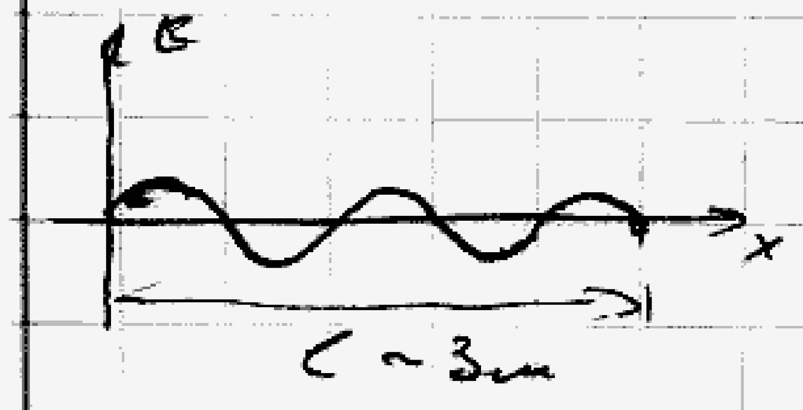
Для лазера $\tau_{ког} = 10^{-3} \div 10^{-4}$ с

естеств. ист. $\tau_{ког} \sim 10^{-8}$ с.

## Волновой цуг

т.к. отд. атом изл. за время $\sim 10^{-8}$ с, то вв естеств. ист. длина волн. ц. (отрез. вр. жизни атома) оказывается $\sim 3$ м






$$E(t)=\begin{cases}0, & |t|\geq \frac{\tau}{2}\\ E_0 e^{i\omega_0}, & |t|<\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$E(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

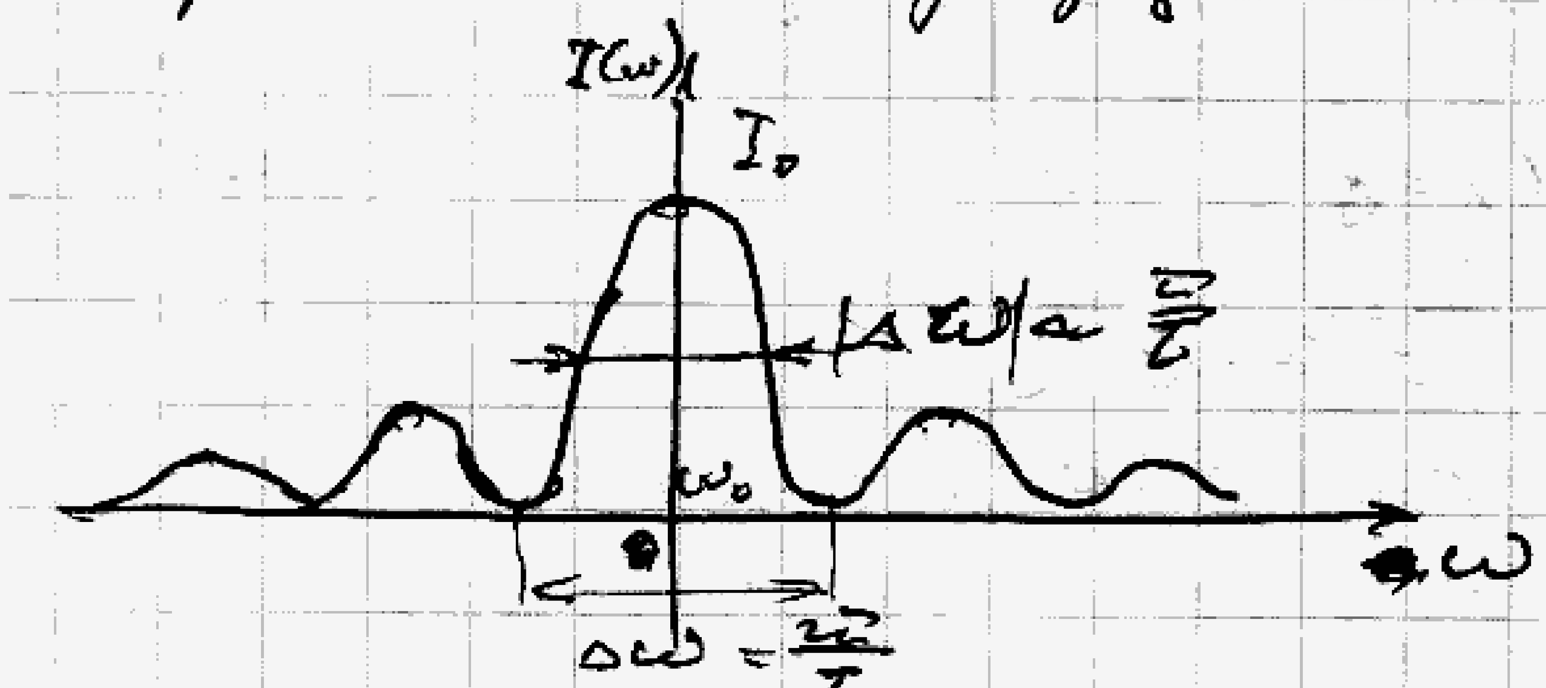
$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=\frac{E_0}{2\pi}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0-\omega)t}\,dt=$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{2E_0\tau}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}-e^{-i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}}{2i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}$$

$$\approx\frac{\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_0-\omega}{2}\tau}$$

$I\sim E^2(\omega)$ $\qquad$ $$I=I_0\,\frac{\sin^2\left(\Delta\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\left(\Delta\omega\cdot\frac{\tau}{2}\right)^2}$$

огр. посл-ть возмущений




$$\frac{\Delta\omega\tau}{2}=\pi$$

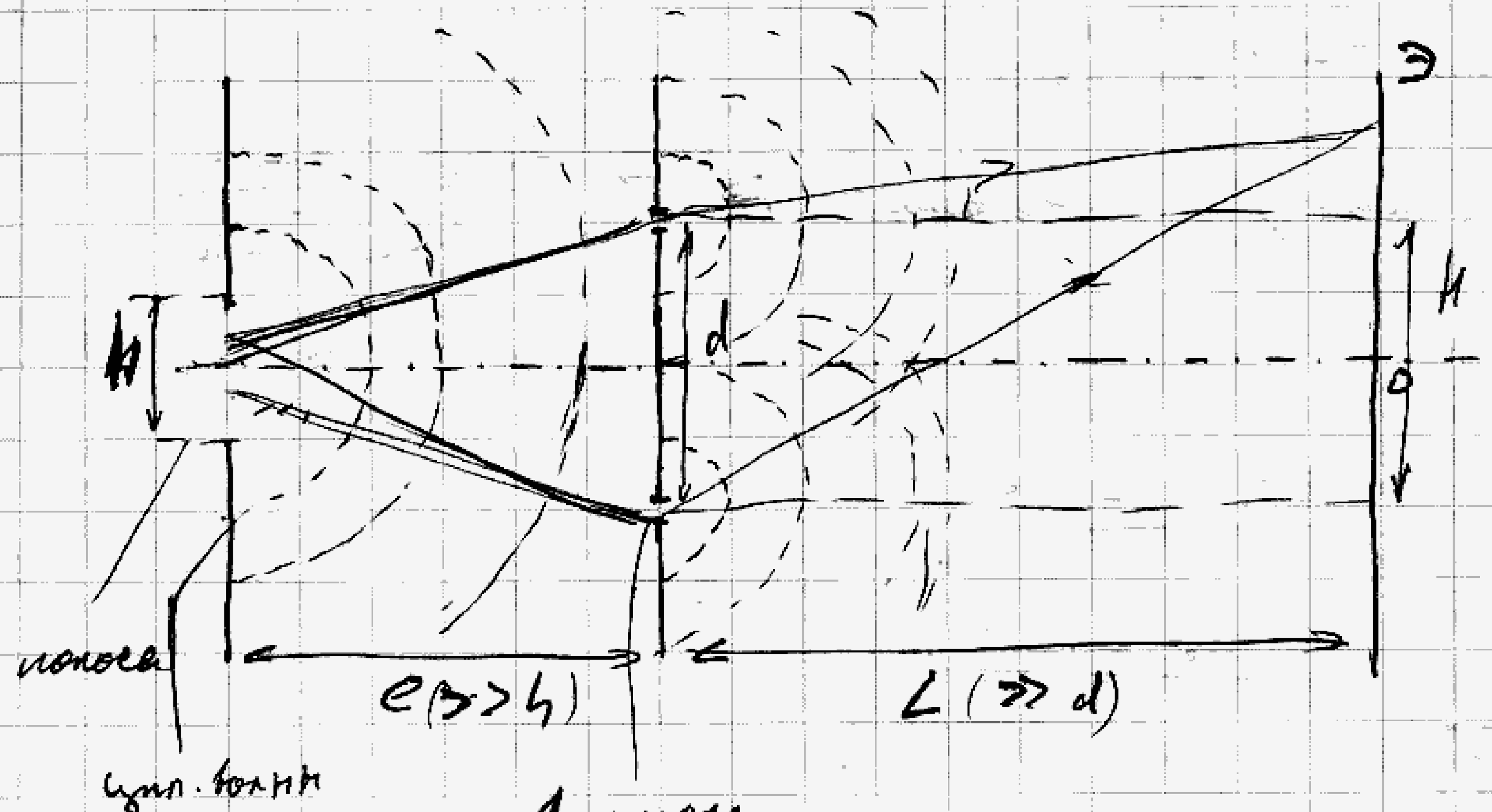
полуширина — ширина max на полувысоте

$$\tau_{ког}\sim\tau\sim\frac{\pi}{|\Delta\omega|}$$

Способы получения

интерференционной картины.

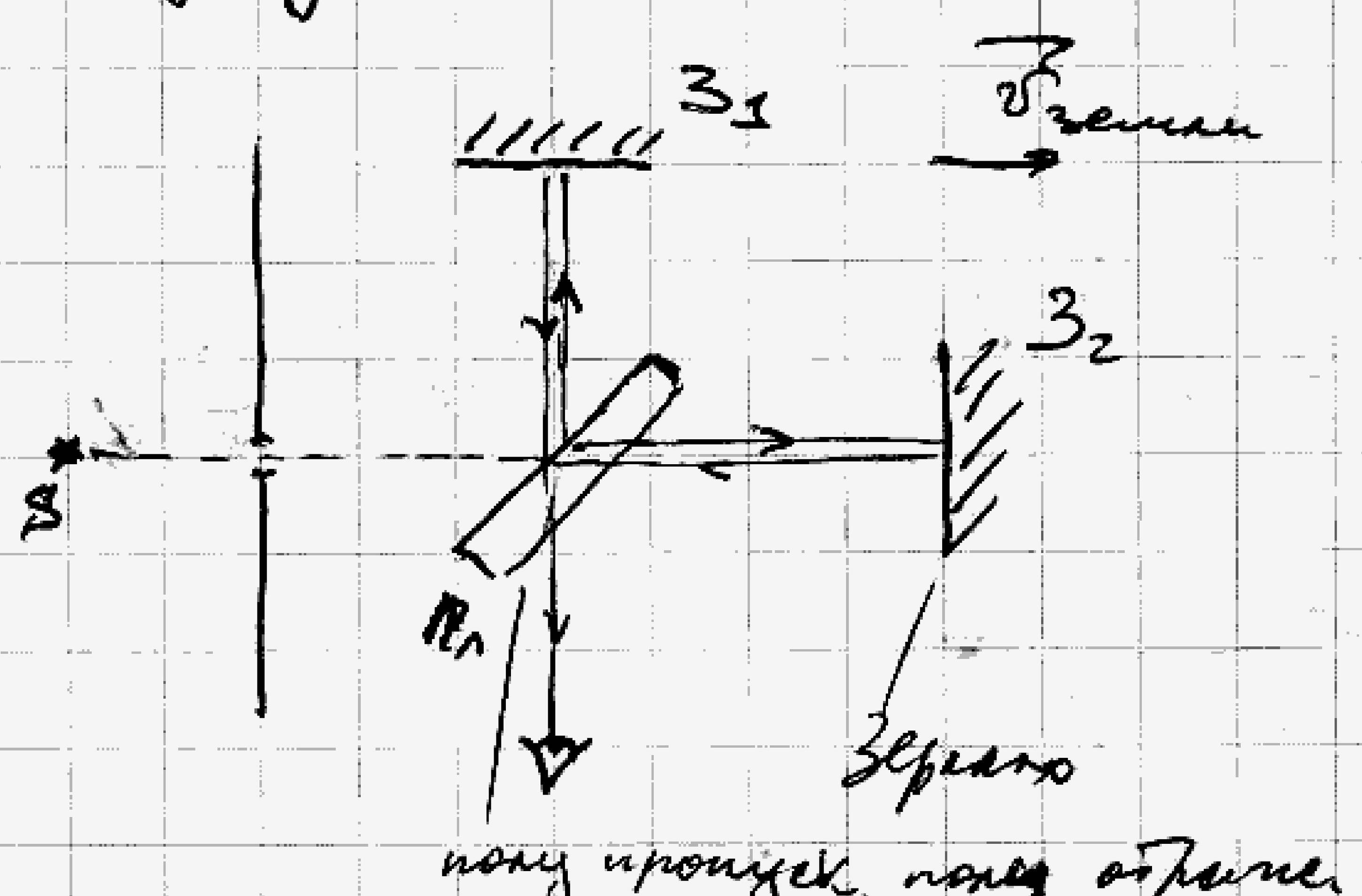
[1] Разделение фронта волны (опыт Юнга)(1802г)




деление волнового фронта

[2] (Опыт Майкельсона (1805) 1884)

Метод деления светового луча




скорость света не зависит от скорости движения источника

$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp}$

$t_{\parallel} = \frac{\ell c}{v} +$

Опыт Юнга с узкой и широкой щелью

Объем ког. — объем пр-ва в пот волны когерентн

$$V_{ког} = \pi r_{ког}^2 \, l_{ког}$$

Видность интерф. картины $P = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

28. 03.06

Лекция №

к рис $\boxed{1}$

$$\sqrt{\left(\xi + \frac{h}{2}\right)^2 + l^2} - \sqrt{\left(\frac{h}{2} - \xi\right)^2 + l^2} \approx l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\xi + h/2)^2}{l^2}\right) -$$

$$- l\left(1 + \frac{(h/2 - \xi)^2}{2l^2}\right) = \frac{l}{2l^2}\left(\left(\xi + \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{h}{2} - \xi\right)\right)\cdot\left(\left(\xi + \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} - \xi\right)\right)$$

$$= \frac{2H\xi}{2l} = \frac{H}{l}\xi$$

$$I = 2I_0\left(1 + \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(H\left(\frac{\xi}{l} + \frac{x}{L}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\right)\frac{d\xi}{h}\right) = \ldots = 2I_0\left(1 + \frac{\lambda l}{\pi H h}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sin\left(\frac{\pi h H}{\lambda l}\right)\cos\left(\frac{2\pi H x}{\lambda L}\right)\right)$$

a) $h$ - дост. большая

$$\frac{\lambda l}{\pi H h} \ll 1 \Rightarrow I = 2I_0$$

б) $\frac{\lambda l}{\pi H h} \gg 1$ то $I = 2I_0 \left(1+\cos\frac{2\pi H x}{\lambda l}\right) = 4I_0\cos^2\frac{\pi H x}{\lambda l}$

$x \ll 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| \approx 1$

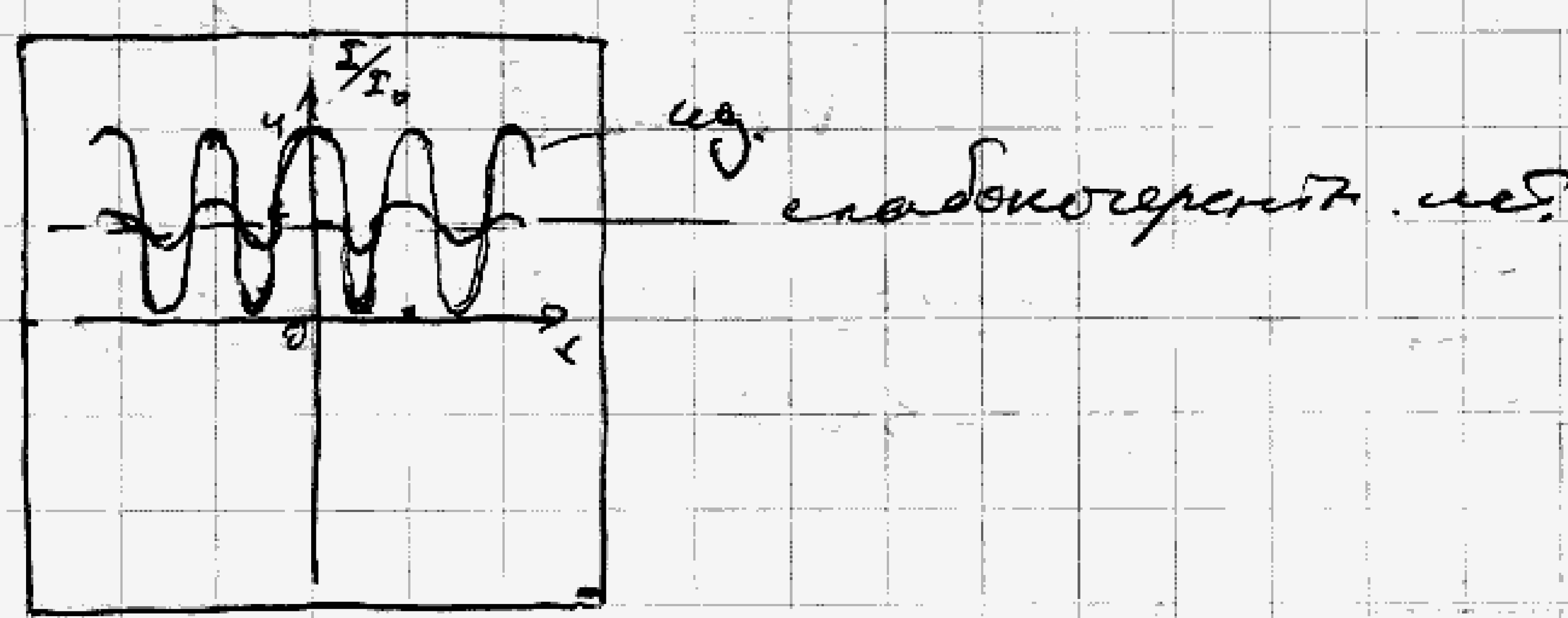
Усл. max

$$\frac{\pi H x}{\lambda l} = \pm \pi m \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots$$

$I = 4I_0$ $\qquad \Delta x_m = x_{max} - x_{max} = \frac{\lambda l}{H}$ — ширина интерференц. полосы

Усл. min $\frac{\pi H x}{\lambda l} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$

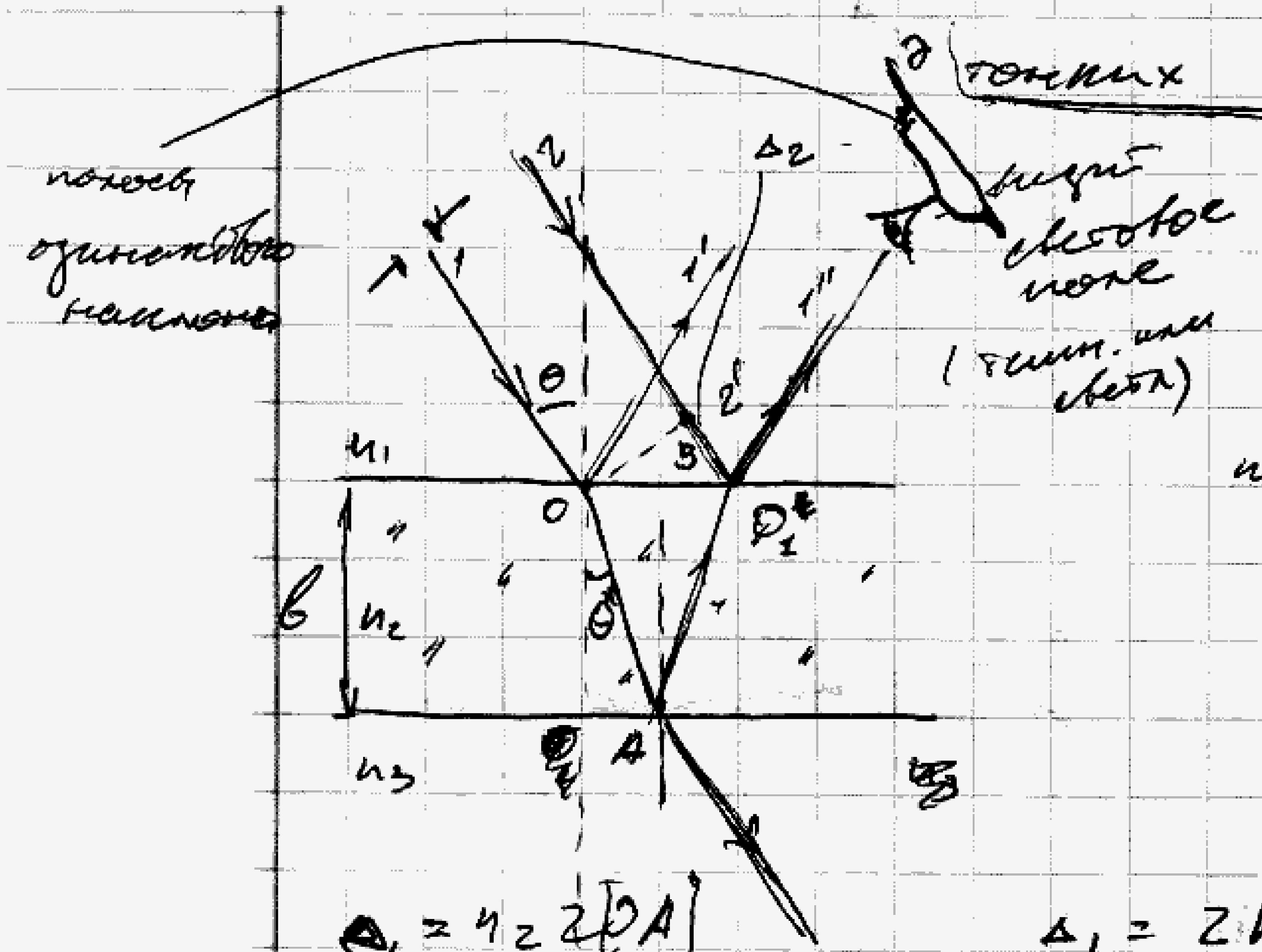
Интерференционная картина




Бизеркала Френеля, Бипризма Френеля

Зеркало Ллойда

# Интерференция при отражении от тонких плоских пластин.




$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$$

плоская волна $r_{ког} = \infty$

$$\Delta\lambda = 0 \Rightarrow l_{ког} = \infty$$

а) $n_1 < n_2 > n_3$

$$\Delta_1 = n_2 2[OA] \qquad \Delta_1 = 2n_2 \frac{b}{\cos\theta''} \qquad n = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Delta_2 = n_1 [OB] \qquad \Delta_2 = n_1 [OO_1]\cdot\sin\theta = n_1 2b \,\mathrm{tg}\,\theta'' \sin\theta$$

$$\Delta_3 = \lambda/2 \qquad \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{2b}{\cos\theta''}\left(n_2 - n_1 \cancel{\mathrm{tg}\,\theta} \sin\theta'' \sin\theta\right) =$$

оптич. разн. хода

$$\boxed{\sin\theta = n\sin\theta''} \qquad = \frac{2b\left(n_2 - \sin^2\theta / n\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta''}} =$$

$$= \frac{2bn_1\left(n^2 - \sin^2\theta\right)}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}} = \frac{2bn_1\left(n^2-\sin^2\theta\right)}{\left(n^2-\sin^2\theta\right)^{1/2}} = 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta}$$

$$\Delta = 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} + \frac{\lambda}{2}$$

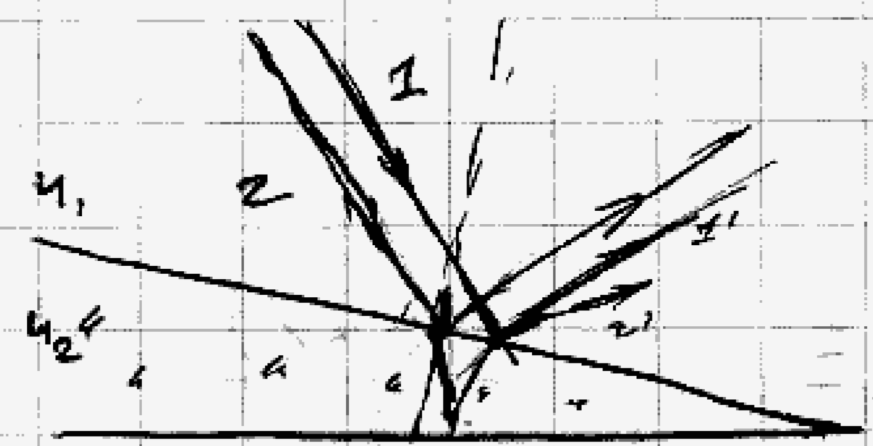
max $\quad \Delta_{max} = \lambda m$

$m \in \mathbb{Z}$

min $\quad \Delta_{min} = \frac{\lambda}{2}(2m+1)$

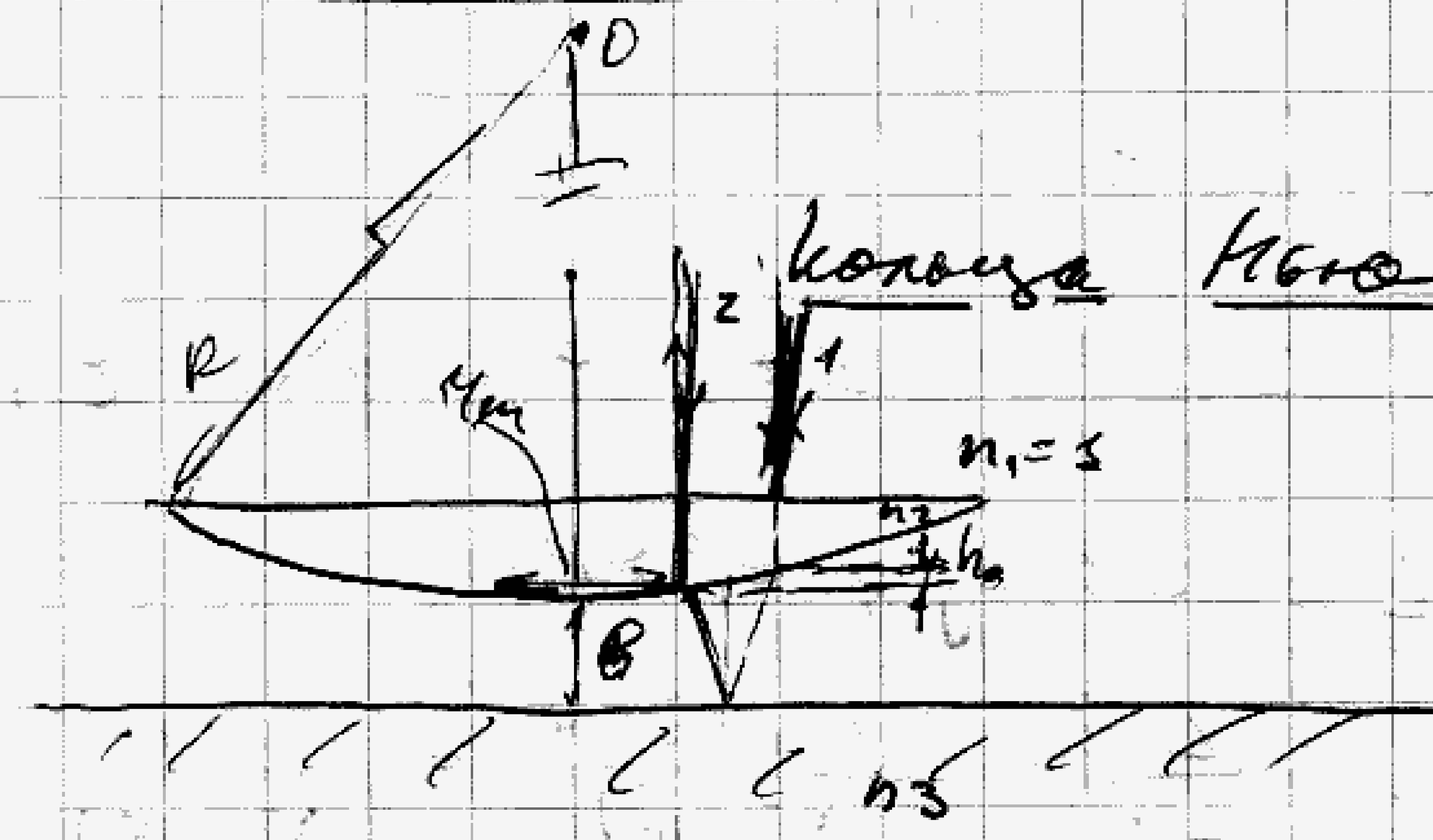
max: $\quad 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} = \frac{\lambda}{2}(2m+1)$

min: $\quad 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} = \lambda m$




4.04.06

лекция $N^o$




## Кольца Ньютона.

Опред. вид интерферен. картины.

плоская монохроматич. волна

$$\Delta = 2hn_1 + 2Bn_1 + \Delta_1$$

связ с потер или потерей фазы при отражении

а) $n_1 < n_2 < n_1 \Rightarrow \Delta_1 = \pm\frac{\lambda}{2}$

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\cdot 2m & (max) \\ \frac{\lambda}{2}(2m+1) & (min) \end{cases} \Rightarrow 2hn_1 = \Delta - \Delta_1 - 2Bn_1$$

$$R^2 = (R-h)^2 + r_m^2 \Rightarrow \cancel{R^2} = \cancel{R^2} - 2Rh + \cancel{h^2} + r_m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h \ll r_m) \Rightarrow r_m = \sqrt{2Rh} = \sqrt{2R\left(\frac{\Delta - \Delta_1}{n_1} - 2B\right)}$$

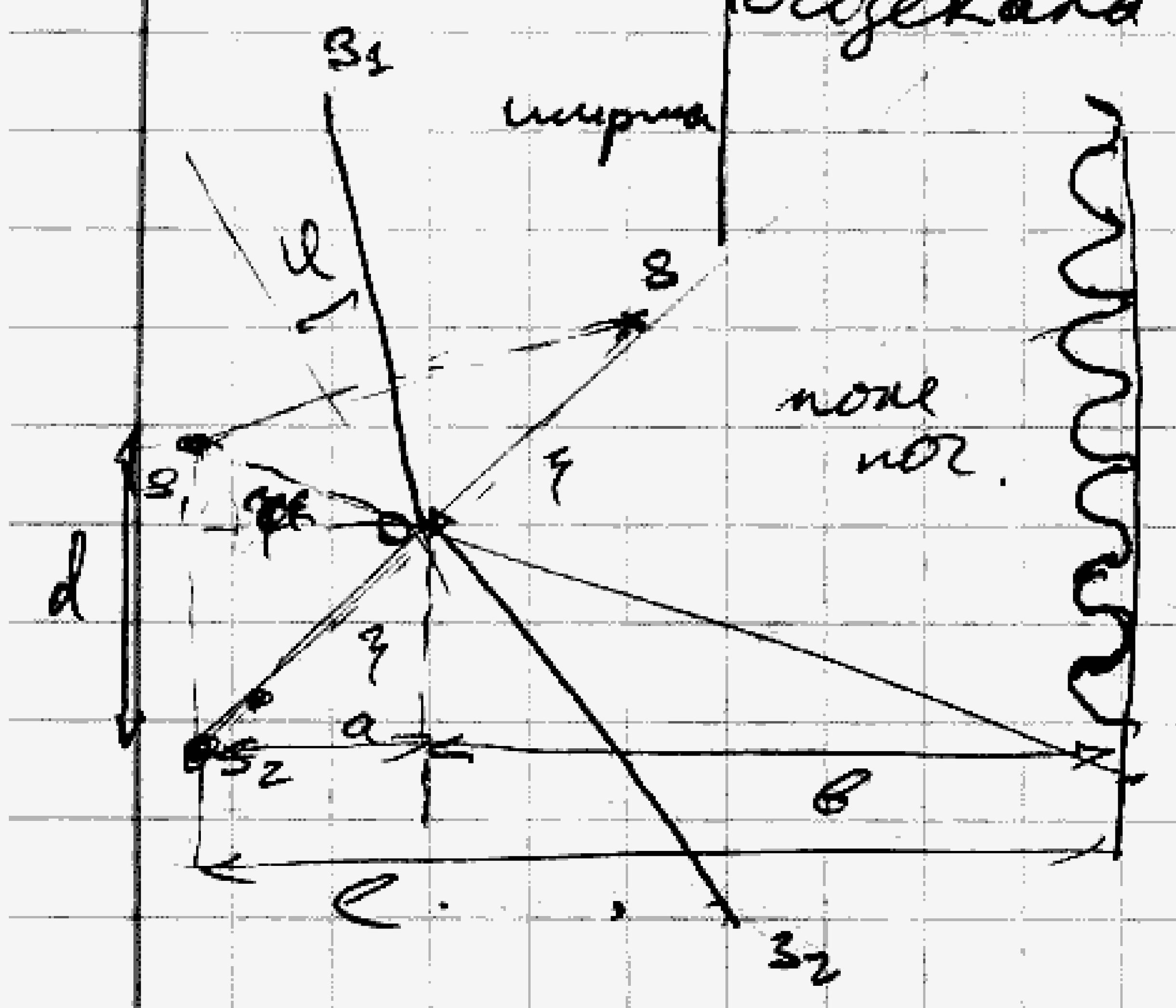
б. т.е. $r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}\left(m - \frac{\lambda}{2}\right)}$ max

$B = 0$

$\Delta_1 = \frac{\lambda}{2}$

Обозн. $2m = m'$

# Бизеркала Френеля




$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2r\varphi}$$

$$l = a + b$$

$\varphi$ – малое: $d = 2r\sin\varphi \approx 2r\varphi$

$$L = 2b\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx 2b\varphi$$

$$N'_{max} = \frac{L}{\Delta x} = \frac{2b\varphi \cdot 2r\varphi}{\lambda(a+b)} = \frac{4br\varphi^2}{\lambda(a+b)}$$

if усл. ког. соблюд.

$$N''_{max} = \frac{l_{ког}}{\Delta x} = \frac{\lambda^2}{\Delta x \Delta\lambda}$$

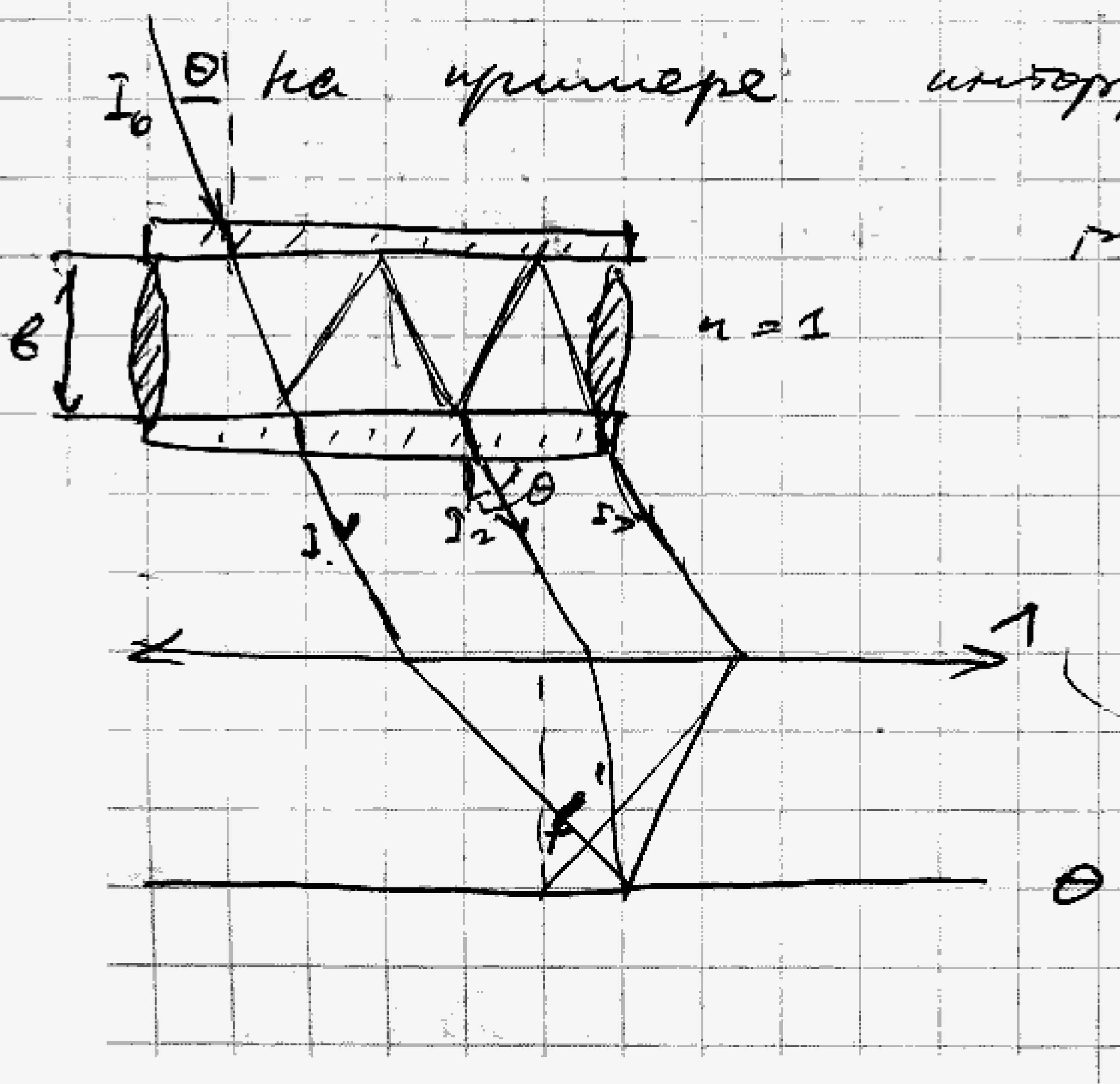
$$N = \min\{N'_{max}, N''_{max}\}$$

Опыт Юнга яв-ся основ. для получения соотв. в других уст-вах для раздел. волнового фронта

## Многолучевая интерференция

на примере интерферометра ~~Майкельсона~~ Фабри Перо

плоск. ког. волну (точеч., монохром)




$$\Delta = \Delta_{I} + \Delta_{II} + \Delta_{III} = \ldots = 2b\cos\Theta$$

$$2b\sqrt{1-\sin^2\Theta}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2b\cos\Theta$$

$$I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : (1-\rho)\cdot\rho : (1-\rho)^3\rho^2 : \ldots$$

$$E_{m_1} : E_{m_2} : E_{m_3} : \ldots = \sqrt{I_1} : \sqrt{I_2} : \sqrt{I_3} : \ldots = 1 : (1-\rho)\rho^2 : (1-\rho)\rho^i \ldots$$

$$\hat{E}_m = \sum_{i=1}^{\infty} E_{m_i} e^{j\delta i} = E_{m_1}\sum_{i=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{1/2}e^{j\delta i} \underset{\text{г.б. геом. прогр}}{=}$$

$$= E_{m_1}\frac{1}{1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{j\delta}}$$

$$I \sim |\hat{E}_m|^2/2 = E_{m_1}^2\frac{1}{(1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{j\delta})(1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{-j\delta})}$$

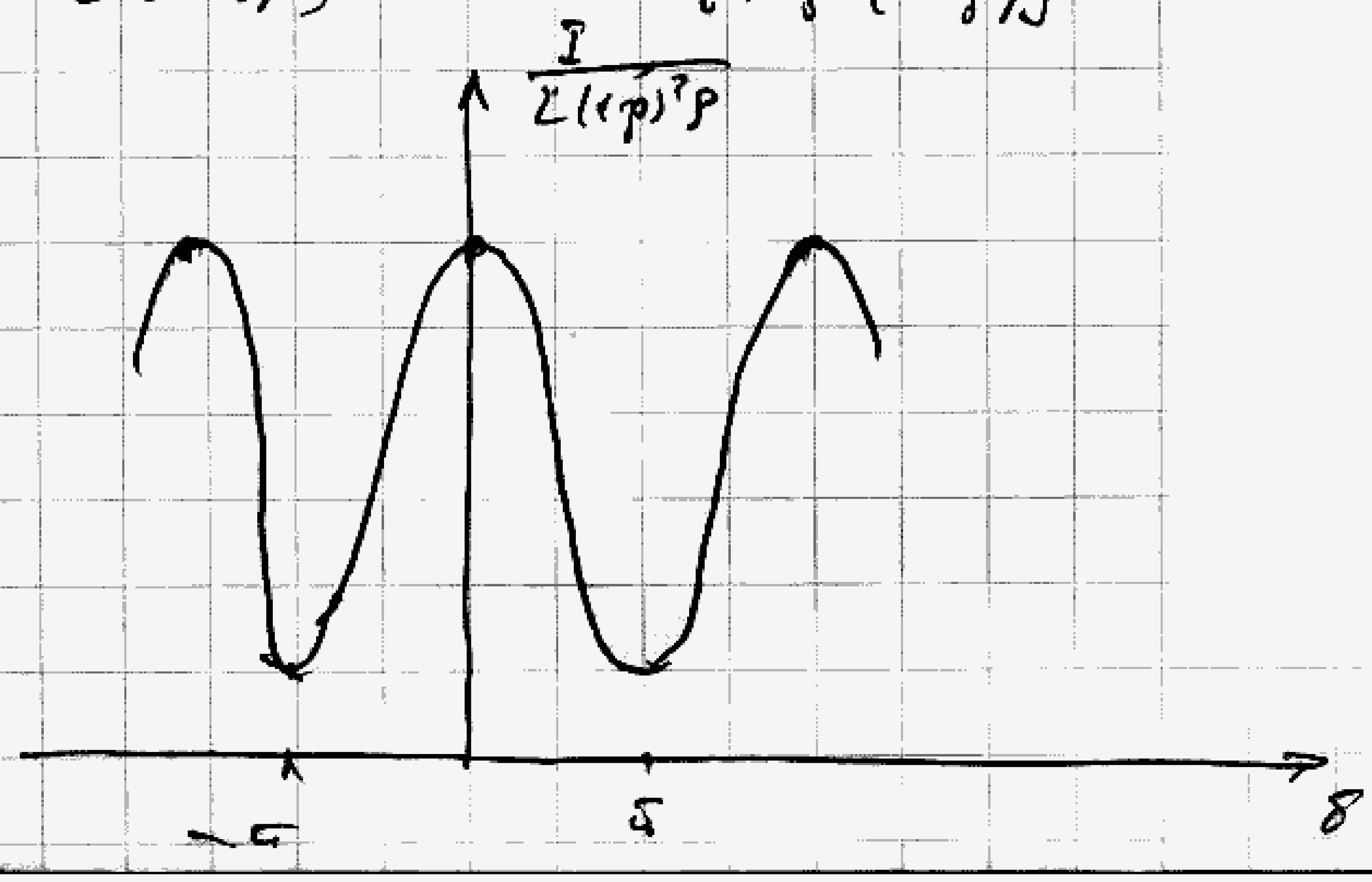
$$= E_m^2(1-\rho)^2\cdot\rho\frac{1}{1-(1-\rho)\rho^2(e^{j\delta}-e^{-j\delta})\cdot(1-\rho)^2\cdot\rho}$$

$$I = I_0(1-\rho)^2\rho\frac{1}{[1-(1-\rho)\rho^2]^2+2(1-\rho)\rho^2-2(1-\rho)\cdot\rho^2\cos\delta}$$

$$I = I_0(1-\rho)^2\rho\frac{1}{[1-(1-\rho)\rho^2]^2+4(1-\rho)\rho^{1/2}\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$$\frac{I_{max}}{L(1-\rho)^2\rho} = \frac{1}{[1-\rho^2(1-\rho)]^2} \qquad \sin\frac{\delta}{2}=0$$

$$\frac{I_{max}}{L(1-\rho)^2\rho} = \frac{1}{[1-\rho^2(1-\rho)]^2}$$



# Дифракция

$$\frac{b^2}{L\lambda} \gg 1$$ геом. оптика

$$\frac{b^2}{L\lambda} \lesssim 1$$ (Дифракция)

## Дифракция Френеля

$$\frac{b^2}{L\lambda} \sim 1$$

15.04.06

лекция №6

## Дифракция Френеля для щели и края полуплоскости

$$A(P) = C_н \int_{x'}^{x} e^{\frac{ikb^2}{2b}} db$$

обозн $\frac{kx^2}{2b} = \frac{\pi u^2}{2}$

$$\frac{2\pi x^2}{2\lambda b} = \frac{\pi u^2}{2}$$

$x_m = \sqrt{m \lambda b}$ – гр. зоны Шустера

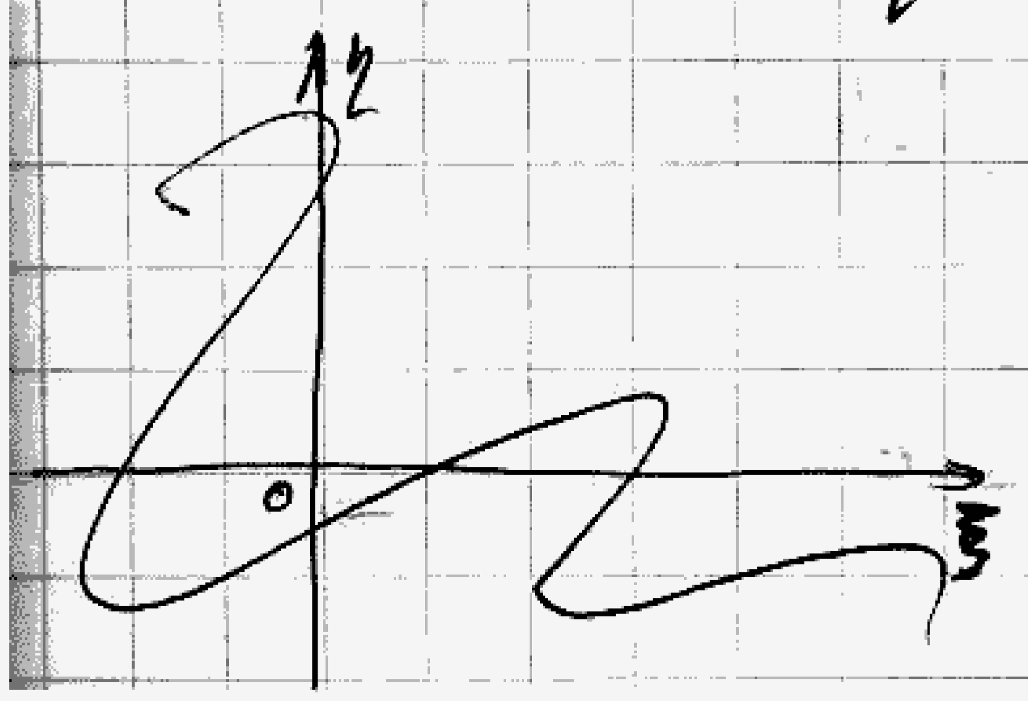
$$2 \frac{m\lambda b}{\lambda b} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2m}$$

т.о. $A(P) = C_н \int_{v'}^{v} \left(\cos\frac{\pi u^2}{2} + i \sin \frac{\pi u^2}{2}\right) du$ – интегралы Френеля

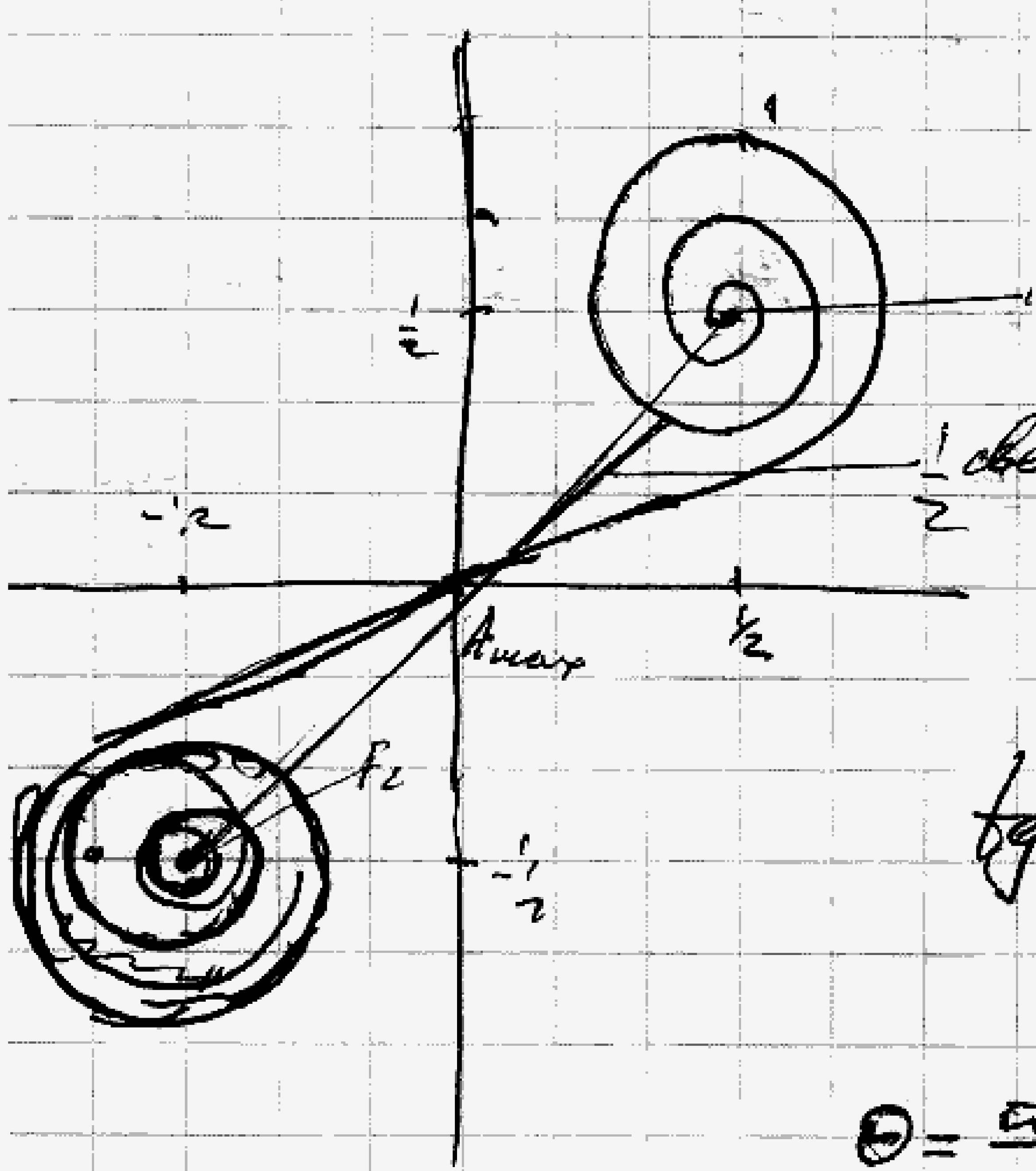
м. предел $A(P) = C_5 (\Delta \xi + i \Delta \eta)$, где $\xi = \int_{0(v')}^{v(v')} \cos\frac{\pi u^2}{2} du$

$\eta = \int_0^{v} \sin\frac{\pi u^2}{2} du$

$$I_0 = C_5^2 (\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2)$$



Спираль Корню




$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin\frac{\pi v^2}{2}}{\cos\frac{\pi v^2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi v^2}{2}$$

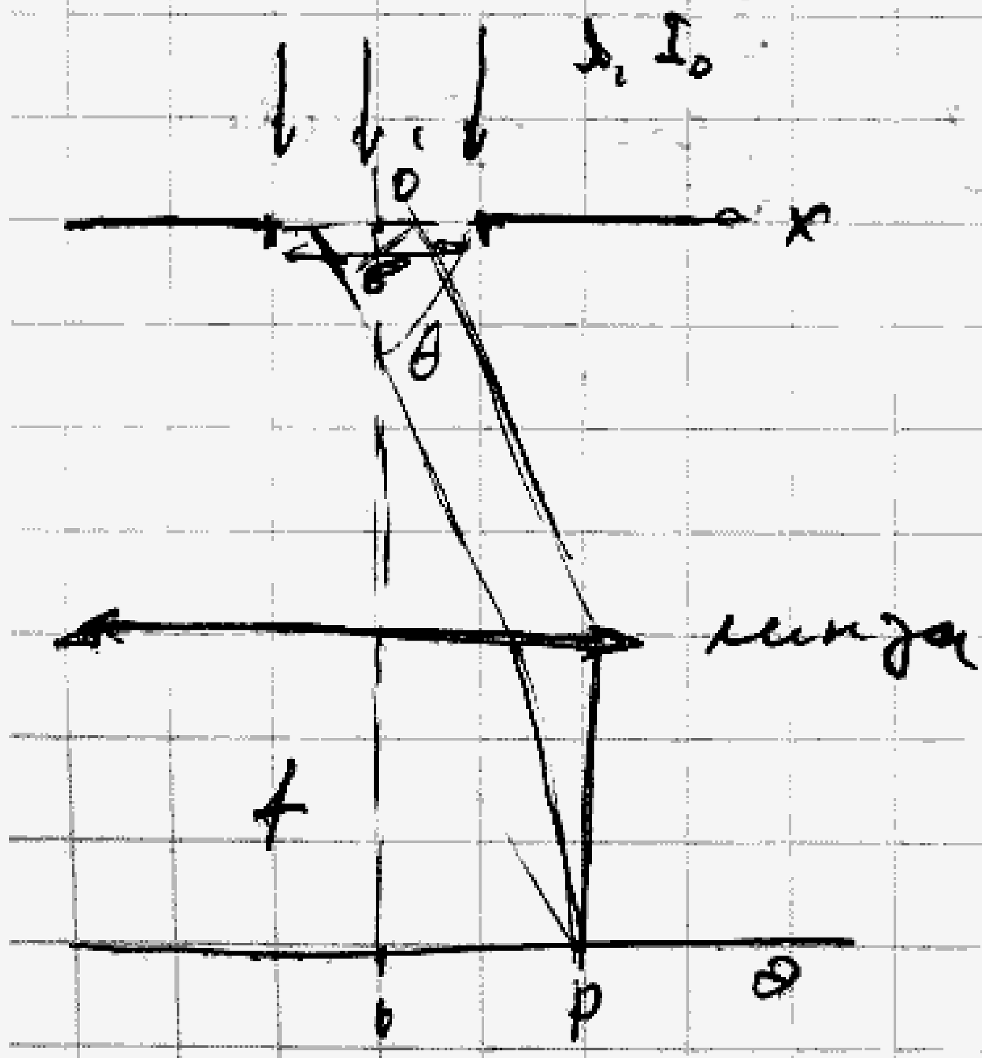
$$\Theta = \frac{\pi v^2}{2}$$

## Дифракция Фраунгофера

$\frac{b^2}{\lambda l} \sim m \ll 1$ — Фраунгофер

$m \sim 1$ — Френель

Перераспределение интенсивности в пр-ве от непрерывных источников




$$A(P) = c_1 \int_{-b/2}^{b/2} e^{i(\vec{k},\vec{r})}\,dx =$$

$$= c_1 \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx\sin\Theta}\,dx =$$

$$= \frac{c_1\left(e^{\frac{ikb}{2}\sin\Theta} - e^{-\frac{ikb}{2}\sin\Theta}\right)}{2i\,\frac{k\sin\Theta\, b}{2}} \Rightarrow$$

$= C_2 \dfrac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)}{\frac{kb}{2}\sin\theta}$

$\theta \sim 1$ $\quad A^2(0) \sim I_0$

в гл. стор. $\quad A^2(0) = C_2^2$

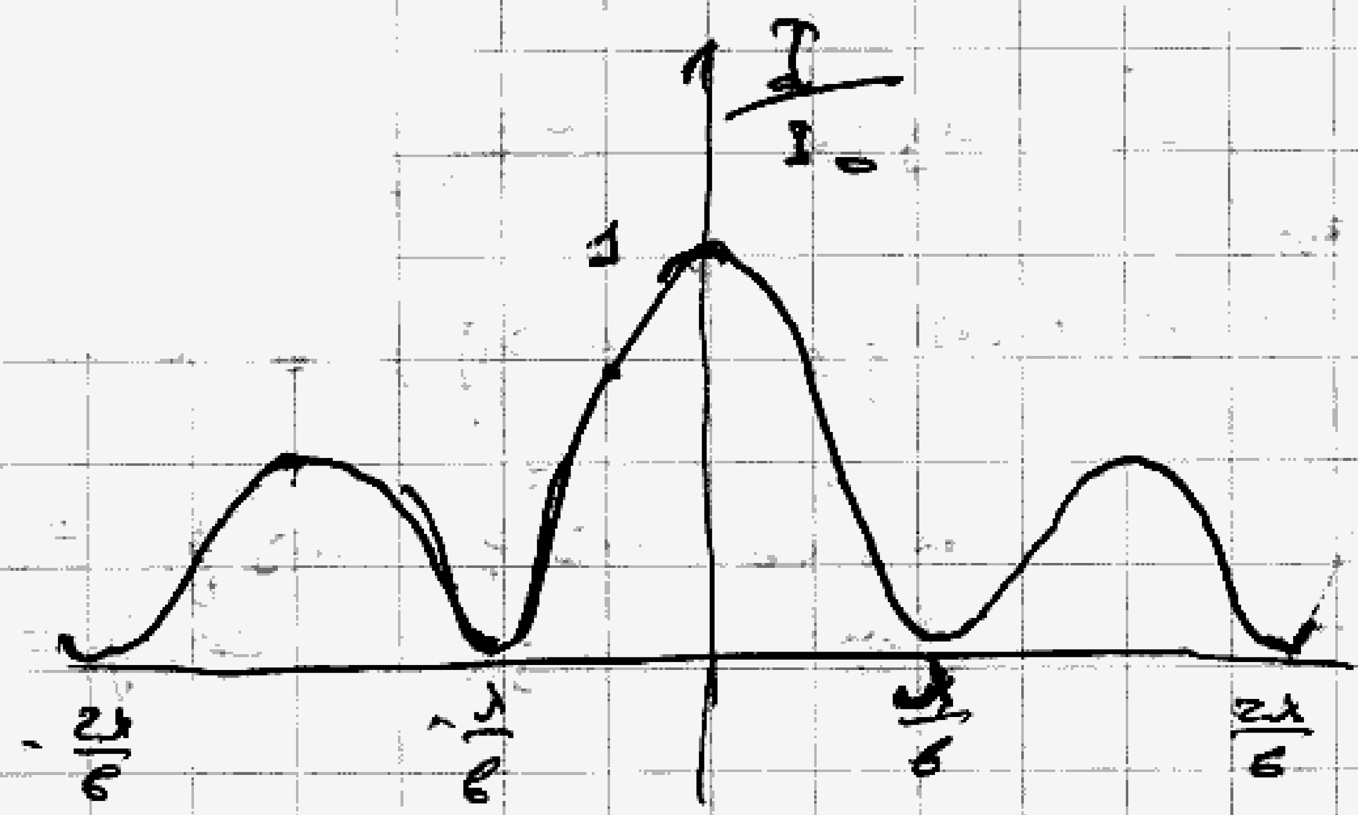
$C_2 = A(0) = \sqrt{I_0}$

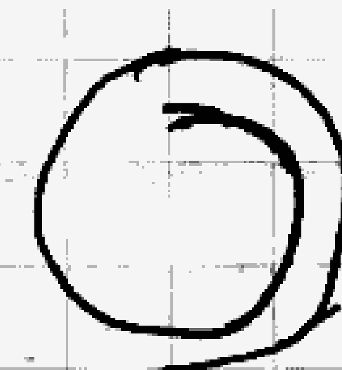
$$I(\gamma) = I_0 \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}$$

min $\gamma = \frac{kb}{2}\sin\theta = \pm\pi m \Rightarrow \frac{2\pi b}{2\lambda} = \pm\pi m$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

$b\sin\theta = \pm m\lambda$ (min)



$\frac{3}{2}\pi A_1 = A_0$ $\qquad A_1 = \dfrac{A_0}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)}$ $\qquad I_1 = \dfrac{I_0}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} = 0{,}045 I_0$

$$I_0 : I_1 : I_2 : \ldots = 1 : \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} : \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}$$

Дифракц. реш. — самостоят.

разреш. способн. дифр. прибора $\quad R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$

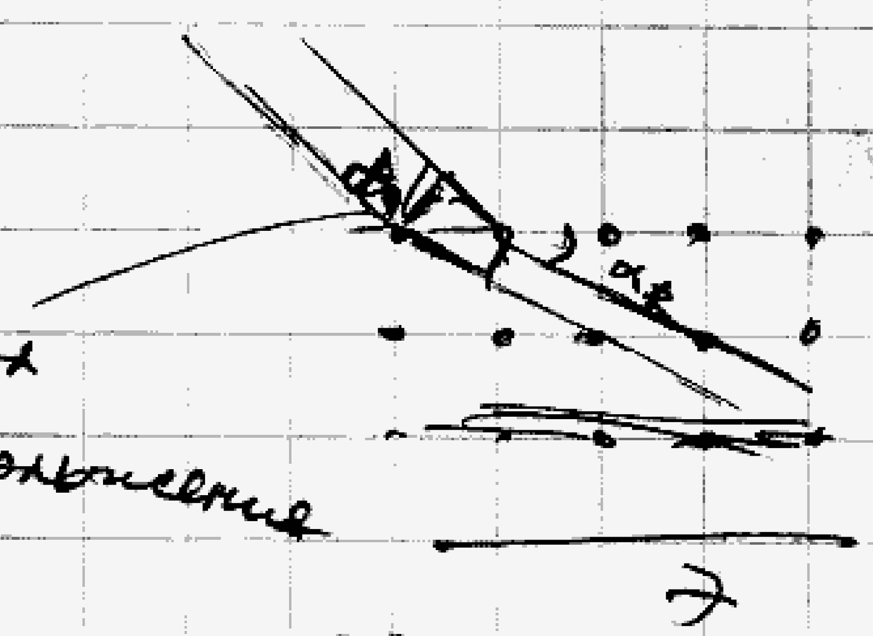
Дисперсия

$D_\varphi = \dfrac{\delta\lambda}{\delta\varphi}$ $\qquad D_x = \dfrac{\delta\lambda}{\delta x}$

# Дифракция рентгеновских лучей

Лауэ

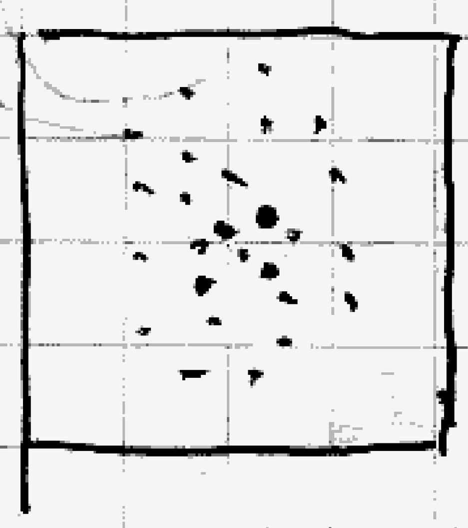
диф. на кристалл. структуре




max
$$\begin{cases} d(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = \pm m\lambda \\ d(\cos\beta_0 - \cos\beta) = \pm m'\lambda \\ d(\cos\gamma_0 - \cos\gamma) = \pm m''\lambda \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$$

Лауэграмма




Формула Вульфа - Брегга

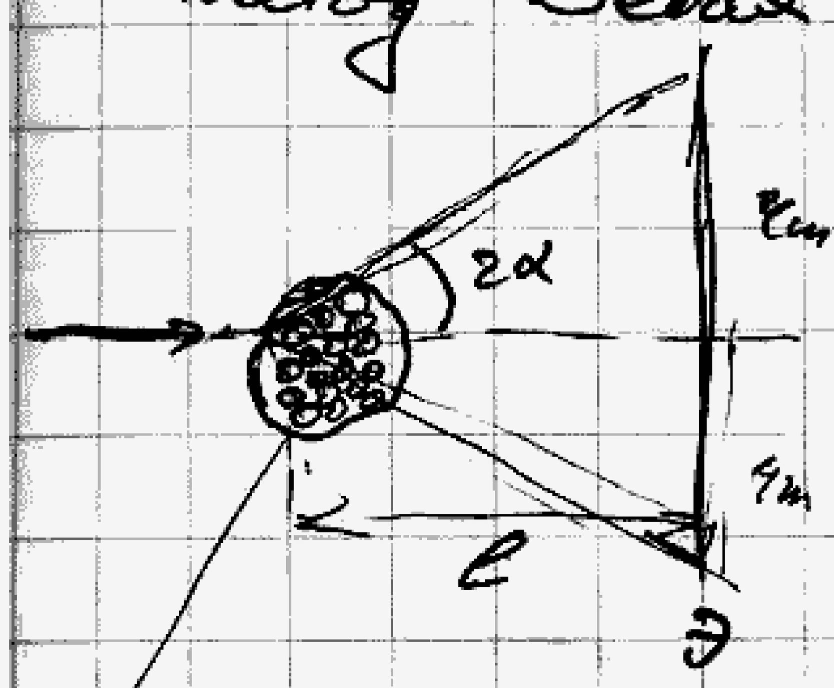

$2d\sin\theta = \pm m\lambda$ max

$m = 1, 2, \ldots$

25.04.06

## Лекция №

метод Дебая



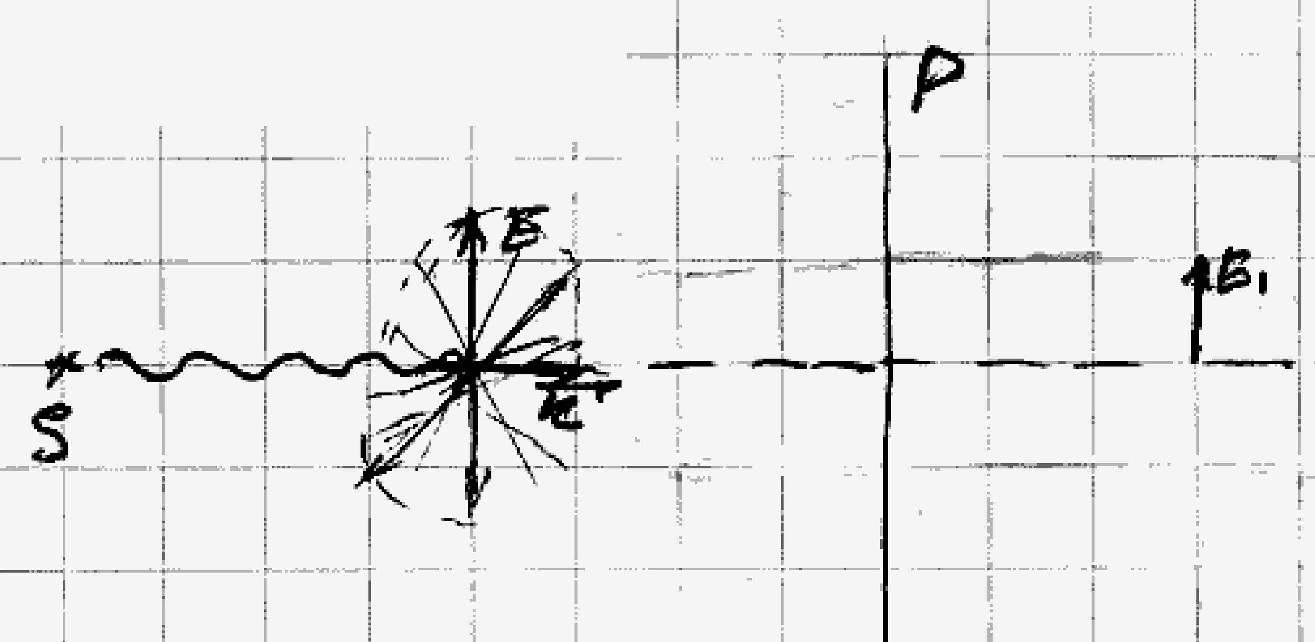

поликристалл

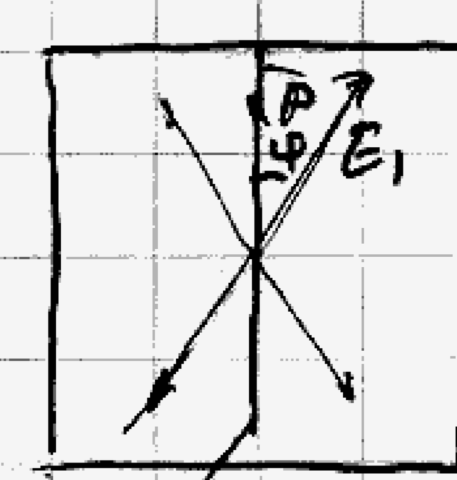
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{r_m}{l} \\ 2d \sin\alpha = \pm m\lambda \end{cases} \qquad d(\lambda)$$

$\alpha$ - угол скольжения

Дебаеграмма


## Естественный свет и поляризация света




направление, в кот. поляризатор пропускает

$$E_1 = E_0 \cos\varphi \qquad I_1 = I_0 \cos^2\varphi$$

усредн. по времени <=> усредн. по углу

$$\langle I_1 \rangle = I_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{\pi} = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{I_0}{2}$$

т.о.

$I_1 = \frac{I_0}{2}$ – З-н Малюса

$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$

Степень поляризации

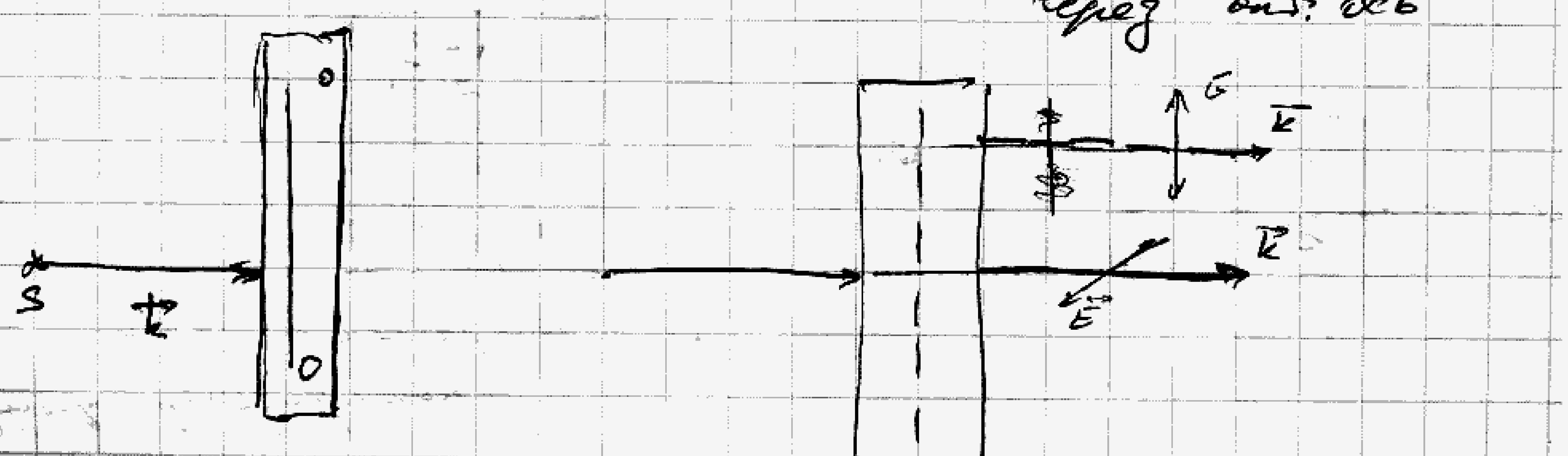
$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ – применимо только для лин. поляризации (частично не полностью поляриз. света)

(для круговой $I_{max} = I_{min}$)

Поляризаторы – в-ва (слюда, кварц ...), кот. обладают анизотропией для этого волны (дихроизм), волны, по-разному поляризованные, по-разному пропускаются

Одноосные кристаллы

Главная плоскость (сечение) – плоскость прох. через опт. ось

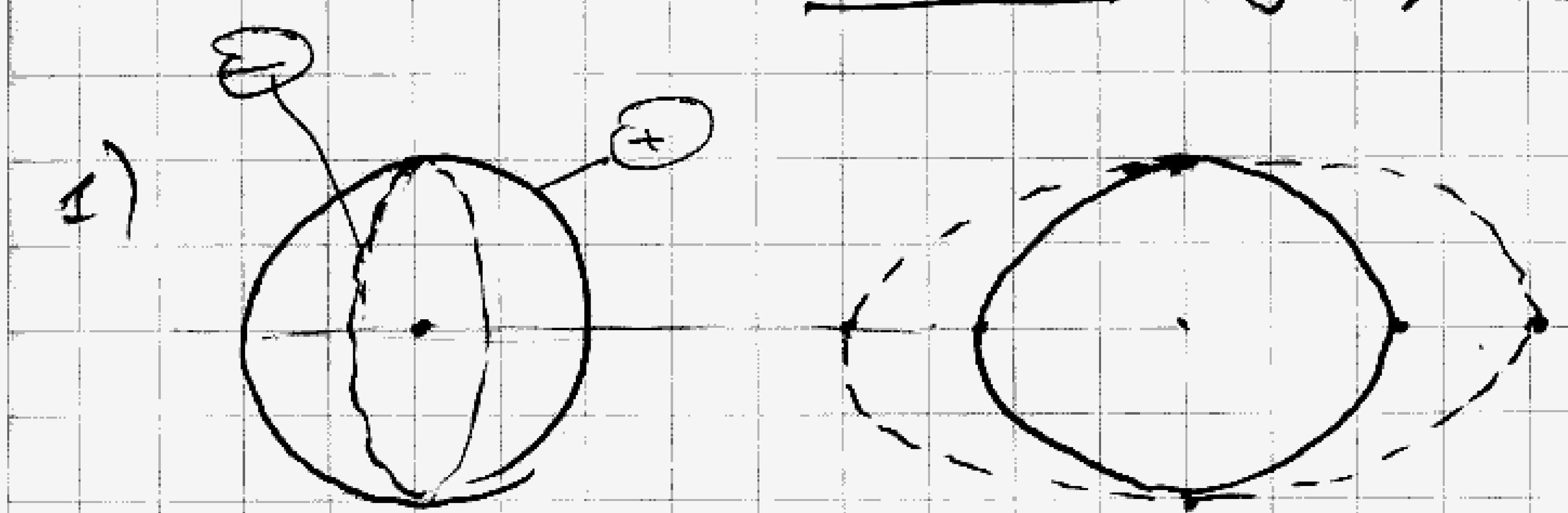



$\parallel \quad v_e = v_o \Rightarrow n_e = n_o$

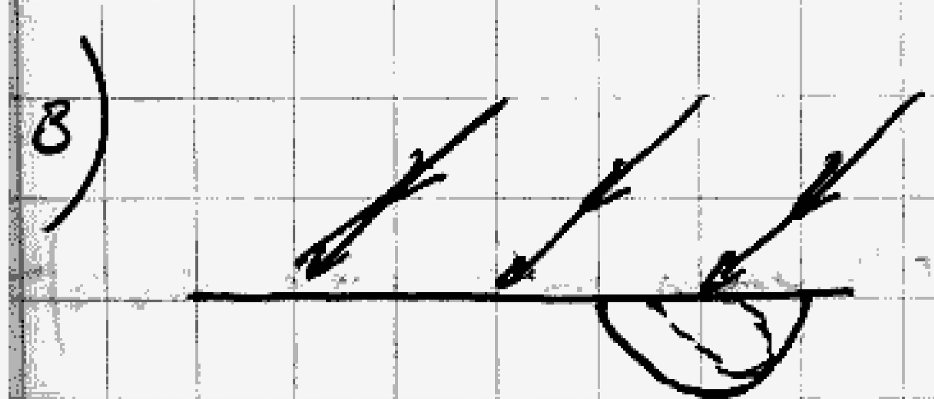
1 $\begin{cases} v_o > v_e \Rightarrow n_o < n_e & \text{(положит. кристалл)} \; (+) \\ v_o < v_e \Rightarrow n_o > n_e & \text{(отрицат. кристалл)} \; (-) \end{cases}$

o – ординарный (обычный)
e – экстраординарный (необычный) луч.

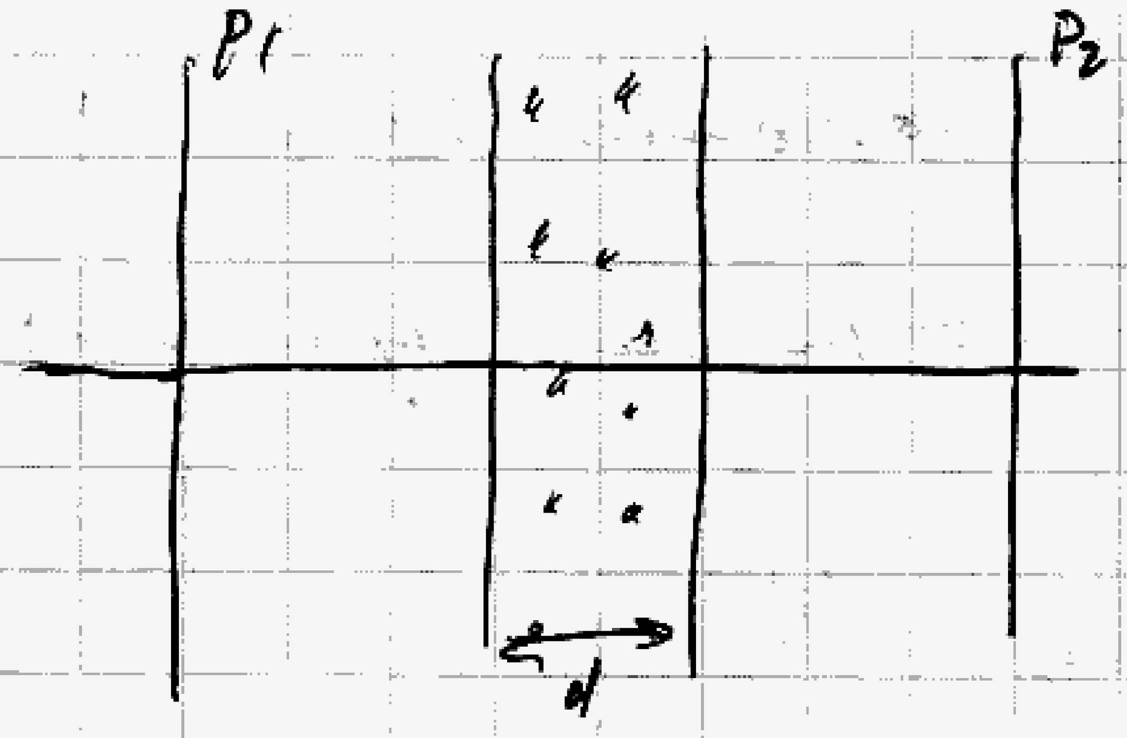
## Двойное лучепреломление



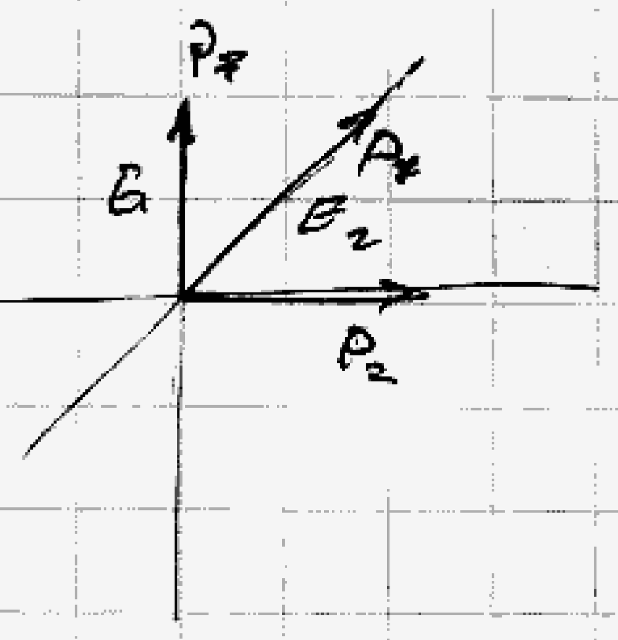

лучевые поверхности


Кристаллическая плоско-параллельная пластинка между двумя поляризаторами




$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \, |n_e - n_o|$$



$$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \, , \quad E_{1e} = E_1 \cos\alpha_1$$

$$E_{1o} = E_1 \sin\alpha_1$$

после прохожд. пластинки

$$E'_{2e} = E_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$$

$$E'_{2o} = E_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

$$E_2^2 = E_1^2 \Big[\big(\cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 + 2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2\big) - 2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + 2\cos\delta \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\Big]$$

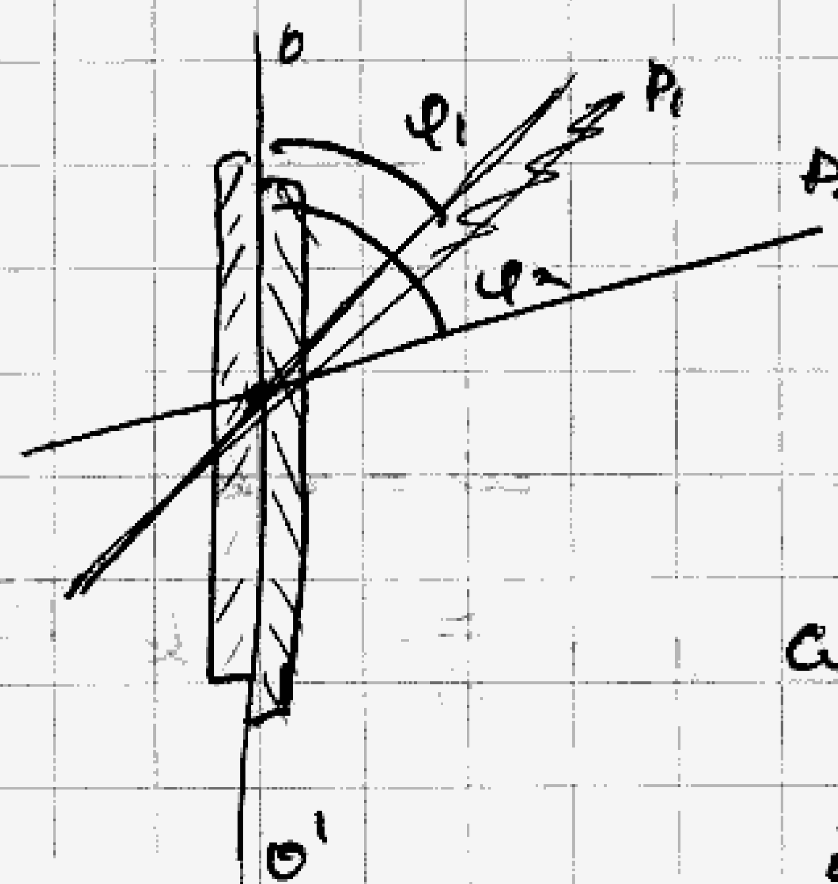
$$2E'_{2o} E'_{2e} \cos\delta$$

$$= E_1^2 \left(\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2}\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \, (\cos\delta - 1)\right) =$$

$$= \frac{E_0^2}{2}\left[\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin\frac{\delta}{2}\right]$$

$I = \frac{I_0}{2}\left[\ — \ и \ — \ \right]$

2.04.06



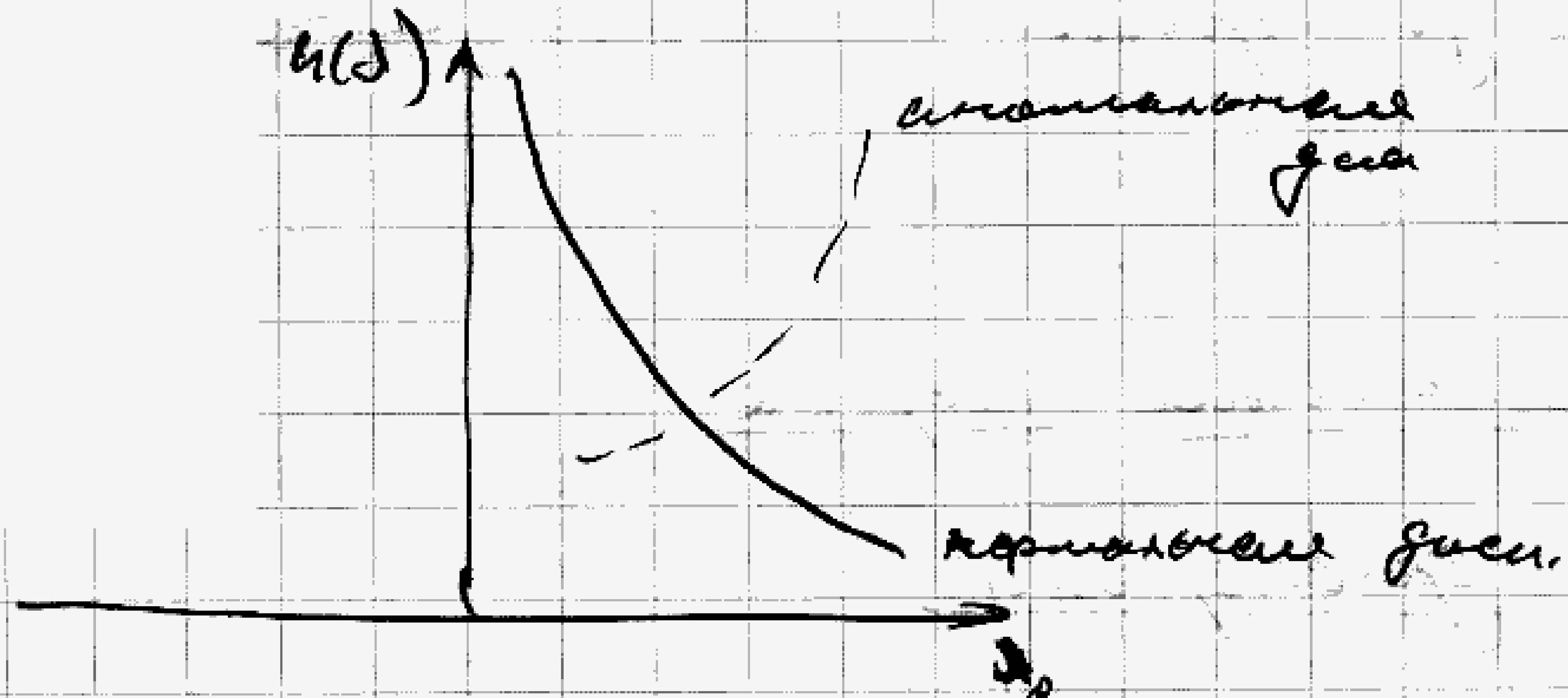

$$I(\lambda) = \frac{I_0(\lambda)}{2}\left(\cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin^2\frac{\delta(\lambda)}{2} \times \sin 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2\right)$$

а) $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow I_\perp(\lambda) = \frac{I_0}{2}\sin^2\frac{\delta(\lambda)}{2}$ $(\perp)$

б) $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{4} \longrightarrow I_\parallel(\lambda) = \frac{I_0}{2}\cos^2\frac{\delta}{2}$ $(\parallel)$

$$I_\Sigma(\lambda) = \frac{I_0}{2}$$

## Дисперсия света




$\frac{dn}{d\lambda_0} < 0$ (норм.)

$\frac{dn}{d\lambda_0} > 0$ (аном.)

$$E(x,t) = c\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega = c\, e^{\cancel{i\omega_0 t}\int e^{i[(\omega-\omega_0)t - k|_{\omega_0}x}}$$

$\Delta\omega = \omega - \omega_0$

конст.

$$= c\, e^{i\omega_0 t}\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\left[(\omega-\omega_0)t - k|_{\omega=\omega_0}x - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}\Delta\omega\, x\right]} =$$

$$= c\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\Delta\omega\left(t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}x\right)} = E_m\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

последний

найдем этот инт-л

$$t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} x = 0$$

max $\quad v = v_{фаз} = \frac{\omega}{k}$

$$\frac{dx}{dt} = v_{гр} = u = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{dk}k \qquad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = vk$$

$$v = \frac{c}{n}, \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

$$u = \frac{c}{n} + \frac{2\pi n c}{\lambda_0 n^2} \frac{dn}{2\pi\left(\frac{dn}{\lambda_0} - \frac{n}{\lambda_0^2}d\lambda_0\right)} =$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \lambda_0 \frac{dn/d\lambda_0}{\frac{\lambda_0 dn}{n\, d\lambda_0} - 1}\right)$$

при аномальной дисперсии $v$ получается $> c$

## Классическая теория дисперсии

проходя эл. волны через среду вызывает поляризацию среды

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \qquad (1)$$

$$\vec{P} = \cancel{(n\vec{p})} = -ne\vec{r} \qquad (2)$$

др. стор.

Запишем ур-е движ. $e^-$ под действ. $E$ эл.-м. волны

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} + 2\beta\dot{\vec{r}} = -e\vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \frac{2\gamma}{m}\dot{\vec{r}} = -\frac{e}{m}\vec{E} e^{i\omega t}$$

ч.р. $\vec{r} = c\, e^{i\omega t};\ \ddot{r} = -\frac{e\vec{E}}{m} e^{i\omega t} c$ обозн $\frac{\gamma}{m} = \beta$

$$\cancel{-\frac{e\vec{E}_0}{m}} e^{i\omega t}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega 2 i\beta\right) C = -\frac{e\vec{E}_0}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$$

т.о. $\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0}{m} e^{i\omega t}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta}$

(2) $\vec{P} = \frac{n e^2 \vec{E}_0}{m} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta} \overset{(1)}{=} (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t}$

т.о. $\varepsilon = 1 + \frac{n e^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta}$

$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{m\varepsilon_0}$ $\qquad \sqrt{\varepsilon} = n_0 - i\mu$

~~плазменная частота~~

плазменная частота

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = n^2 - \mu^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon = -2in\mu = \frac{-2i\,\omega_p^2\omega_0\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

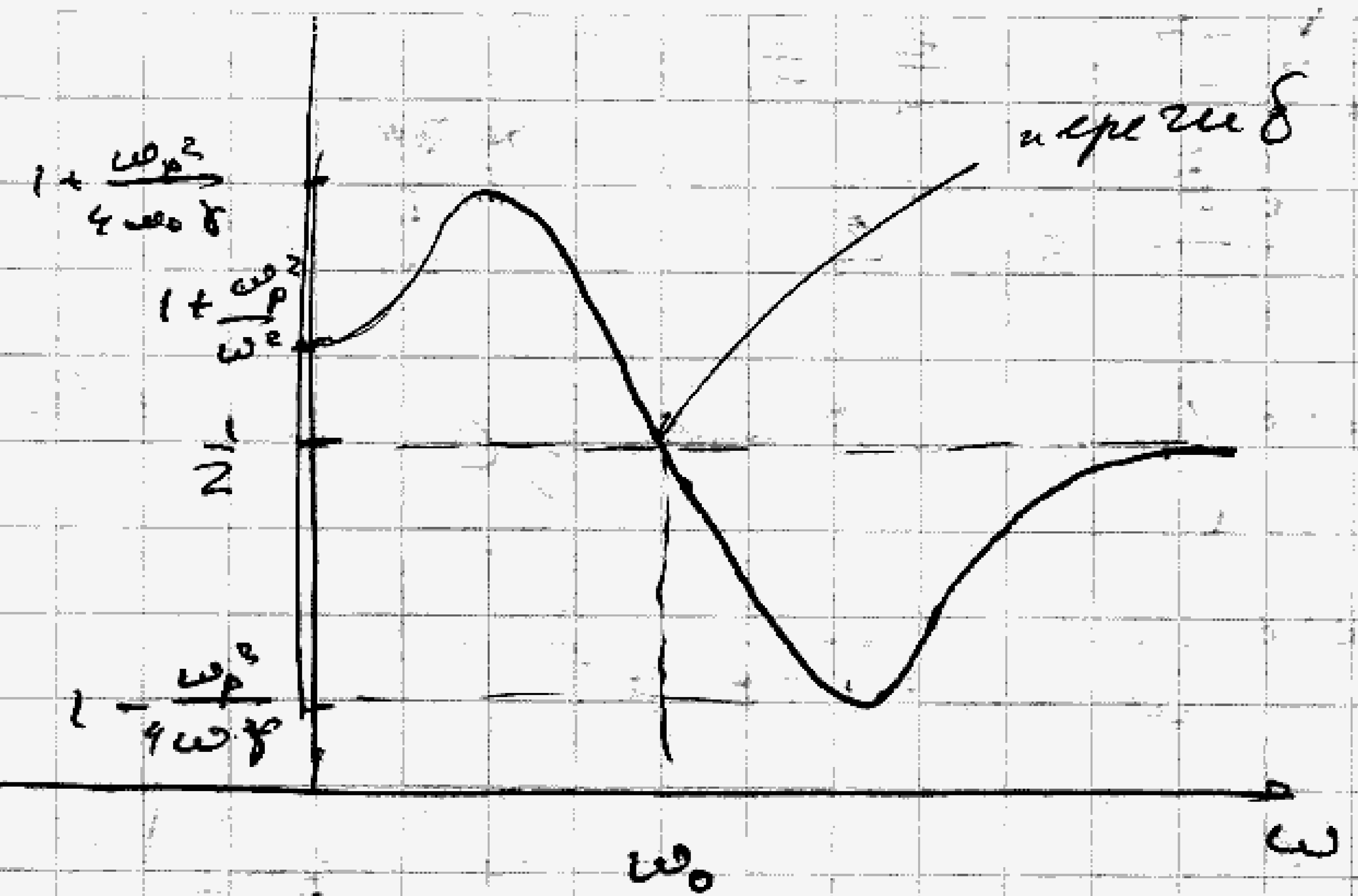
Расчет $n \sim 1$, $\mu \ll 1$ для свободных электронов $\beta = 0$, $\omega_0 = 0$

тогда

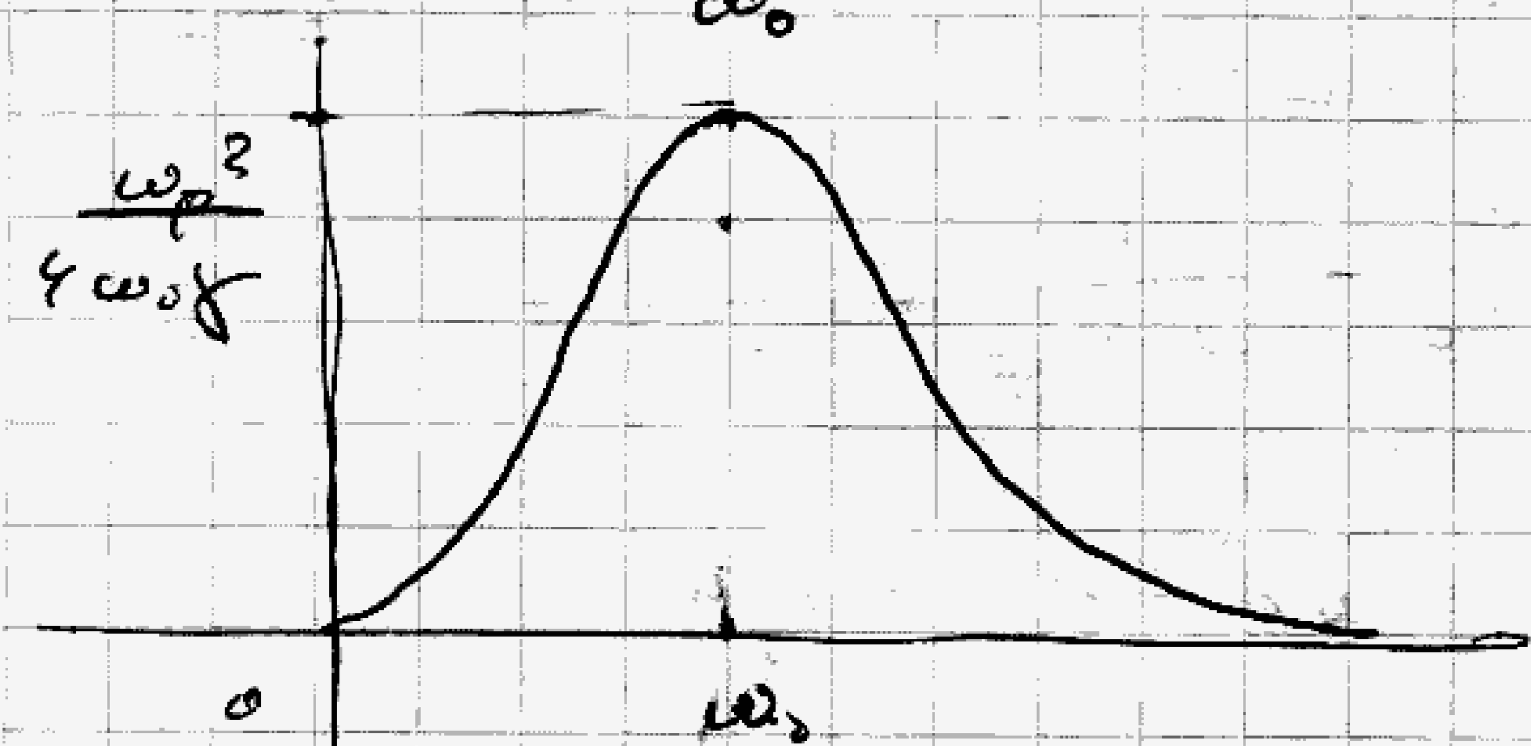
$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2\omega^2}{\omega^4} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

т.о. при $n \le 0$ – отражение с частотой $\geq \omega_p$

Ионосфера $n_e = 10^{12} \div 10^{14}\ м^{-3}$




что приводит к тому, что при поглощении скорость кажется больше скорости света




7] $\beta \gg \omega_p,\ \omega_0 = 0$

$$n^2 - \mu^2 = 1 - \frac{\omega_p^2\omega^3}{\omega^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

$$n\mu = \frac{\omega_0^2\omega\beta}{\omega^4 + 4\omega^2\beta^2}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\,\frac{\omega_p^2\beta}{\omega^2 + 4\omega\beta^2} - \mu^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 4\beta^2}$$

$$\beta \gg \omega \Rightarrow \frac{\omega_0^2\beta}{4\omega\beta^2} - \mu^4 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\beta^2}\right)\mu^2 = 0$$

$$\mu^2 \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega\beta} \Rightarrow \mu \sim \frac{\omega_p}{2\sqrt{\omega\beta}}$$

16. 05.06

## Лекция №0

## Дисперсия

$$\mu \approx \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega\beta}}$$

(з-н Бугера $I(x) = I_0 e^{-\varkappa l}$

$I_0$

$$\varkappa = 2\frac{2\pi}{\lambda_0}\mu = 2\frac{2\pi\nu}{c}\mu = \frac{2\omega}{c}\mu$$

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-1} \xRightarrow{\text{опр-ся}} \varkappa l_{ск} \sim 1, \quad l_{ск} \sim \frac{1}{\varkappa} = \frac{c}{2\omega\mu} \sim$$

$$\sim \frac{2c\sqrt{\omega\beta}}{2\cdot\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega/\beta}} \sim$$

$$\sigma = \frac{1}{\beta}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\omega\sigma}}$$

чем больше частота, тем меньше скин-слой

## Закон Бугера

$$I \sim \langle |E|^2 \rangle \sim \langle E E^* \rangle = E_m^2 \cdot e^{i(\omega t - kx)} e^{-i\omega t + (ik)^* x} \sim$$

$$\sim E_m^2 e^{-i\left(\frac{n - i\mu}{\lambda_0}\right)2\pi x} \cdot e^{\left(i(n-i\mu)\right)^* \frac{2\pi x}{\lambda_0}} =$$

$$= E_m^2 e^{-\frac{2\mu\cdot 2\pi}{\lambda_0}x}$$

$$I(x) = I_0 e^{-\varkappa x} \qquad \varkappa = \frac{2\mu\omega}{c}$$

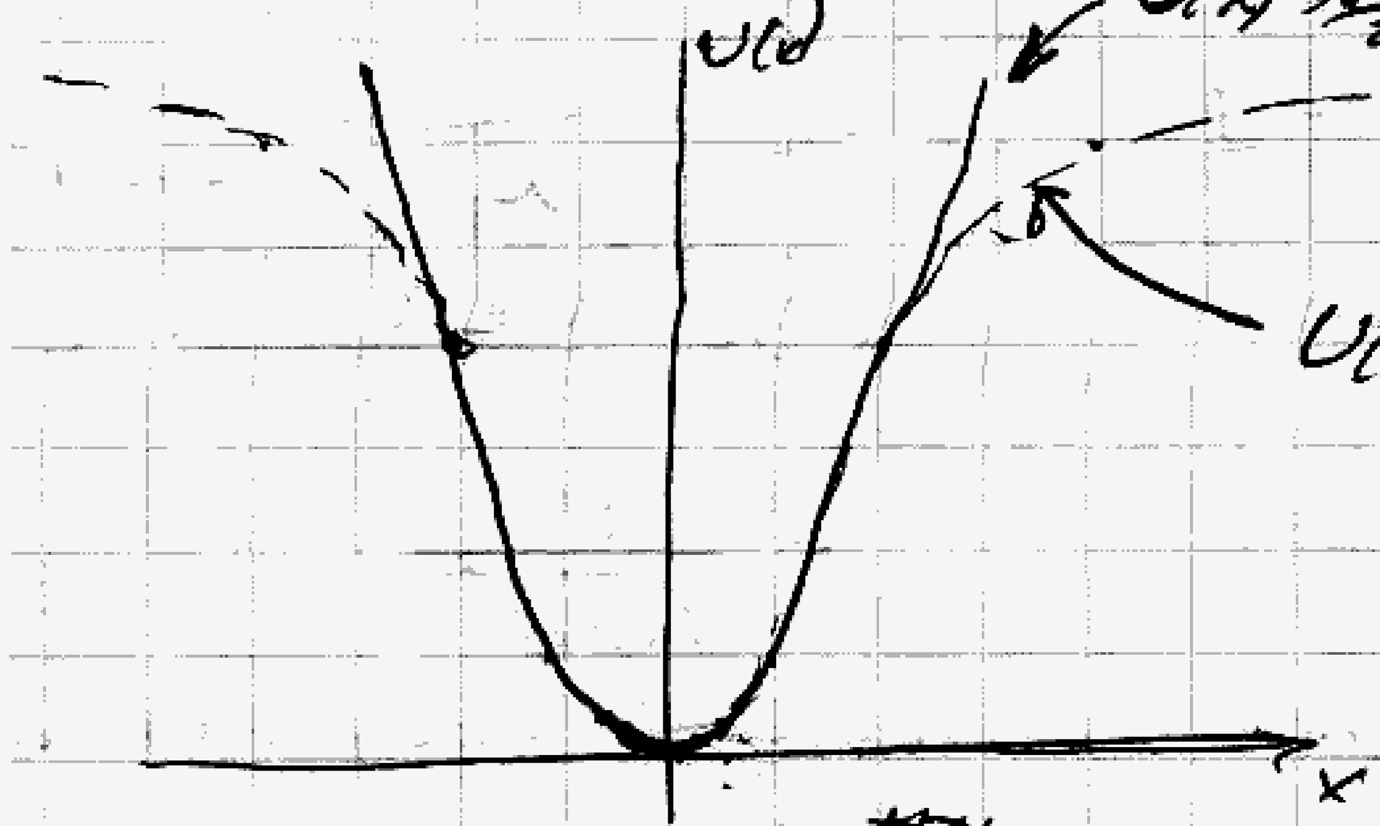
# Нелинейные оптические

## явления

Лазер | 10 – 100 МВт $\Rightarrow E \sim 10^7 - 10^8$ В/м

эффекты связаны с возникновением негармонического движ.

Обычно пот. эн. или параболич. характер



$U(x) = \frac{kx^2}{2}$ – гармонич.

$U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{\beta x^3 m}{3} - \frac{\gamma x^4 m}{4}$ ангармонич.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_x}{m} + \beta x^2 + \gamma x^3$$

$$\beta |x|, \gamma x^2 \ll \omega_0$$

Решим в нулевом приближении (~~β и γ малы~~)

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = \frac{eE_m \cos\omega t}{m}$$

считаем, что все происходит в диэл. малом объеме

$$\left(-a\omega^2 + a\omega_0^2\right)\cancel{\cos\omega t} = -\alpha \cancel{\cos\omega t}$$

$$\alpha = \frac{eE_m}{m}$$

т.о.

$$x^{(0)} = a\cos\omega t$$

$$a = \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

2-е приближение

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\alpha\cos\omega t + \beta\left(\frac{\alpha}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^2 \underbrace{\cos^2\omega t}_{\frac12(1+\cos 2\omega t)} +$$

$$+ \gamma\left(\frac{\alpha}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^3 \frac14\left(3\cos\omega t + \cos 3\omega t\right)$$

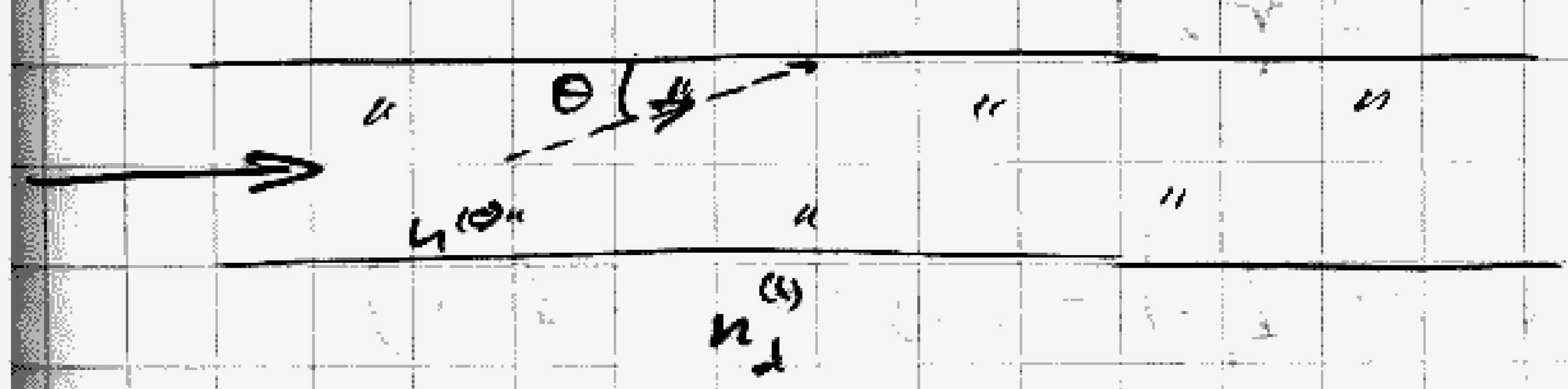
$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \left(-\alpha + \frac34\frac{\alpha^3\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)^3}\right)\cos\omega t + \frac{\beta\alpha^3}{\omega^2-\omega_0^2}\cos 2\omega t +$$

$$+ \frac{\beta\alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)^2} + \frac{\gamma}{4}\left(\frac{\alpha}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^3\cos 3\omega t$$

$$x^{(1)} = \underbrace{\frac{\beta\alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)\omega_0^2}}_{1} + \underbrace{\left(\overbrace{-\alpha + \frac34\frac{\alpha^3\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)}}^{3}\right)\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t + \dots}_{2}$$

1. поляризация среды
2. Генерация гармоник
3. изменение показателя преломления (самофокусировка излучения)

$$n = n^{(0)} + \varepsilon E_m^2 \qquad n^{(1)} > n^{(0)}$$




$$\cos\theta = \frac{n^{(0)}}{n^{(1)}} \qquad \theta \ll 1$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{n^{(0)}}{n^{(0)} + \varepsilon E_m^2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{n^{(0)}}E_m^2$$

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon}{n^{(0)}}}\,E_m$$

# Генерация второй гармоники

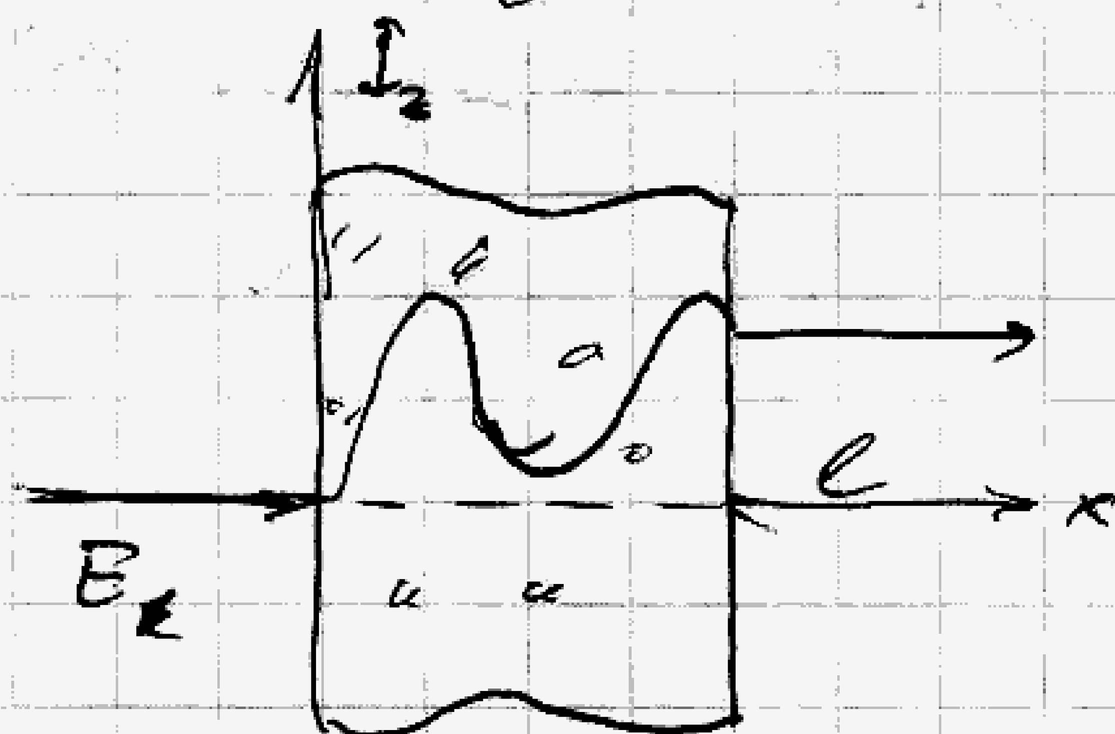
$$E_2^{(1)} \approx \frac{\beta\alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)}\cos 2(\omega t - k_1 x)$$

$$k_1 = \frac{2\pi n(\omega)}{\lambda_0}$$

$$E_2^{(св)} = e\cos(2\omega t - k_2 x) \qquad k_2 = \frac{2\pi 2 n(2\omega)}{\lambda_0}$$

внешнее

$$E_2 = E_2^{(1)} + E_2^{(св)}$$




$$\cancel{E_2(t_1 0x)} = E_2(t, x=0) = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_x}{m} + \beta x^2 + \gamma x^3$$

$$E_0 \sim \frac{\beta\alpha^2}{2(\omega-\omega_0)^2}\left[\cos 2(\omega t - k_1 x) - \cos(2\omega t - k_2 x)\right]$$

$$I_2(x) = I_0 \sin^2\left(2\omega t - 2\frac{k_1+k_2}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{k_2-2k_1}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow \langle I_2^{(2)}\rangle \sim \sin^2\left(\frac{k_2-2k_1}{2}x\right)$$