IV семестр

7.02.06

Лекция №1

Оптика

Е.И. Бутиков „Оптика" СПб

Сивухин, „Оптика"

Крауф., „Волновые процессы"

Волн. процесс — процесс распростр. возмущения среды, созданного в каких-то т. п-в

Волны бывают регулярные (т.е. гармонические)
нерегулярные (пр. одиночные — солитоны)

Описание волны. Уравнение волны

$\vec{\xi}(\vec{r},t)$ — ур-ние волны

$\Phi(\vec{\xi})$ — волновое ур-ние

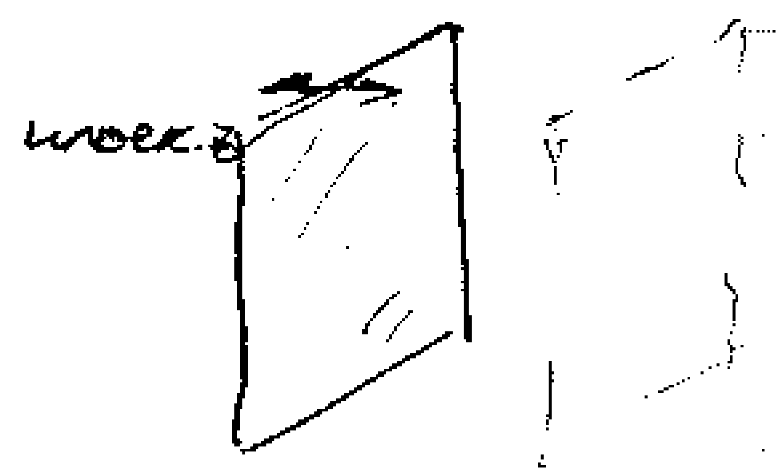
пр $v^2\Delta\vec{\xi}(\vec{r},t)=\ddot{\vec{\xi}}(\vec{r},t)$ (*)

скорость распростр. волн (движение одинак. фазы)

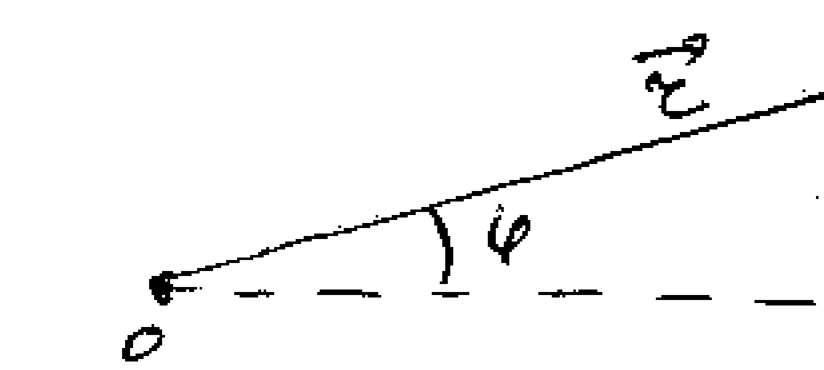
Волны делят на продольные и поперечные

продольные $\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{\xi}$
распрост. смещение

$\vec{v}\perp\vec{\xi}$ — поперечная



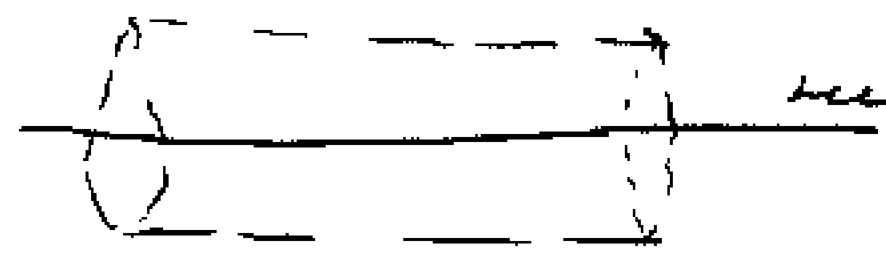
Волны → затухающие

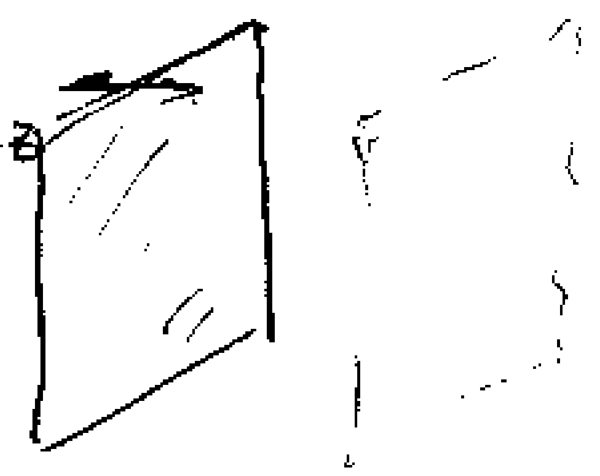


$\vec{\xi}(0,t)=\vec{\xi}_0\cos(\omega t$

амплитуда

лучения
к-то л ур в
гармонические)
очные — солитоны





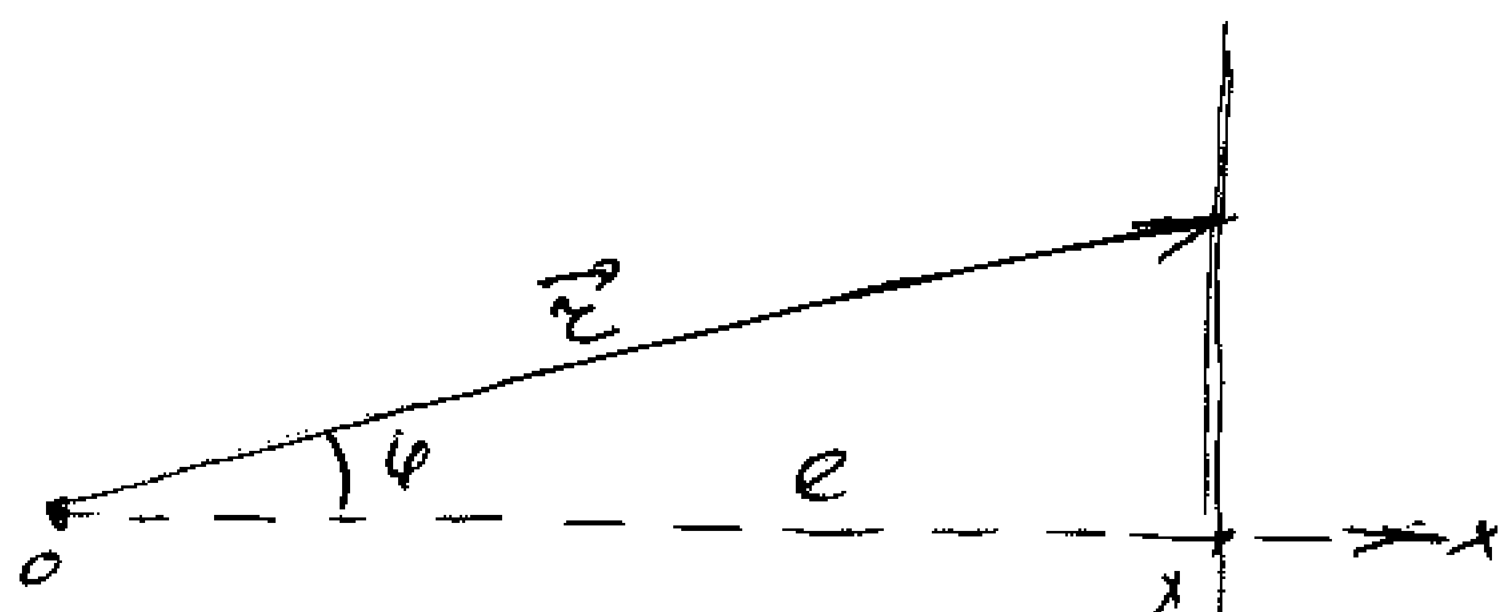
Волны → незатухающие (нет обмена энергией между частицей и средой)
затухающие
нарастающие

Плоская Волна

(бегущая, незатухающая, регулярная)

фазы)

поперечные



$$\vec{\xi}(0,t) = \underbrace{\vec{\xi}_0}_{\text{амплитуда}} \cos(\underbrace{\omega t + \alpha}_{\text{фаза}})$$

α — нач. фаза

волновой фронт — мн-во точ. пр-ва кот разд. части пр-ва где прошел волн. процесс и где его нет волновая поверхность

задержка

$$\vec{\xi}(x,t) = \vec{\xi}_0 \cos(\omega t + \tau + \alpha) = \vec{\xi}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega r\cos\varphi}{v} + \alpha\right) =$$

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{r\cos\varphi}{v} \qquad = \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

скор. распростр.

проекция $\vec{k}$ на x

$\frac{\omega}{v} = k$ волновое число

$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{e}_v$ волн. вектор

т.о.

$$\vec{\xi}(x,t) = \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

подст. ур-ние в ур-е (*)

$$v^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x^2} = \ddot{\vec{\xi}}$$

$$\cdot\, k_x^2 v^2 \vec{\xi}_0 \cos(\omega t - k_x x + \alpha) = \vec{\xi}_0\, \omega^2 \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$$

$$k_x^2 v^2 = \omega^2$$

т.о. $k_x = \pm\frac{\omega}{v}$ ($\pm$ т.к. проекция)

Положим v - фаз. скорость

$$\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha = \text{const} \quad \Big/ \text{дифф по } t$$

$$\omega - (\vec{k}\vec{v}) = 0$$

т.о. $(\vec{k}, \vec{v}) = \omega$

$\vec{k} \parallel \vec{v}$ $\qquad k\, v_{фаз} = \omega$

$$k = \frac{\omega}{v_{фаз}}$$

$k_x > 0 \Rightarrow$ движение в напр. x ~~...~~

$\vec{v} = v\vec{e}_x$

$k_x < 0 \Rightarrow \vec{v} = -v\vec{e}_x$

В общем случае

$$\vec{\xi} = \vec{f}(x + bt)$$

Оператор Лапласа в сферической системе (r-я комп.)

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\vec{\xi}(r,t) = \vec{\xi}_0\left(\frac{r_0}{r}\right)\cos\left(\omega t \underset{\text{сход}}{\overset{\text{расх}}{\mp}} \{\vec{k}\cdot\vec{r}\} + \alpha\right)$$ - сферич. волна

Цилиндрич. волна

$$\vec{\xi}(\rho, t) = \xi_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}\cos\left(\omega t \underset{\text{сход}}{\overset{\text{расх}}{\mp}} k\rho + \alpha\right)$$

Нарастание ($\varkappa < 0$)

<u>Затухающие</u> <u>волны</u>. ($\varkappa > 0$ - коэф. затухания)

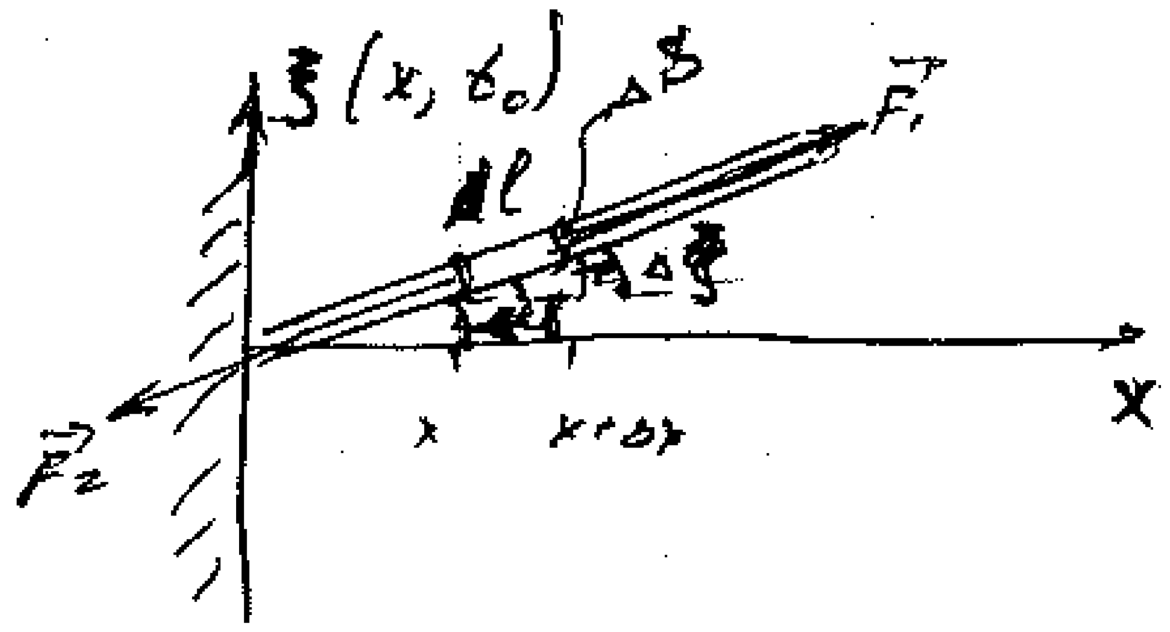
сфер $$\vec{\xi}(r,t) = \xi_0\left(\frac{r_0}{r}\right)e^{\varkappa(r-r_0)}\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

опред. поглощение волны в среде

цилиндр. $\vec{\xi}(\rho, t) = \vec{\xi}_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} e^{\varkappa(\rho-\rho_0)} \cos(\omega t - k\rho + \alpha)$

$\gamma = 2\varkappa$ - коэф. затухания

Колебание струны (шнура)



$F_1 = F_2 = F$

$\Delta\varphi = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \ll 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ - относительное смещение

$\rho \Delta S \Delta x \ddot{\xi} \approx F_{1\xi} + F_{2\xi} \approx F\left(\Delta\xi(x+\Delta x) - \Delta\xi(x)\right) =$

$= F\left(\Delta\xi(x) + \frac{\partial}{\partial x}\Delta\xi \cdot \Delta x - \Delta\xi(x)\right) \approx F \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \Delta x^2$

т.о. $\ddot{\xi} = \frac{F}{\rho \Delta S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

$\ddot{\xi} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

$\ddot{\xi} = v^2 \xi''_{xx}$

"поперечн. $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

прод. $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (аналог)

Энергия плоской волны

$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho \underbrace{\Delta S \Delta x}_{\Delta V} \cdot (\dot{\xi})^2 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\Delta S \Delta x}_{\Delta V} v^2 (\xi'_x)^2 =$

$= \frac{1}{2} \Delta V \rho \left((\xi'_t)^2 + (\xi'_x)^2 v^2\right)$ энергия ед. объема

$$\Delta W_p = \frac{1}{2}k(\Delta\xi)^2 = \frac{k(\Delta\xi)^2(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta S E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\rho}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{2}v^2\rho\,\Delta x\,\Delta S\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

плотность энергии

$$\frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho}{2}\left((\dot\xi)^2 + v^2(\xi'_x)^2\right)$$

<u>14.02.06</u>

<u>лекция №2</u>

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(\dot\xi\right)^2 + v^2\left(\xi'_x\right)^2$$

для плоской волны $\vec\xi(x,t) = \vec\xi_m \cos(\omega t - k_x x + \alpha)$

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho\,\xi_m^2\,\omega^2$$

за период

Поток энергии и плотность потока энергии для плоской волны.

Вектор Умова.

$$\Delta\Phi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}\bigg|_{S_\perp} = \frac{dW}{dt}\bigg|_{S_\perp} = \frac{w\,dV}{dt} = \frac{w\,\Delta S_\perp\,dx}{dt} = w\,\Delta S_\perp v$$

учит.

выр. для полной энергии

$$j = \lim_{\Delta S_\perp \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_\perp} = w v$$ – плотность потока энергии

$$\vec{j} = w\vec{v}$$ – вектор Умова (Умова-Пойнтинга)

$$\langle \Phi \rangle = \langle \oint_S (w\vec{v}, d\vec{S}) \rangle = v \oint_S \langle w \rangle dS = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \oint_S \xi_m^2 \, dS = const$$

по периоду

энергия в ед. вр. через S

а) сферический источник

в правильности этой формулы

$$r^2 \xi_m^2 = const \Rightarrow \xi_m = \xi_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

б) Цилиндрич. источник

$$\xi_m = \xi_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}$$

Комплексное представление.

$$\overset{\circ}{\vec{\xi}} = \vec{\xi}_m e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)} \qquad \xi = Re\left(\overset{\circ}{\vec{\xi}}\right) = \vec{\xi}_m \cdot Re\left(e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)}\right) =$$

$$= Re\left(\vec{\xi}_m \cdot e^{i(\omega t - k_x x + \alpha)}\right)$$

Уравнение неразрывности для плоской волны.

(*) $(\vec{\nabla}, \vec{j}) + \frac{\partial w}{dt} = 0$ ($= q$ - уменьшение или увеличение энерг. волны) для плоской волны

$\vec{j} = w\,\vec{v}$, подст. для распростр. вдоль OX

$\vec{v} = v\,\vec{e_x}$, $w = \frac{1}{2}\rho\left(\xi_t'\right)^2 + v^2\left(\xi_x'\right)^2$

С помощью подст. в ур-е (*) - проверка.

а) $\xi_t' = \pm v \cdot \xi_x'$ б) $\xi_{tt}'' = v^2\,\xi_{xx}''$

Принцип суперпозиции.

волн для небольших отклонений от равновесия

(не волн для полей сильно превосход. внутриатомные)

$\vec{\xi} = \sum_i \vec{\xi}_i$ - принцип суперпозиции

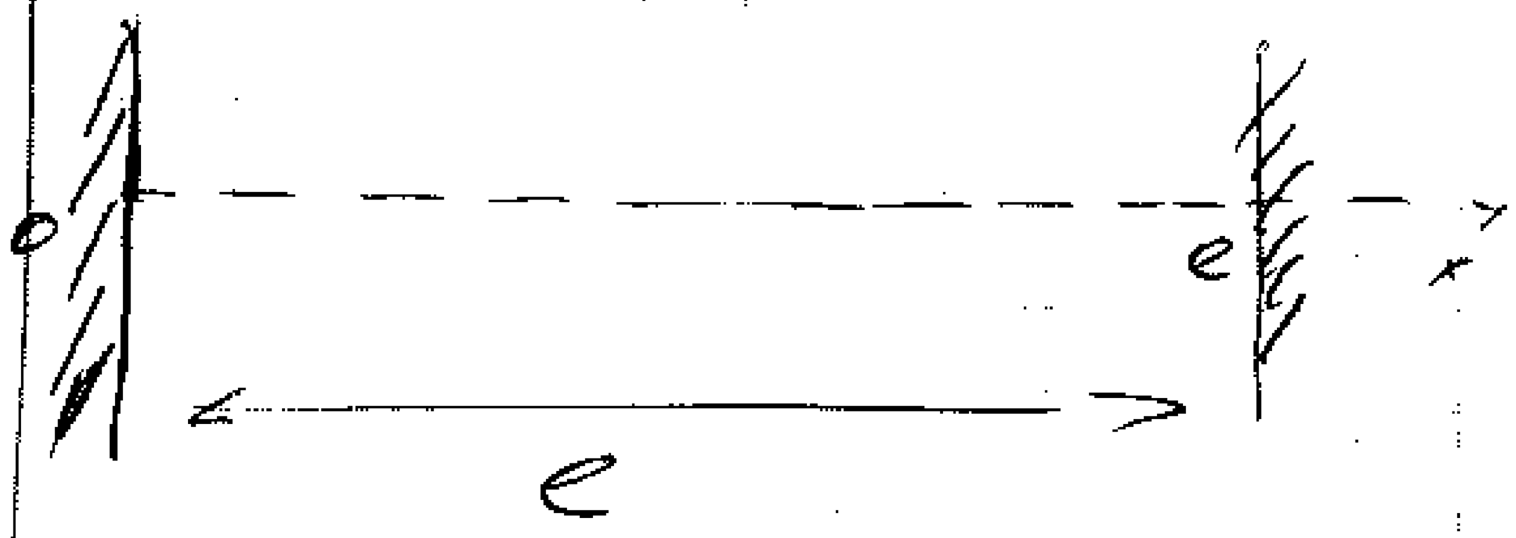
Стоячие упругие волны

Обр. за счет слож. двух волн, имеющих одинак. ξ_m и ω и $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ $(\xi_{m_1} = \xi_{m_2} = \xi_m)$ $(\omega_1 = \omega_2 = \omega)$ $(\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k})$

$\vec{\xi} = \vec{\xi}_m \cos(\omega t - k_x x + \alpha) +$

$+ \vec{\xi}_m \cos(\omega t + k_x x + 0) =$

$= 2\vec{\xi}_m \cos(\omega t + \frac{\alpha}{2}) \cos(kx - \frac{\alpha}{2})$



$\xi(0,t) = \xi(l,t) = 0$

граничные условия

$\forall t$ на левой границе $\xi = 0 \Rightarrow \alpha = \pi$

то. $\vec{\xi} = 2\vec{\xi}_m \sin \omega t \cdot \sin kx$

$\forall t$ на правой границе $\xi = 0 \Rightarrow$

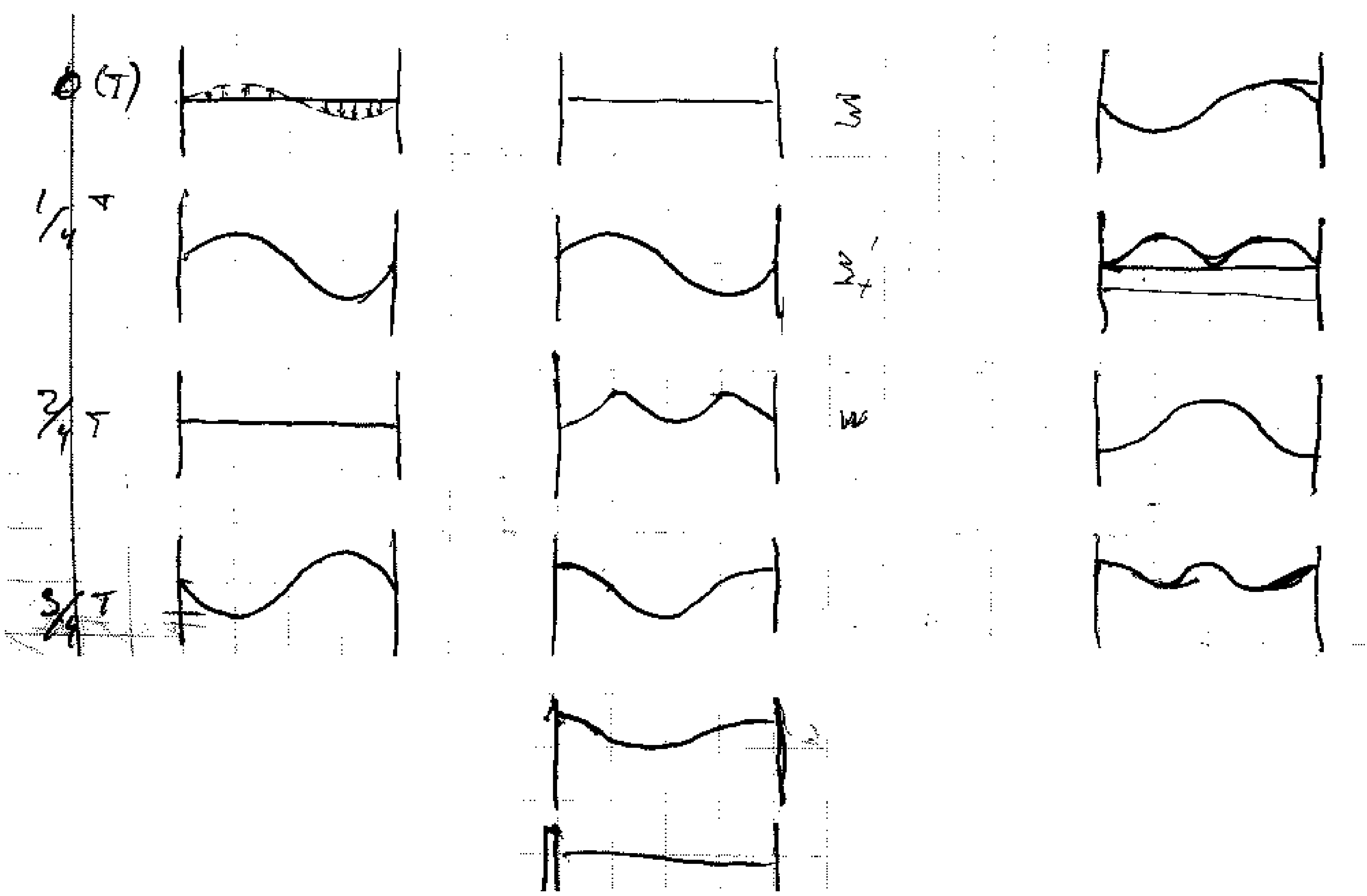
$\vec{\xi}(l,t) = 2\vec{\xi}_m \sin \omega t \cdot \sin k_n l = 0$

k_n – собств. значение волнового числа

то. $k_n l = \pi(n+1)$ $\quad n = 0, \overbrace{1, 2 \ldots}^{\text{гармоники (обертоны)}}$

$n = 0$ – осн. тон (гармоника)

$n < 0$ отбив (повтор) $n > 0$ по этому не исп.



Точки где $\xi = 0$ — узлы смещения

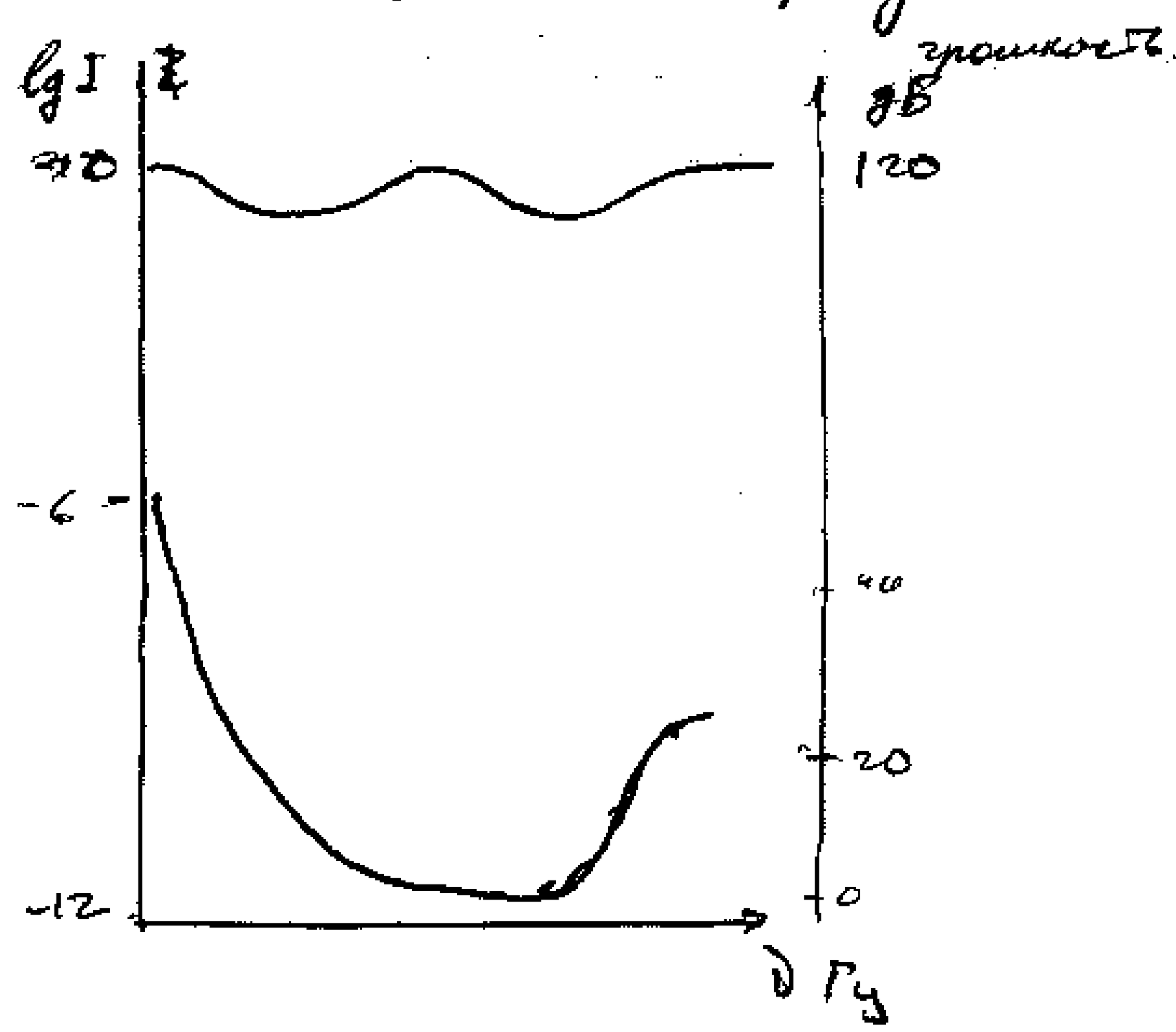
где $|\xi|$ - max — пучности смещения

Интенсивность упругой волны

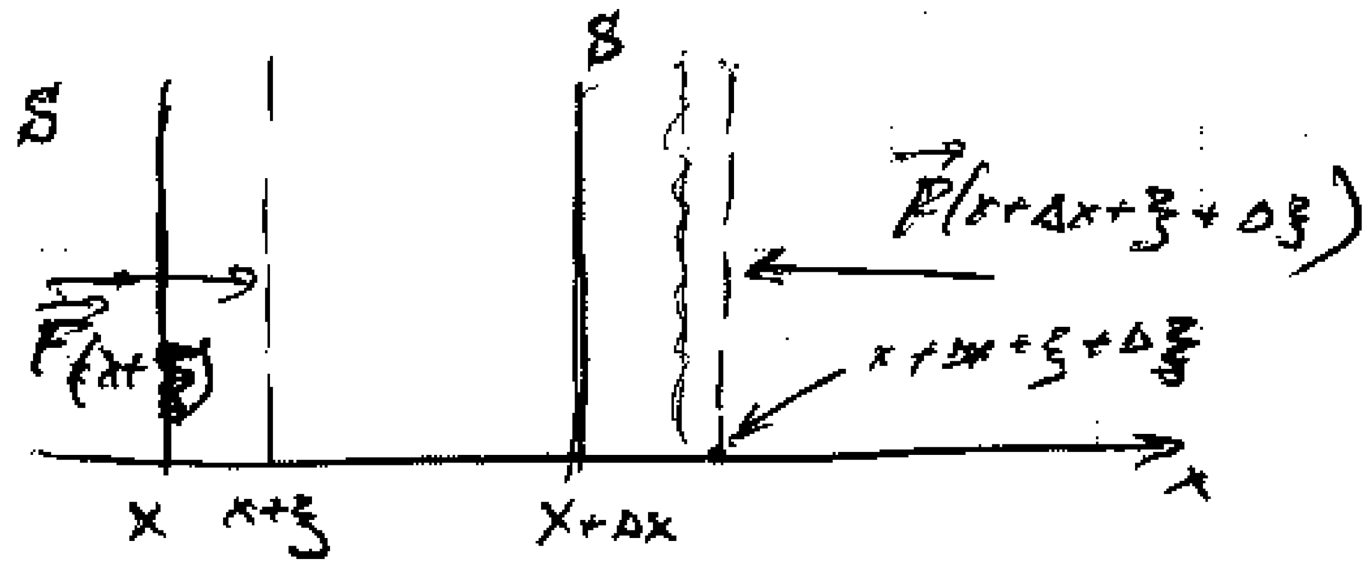
Интенсивность $I = \langle |\vec{j}| \rangle = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \upsilon$

Звуковые упругие незатухающие волны.

Возн. за счет наличия упругих сил между частицами среды



При распростр. звуковой волны процесс адиабат. сжат. или расш. газа. (малое время)



Ур-е движения $\quad \rho S \Delta x \cdot \xi''_{tt} = F_x(x) - F_x(x+\Delta x) \;=$

$$|\xi + \Delta\xi| \ll \Delta x$$

$$= S(\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)) \approx S\left(\Delta p(x) - \Delta p(x) - \frac{\partial \Delta p}{\partial x}\Delta x\right) =$$

$$= -S(\Delta p)'_x \cdot \Delta x \;\boxed{=}$$

$p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$ — невозмущ.

$$\Delta p = \gamma p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} \frac{\Delta V}{V} \approx -\gamma p_0 \frac{V\xi'_x}{V} = -\gamma p_0 \xi'_x$$

$$\Delta V = S(x+\Delta x+\xi+\Delta\xi - x - \xi) \approx \overset{S\Delta x \frac{\partial\xi}{\partial x}}{\cancel{S\Delta x\, \xi'_x}} = V\xi'_x$$

то $\boxed{=}\; p_0 \gamma S \xi''_{xx} \Delta x$

т.о.

$$\rho S \Delta x\, \xi''_{tt} = p_0 \gamma S \xi''_{xx} \Delta x$$

$$\xi''_{tt} = \frac{\gamma}{\rho} p_0 \xi''_{xx}$$

$$\xi''_{tt} = v^2_{зв} \xi''_{xx}$$

$$v^2_{зв} = \frac{\gamma p_0}{\rho} = \frac{\gamma R T}{\mu} = \frac{\gamma k T}{\mu} \quad \text{(адиабат)}$$

$$v^2_{зв} = \ldots = \frac{p_0}{\rho} = \frac{RT}{\mu} = \frac{kT}{\mu}$$

Высота, тембр, громкость звука – самостоят.

21.02.06 Лекция №3

Дополнение к теме звуковые волны.

① $\Delta p = \gamma p_m \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$\Delta p_m = \gamma p_m \xi_m k$

$\frac{\Delta p_m}{p_0} = \gamma^2 \xi_m \frac{2\pi}{\lambda} \ll 1$

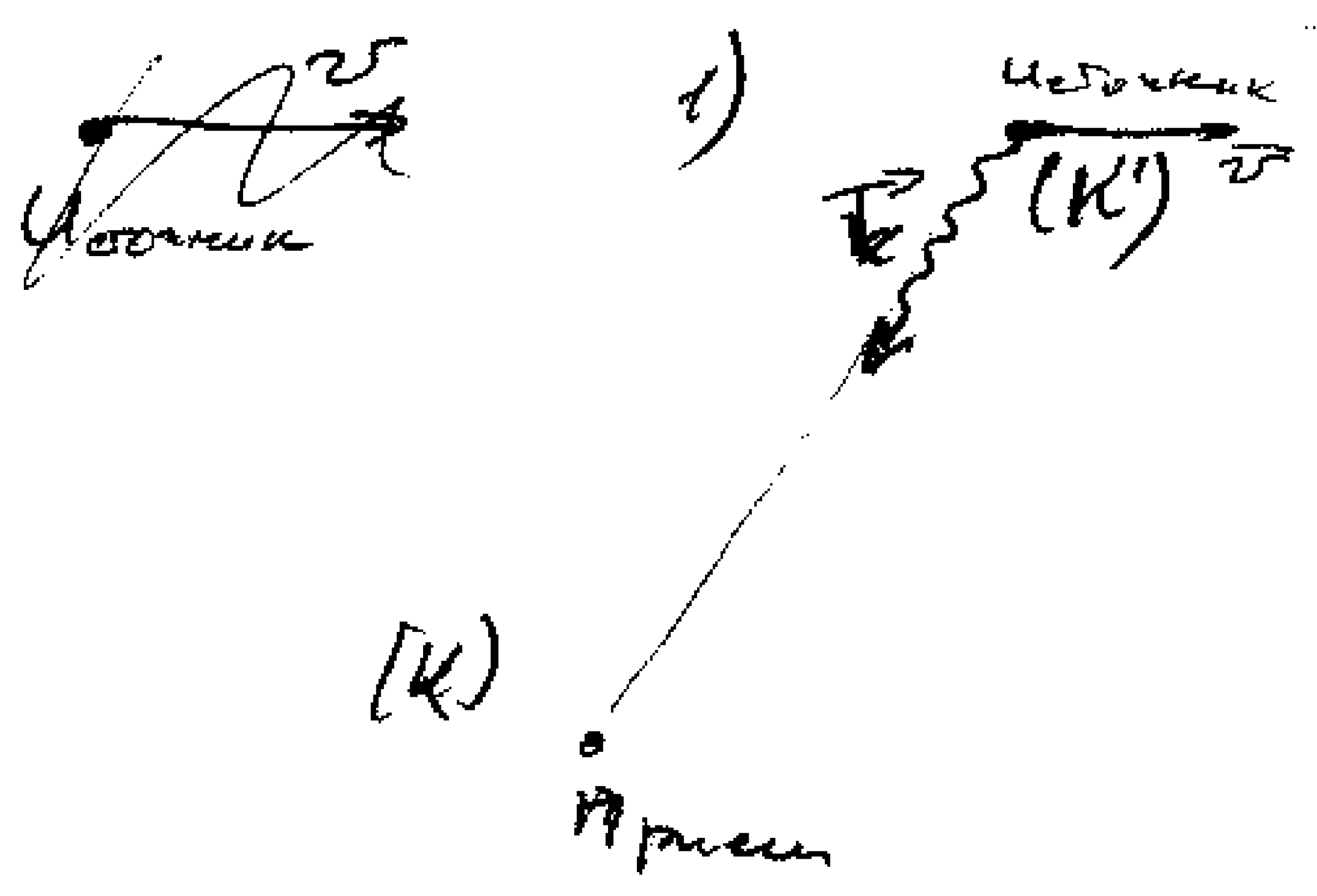
$\frac{\xi_m}{\lambda} \ll 1$

② $I = \langle | w v | \rangle = \frac{\rho \xi_m^2 \omega^2}{2} v = \frac{\rho \Delta p_m^2 \omega^2 v}{2\gamma^2 p_0^2 k^2 \rho} = \frac{\Delta p^2 v^2}{2\rho v^3} =$

$= \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}$

Эффект Доплера

для звуковых волн.



$K: \ \vec{\xi} \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)}$

$K': \ \vec{\xi} \sim e^{i(\omega' t - \vec{k}'\vec{r}' + \alpha')}$

$\vec{v}_u = const \quad 0 < \vec{v}_u < v_{зв}$

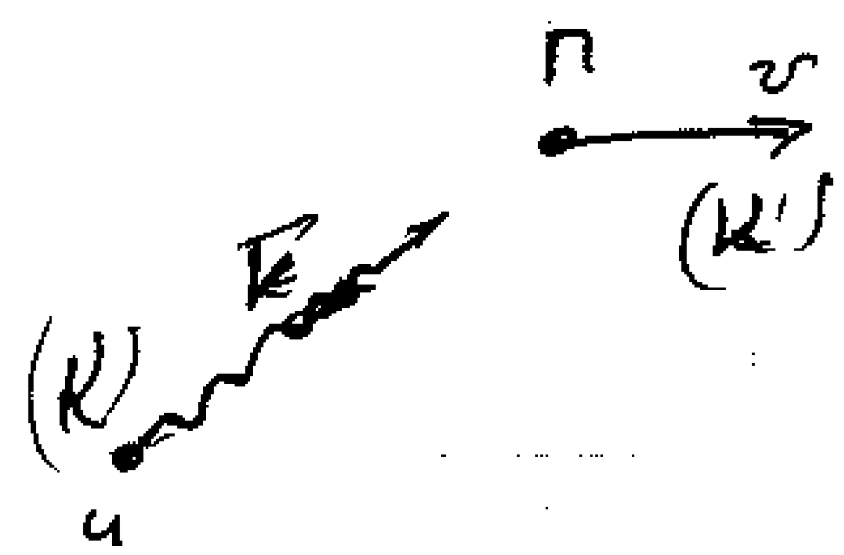
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' + \vec{v}_u t$

Т.О. $\underset{(\text{фаза})}{\varphi} : \omega_u t - \left(\vec{k}, (\vec{r}_0 + \vec{r}\,' + \vec{v}_u t)\right) + \ldots =$

$$= \omega_u t - (\vec{k}\, \vec{v}_u)\, t + \ldots \text{не зав от } t$$

$$\varphi' : \omega'_п t + \ldots \text{не зав от } t$$

$$\omega_п \left(1 - \frac{(\vec{k}, \vec{v})}{\omega}\right) = \underset{2\pi\nu}{\omega_u} \quad , \quad \nu_п = \nu_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}\right)}$$



$$\varphi = \omega_u t - (\vec{k}, \vec{v}_п)\, t + \ldots$$

$$\varphi' = \omega_п t + \ldots$$

$$\omega_п = \omega_u \left(1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}\right)$$

$$\nu_п = \nu_u \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}\right)}$$

$$\nu_п = \nu_u \cdot \frac{1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_u)}{v_{зв}}}{1 - \frac{(\vec{e}_k, \vec{v}_п)}{v_{зв}}}$$

Электромагнитные волны

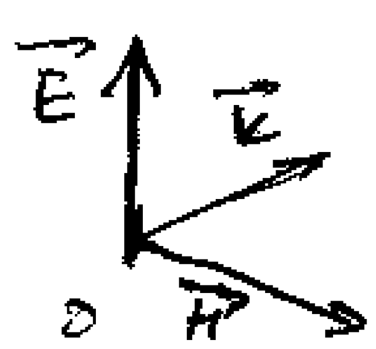
$$v^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad v^2 \Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

опер. Лапласа — лапласиан

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}))} \qquad \vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}))}$$

$$[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-i[\vec{k}, \vec{E}_m] \cancel{e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}} = i\mu\mu_0 \omega \vec{H}_m \cancel{e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}}$$



$$\frac{H_m}{E_m} = \frac{k}{\omega \mu\mu_0} = \frac{1}{v \mu\mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}{\mu\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}$$

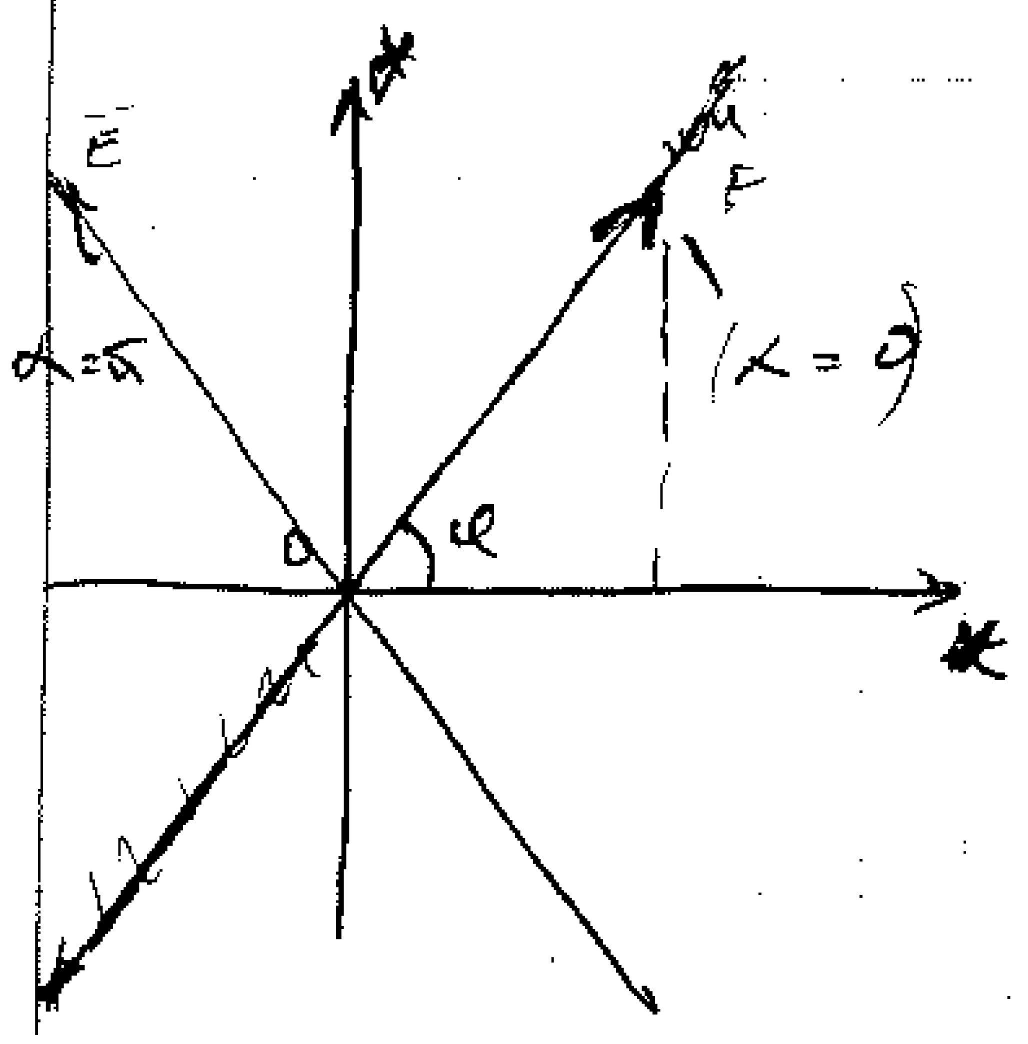
$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_m = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_m$$

Плоская поперечная волна

$$v = \frac{c}{n}$$

n — показат. преломл. т.о. $n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1$

Поляризация света



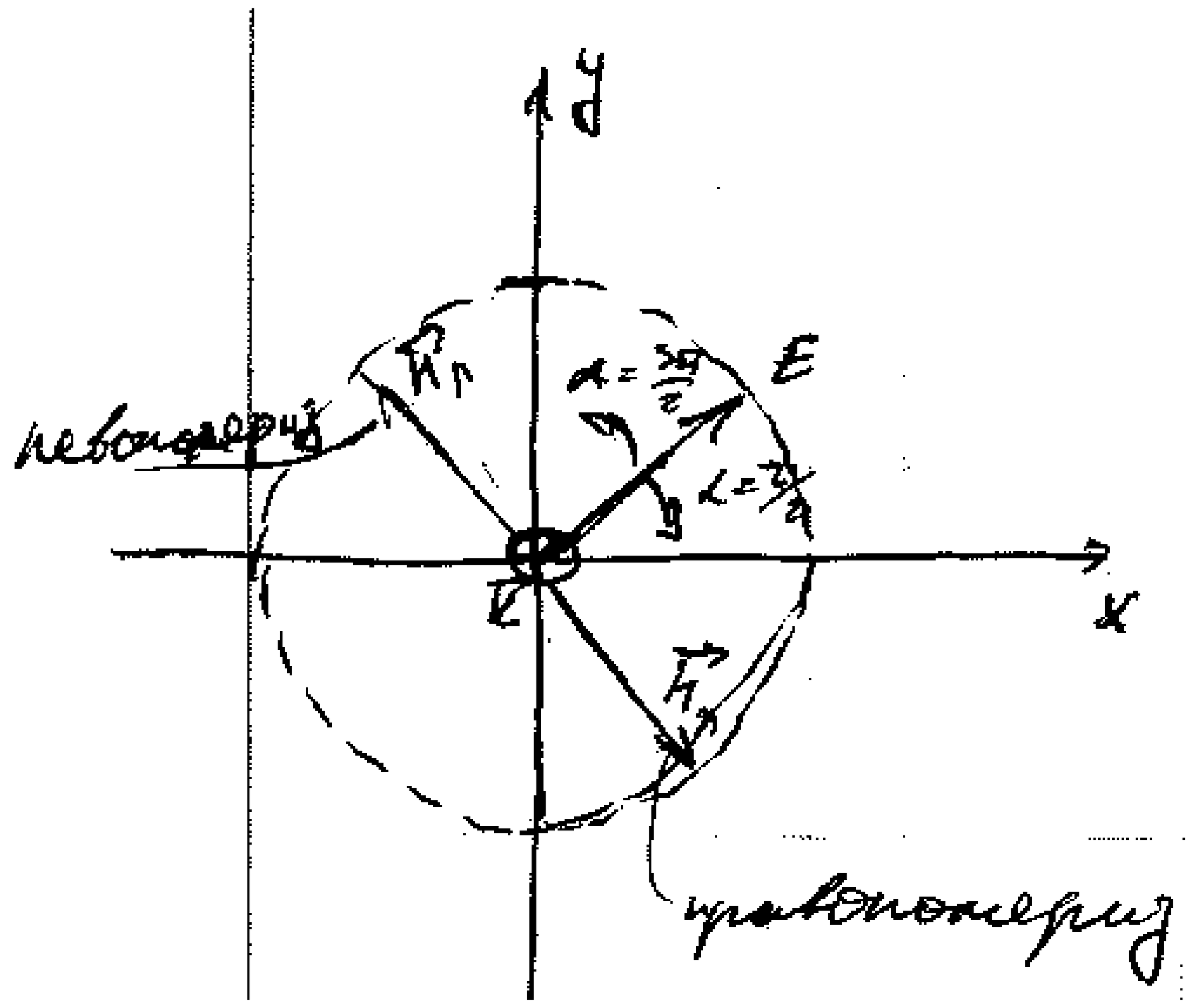
$E_x = E_{m_x}\cos\omega t \cdot \cos\varphi =$

$= E_{m_x}\cos\omega t$

$E_y = E_m \cos(\omega t+\alpha)\cdot\sin\varphi =$

$= E_{m_y}\cos(\omega t+\alpha)$

а) $\alpha = 0,\ \alpha = \pi$ – плоскополяриз



Рассм

б) $E_{mx} = E_{my}$

$\alpha = \pi/2\ ,\ \frac{3\pi}{2}$

круговые поляризация

в) $E_{mx} = E_{my}$ V $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

эллиптические поляриз.

Классические опыты

с электромагнитными ~~[illegible]~~ волнами

(самостоят)

Уравнение непрерывности

(теорема Пойнтинга)

$$\begin{cases} \left([\vec{\nabla}_E, \vec{E}], \vec{H}\right) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{H} & (\dots, \vec{H}) \\ \left([\vec{\nabla}_H, \vec{H}], \vec{E}\right) = \left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \vec{E} & (\dots, \vec{E}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\vec{\nabla}_E, [\vec{E}, \vec{H}]\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t} w_H \\ -\left(\vec{\nabla}_H, [\vec{E}, \vec{H}]\right) = P_{уд\,э} + \dfrac{\partial}{\partial t} w_E \end{cases} \Bigg| \ominus$$

$$\left(\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]\right) = -\frac{\partial}{\partial t} w_{H+E} - P_{уд\,э}$$

$[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{S}$ – вектор Пойнтинга $\quad \vec{S} \uparrow\uparrow \vec{k}$

объемная плотн. энергии распростр. в напр. волны

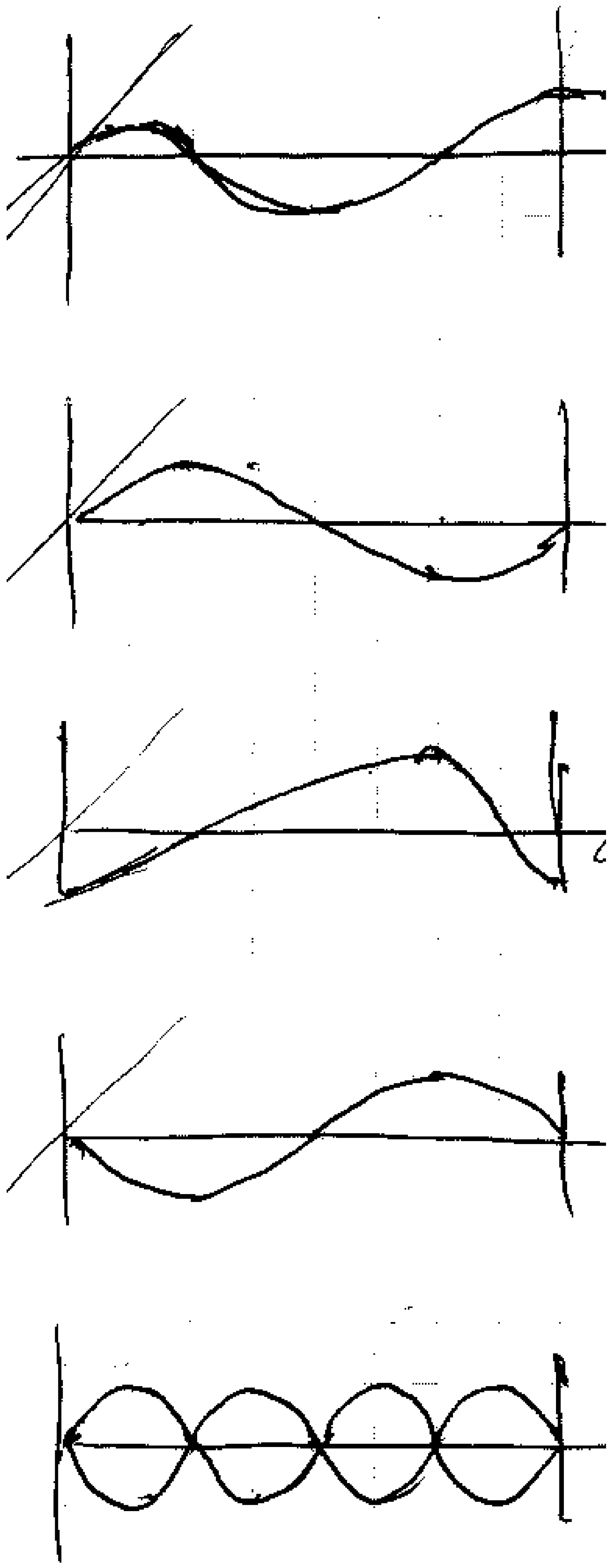
$$\vec{S} = w_{H+E} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ c \text{ в вакууме}}}{\vec{v}}$$

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{S}\right) + \frac{\partial}{\partial t} w_{H+E} = -P_{уд\,э}$$

потеря энергии волной

Стоячая электромагнитная волна

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad \vec{E}_{1m} = \vec{E}_{2m} = E_m$$



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$$

$$= 2E_m \sin(\omega t)\cdot\sin(kx)$$

$$k = k_n = \frac{\pi(n+1)}{\Delta}$$

28.02.06.

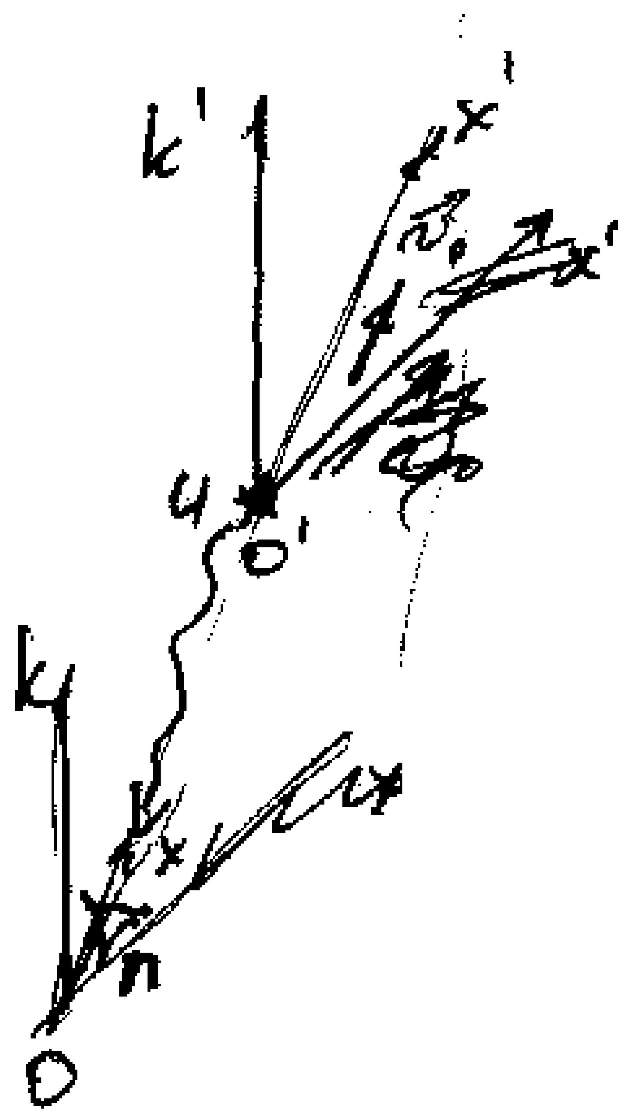
Лекция №

Эффект Доплера для плоской электромагнитной волны.

(продольный эффект Доплера)

Рассм. две сист. отсчета

$k'_x>0$ — «−»
$k'_x<0$ — «+»
$\beta=\frac{v_0}{c}$



в K $\quad \hat{\vec E}=\hat{\vec E}_m e^{i(\omega t-k_x x)}$

в K' $\quad \hat{\vec E}'=\vec E_m e^{i(\omega' t'-k'_x x')}$

Фаза: $$\omega' t' - k'_x x' = \omega' \frac{t - x\frac{v_0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - k'_x \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

преобр. согл. Лоренца

$$=\omega' t\,\frac{1\pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\dots$$

Сравниваем $$\omega t = \omega' t\,\frac{1\pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

т.о. $$\omega=\omega'\frac{1\pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \omega' \frac{1\pm \frac{v_0}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v_0}{c}\right)\left(1+\frac{v_0}{c}\right)}} =$$

$$=\begin{cases}\omega'\sqrt{\dfrac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}} & \text{для «+»}\\[2ex] \omega'\sqrt{\dfrac{1-\frac{v_0}{c}}{1+\frac{v_0}{c}}} & \text{для «−»}\end{cases} =$$

$$=\omega'\sqrt{\frac{1\pm \frac{v_0}{c}}{1\mp \frac{v_0}{c}}}\approx \omega'\left(1\pm \frac{v_0}{c}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega'}=\pm\frac{v_0}{c}$$

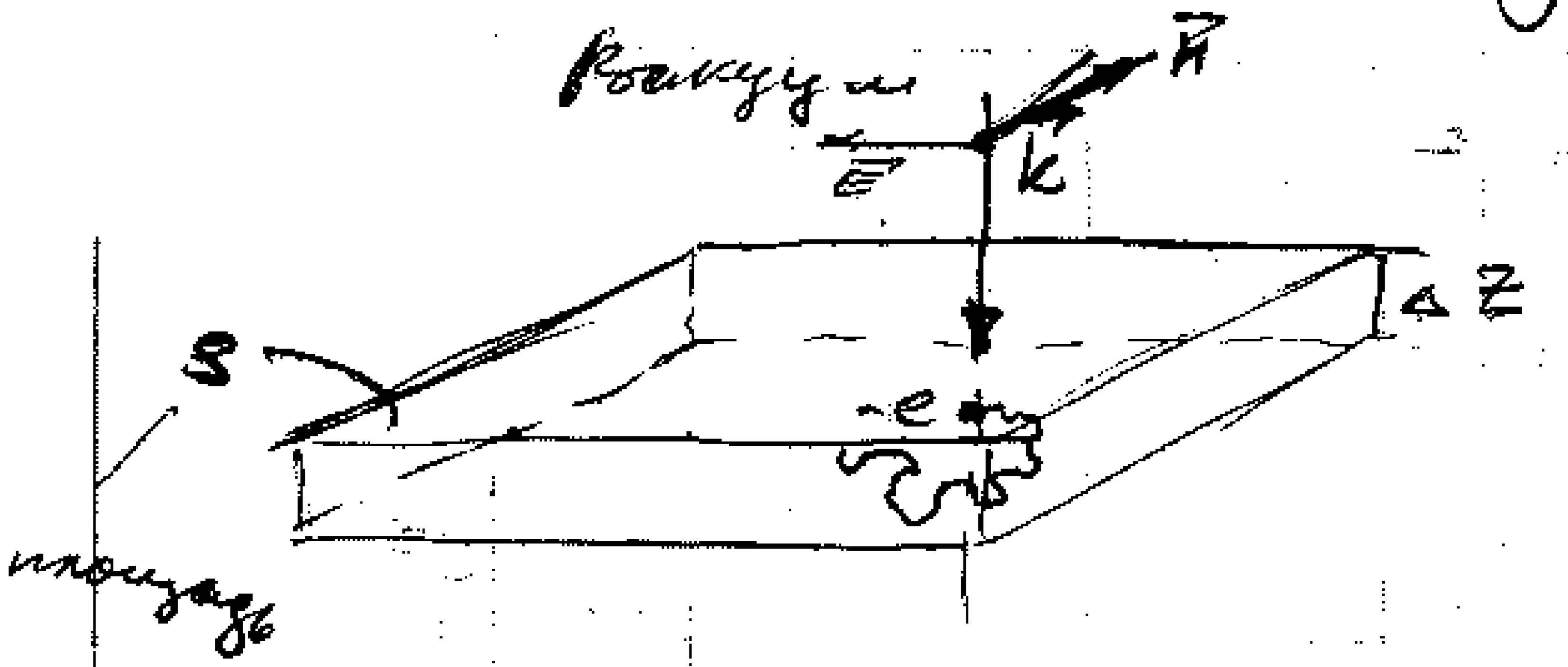
$\Delta\omega=\omega-\omega'$

красное смещение

Хаббл 1929 г. красное смещение

поперечн: $\omega = \omega'\sqrt{1-\beta^2}$

Импульс и давление электромагнитной волны на стенку.



$$\vec j = \sigma \vec E$$

$$\Delta F = [\vec j, \vec B]\Delta V$$

$$\Delta W = (\vec j, \vec E)\Delta V \Delta t$$

в первый момент времени $\vec j \parallel \vec E$, $\vec j \perp \vec B$

$$\begin{cases} |\Delta F| = |[\vec j, \vec B]|\Delta V \\ |\Delta W| = |(\vec j, \vec E)\Delta V \Delta t| \end{cases}$$

B, E — амплит. зн.

$$\frac{\Delta F}{\Delta W} = \frac{jB\Delta V}{jE\Delta V\Delta t} = \frac{B}{E\Delta t}$$

a) $$\frac{\Delta F}{w\Delta z\cdot S} = \frac{B}{E\Delta t}$$

w — энергия $\quad v = \frac{c}{n}$, показ. преломл.

$$\frac{\Delta F}{S} = p_{давл} = \frac{\mu\mu_0 H}{E}\underbrace{\frac{\Delta z}{\Delta t}}_{v}\cdot w$$

т.о. $$p_д = \frac{\mu\mu_0 H}{E} w\cdot v = \frac{\mu\mu_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E}{\sqrt{\mu\mu_0}\,E}\, w v =$$

$$= w v\underbrace{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}_{=\frac{1}{v}} = w\frac{v}{v} = w$$

т.о. $p_g = w = \frac{|S|}{v}$

Считаем, что всё энергия поглощается.

if Есть отражение $\tau_{отр.} + \rho_{погл} = 1$

$$p_g = w(2-\tau) = w(\rho+1)$$

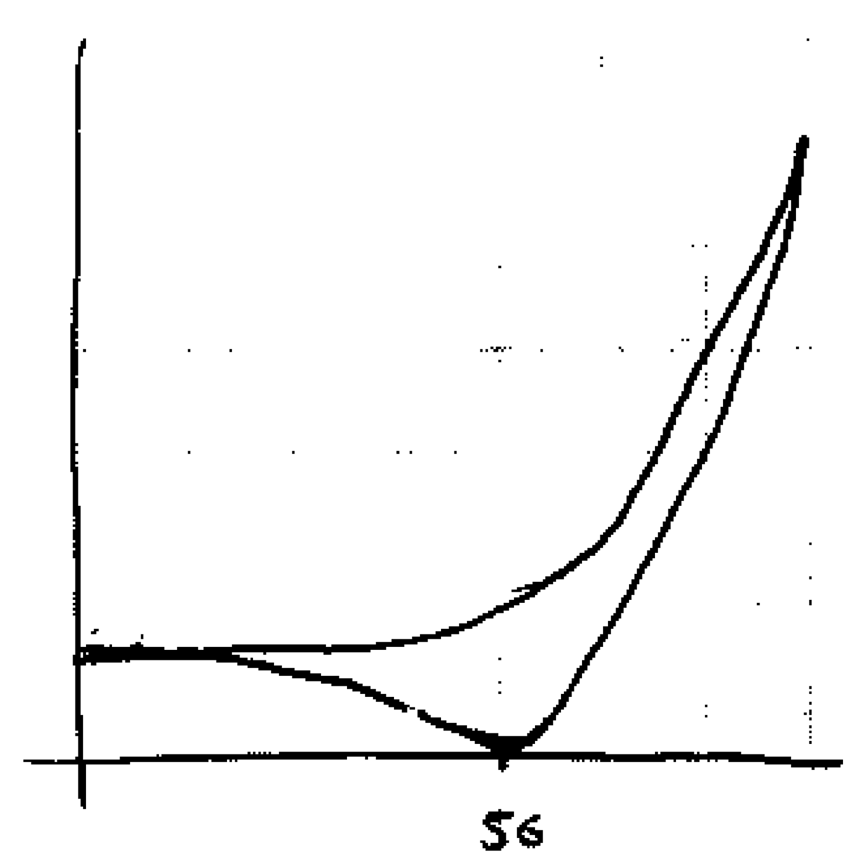
т.о. if $\theta \neq 0$ $\Rightarrow$ $p_{g\theta} = w(\rho+1)\cos\theta$

угол пад

б) $$\frac{\Delta p_{имп}}{\Delta t, w \Delta Z S} = \frac{B}{E \Delta t}$$

$$\left(\frac{\Delta p_u}{\Delta V} = \frac{w}{v} = \frac{S}{v^2}\right.$$

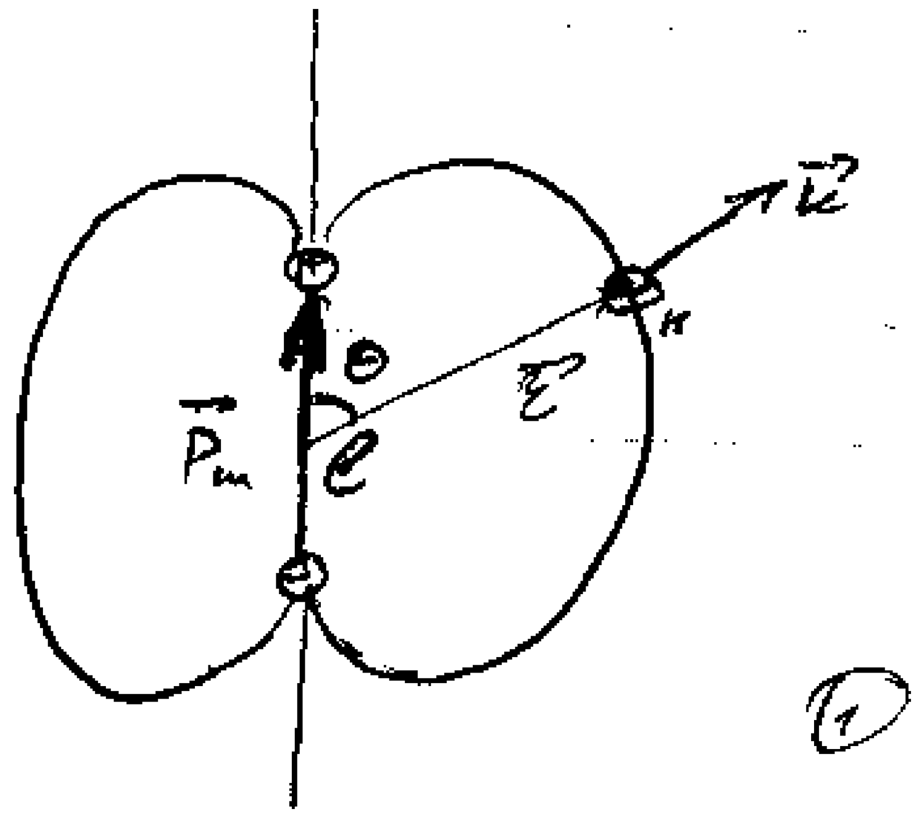
$$k = \frac{S}{v^2}$$



Бутиков „Оптика"

Излучение колеблющегося диполя

$\vec{p} = \vec{p}_m \cos\omega t$



$[\nabla, \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$[\vec{k}, \vec{H}] = \omega E$

$\mu, \varepsilon = 1$

① $\vec{E} = \frac{k}{\omega}[\vec{H}, \vec{e}_r] = \frac{1}{c}[\vec{H}, \vec{e}_r]$

② $\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r] \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]$

$S = [\vec{E}\vec{H}]$

7.03.06

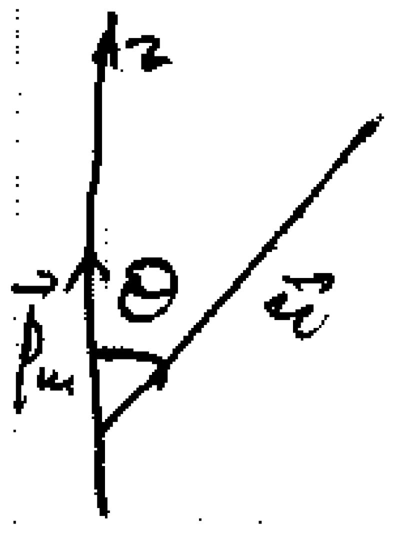
Лекция №

$\vec{E} = \frac{1}{c\varepsilon_0}[\vec{H}, \vec{e}_r]$, $\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]$

т.о. $\vec{H} = \frac{[\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r]}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c^3 r}$

$[\vec{E}, \vec{H}] = S = \frac{1}{c\varepsilon_0}[[\vec{H}, \vec{e}_r], \vec{H}] = \frac{H^2\vec{e}_r}{c\varepsilon_0}$

$\ddot{\vec{p}} = -\vec{p}_m \omega^2 \cos\omega t$



$$\vec H = \vec H_m \left(\frac{r_0}{r}\right) \sin\theta \cos\omega t$$

$$\vec E = \vec E_m \left(\frac{r_0}{r}\right) \sin\theta \cos\omega t$$

r_0 – расст. на кот. амплитуда E_m (H_m)

при $r \gg \lambda$, $r \gg l$ (волновая зона)

Мощность, излучаемая диполем

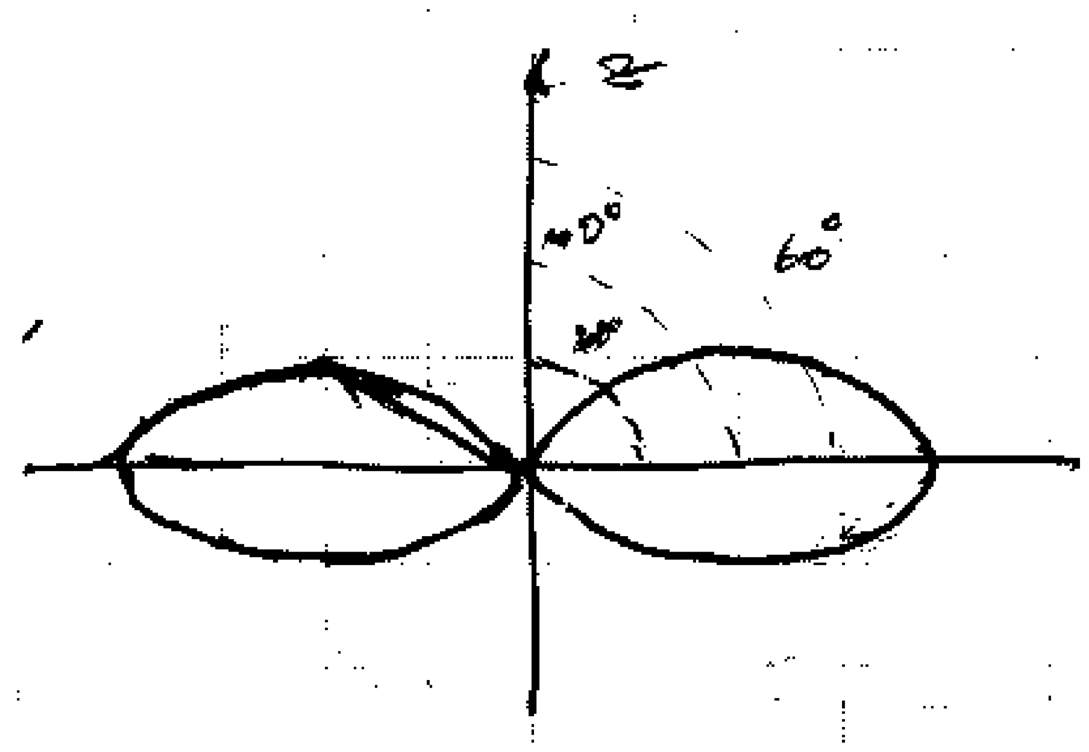
$$\underline{P} = \oint\limits_{S} \langle |\vec S| \rangle \, dS = \frac{p_m^2 \omega^4 \overbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt}^{T/2} \; r^2 \overbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta}^{4/3} \int_0^{2\pi} d\varphi}{c^3 \varepsilon_0 (4\pi)^2 r^2 T} =$$

площадь

$$= \frac{p_m^2 \omega^4 \, 4\pi \cdot 2}{16 \pi^2 \cdot 2 \cdot 3 \varepsilon_0 c^3} = \frac{p_m^2 \omega^4}{12 \pi \varepsilon_0 c^3}$$

т.о. $|\vec S| \sim \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \cos^2\omega t$

Диаграмма излучения диполя



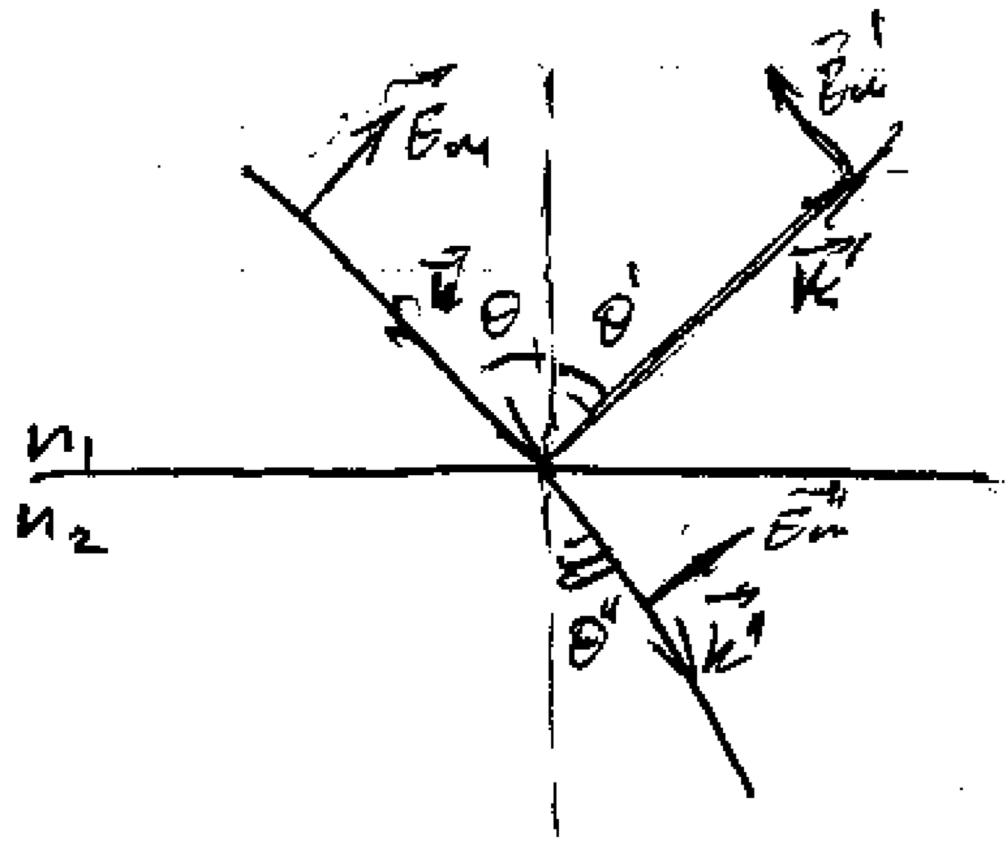
Закон рассеяния Релея

$P \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$ ускоренно движ. зар. частица, излучают

Излуч. Вавилова - Черенкова. $v \geq \frac{c}{n}$

З-н. отражения и преломления эл.магн. волн

a) коэф. отражения и пропускания волны ~~для~~ на идеальной границе двух диэлектриков (~~для~~ плоской волны)



$I \sim \frac{|\vec{E}_m|^2}{2} = \frac{E_m^2}{2}$, $\frac{\vec{E}_m \vec{E}_m^*}{2}$

поглощения нет:

$$\hat{\vec{E}}_m e^{i(\omega t - k_x x)} + \hat{\vec{E}}_m' e^{i(\omega' t - k_x' x)} = \hat{\vec{E}}'' e^{i(\omega'' t - k_x'' x)}$$

(сниму е)

1) $\omega = \omega' = \omega''$
2) $k_x = k_x'$ $\Rightarrow$ $\frac{\omega \sin\theta\, n_1}{c} = \frac{\omega \sin\theta'}{c}$
3) $k_x = k_x''$

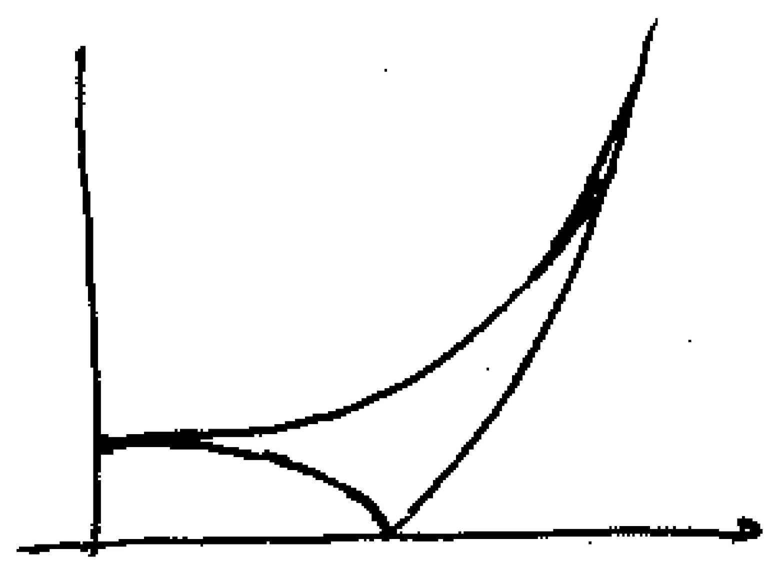
$$\frac{\omega n_1 \sin\theta}{c} = \frac{\omega n_2 \sin\theta''}{c} \qquad \theta' = \theta''$$

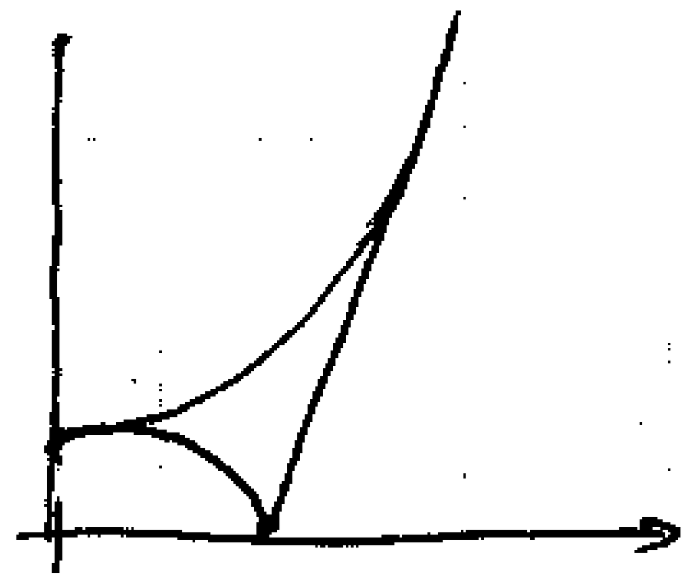
т.о. $\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n$

и $\sin\theta'' = 1 \Rightarrow \sin\theta = n$

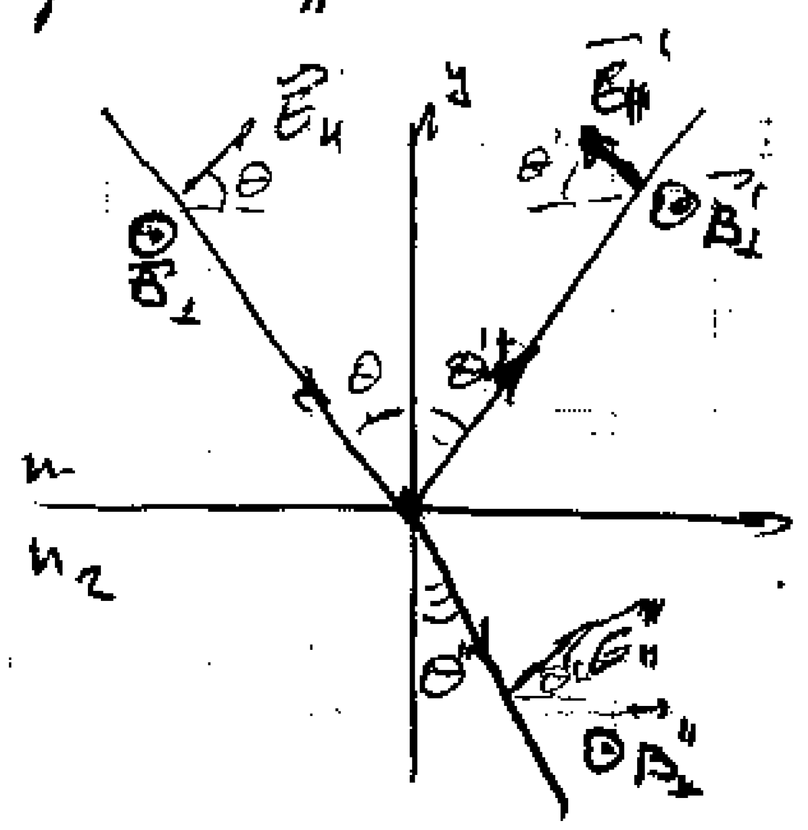
б) З-ны для поляризованных волн.

$\vec E = \vec E_\parallel + \vec E_\perp$ (Формулы Френеля)





б') $\vec E = \vec E_\parallel$



$\vec B = \vec B_\perp$

$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$

$E\cos\theta - E'\cos\theta' = E''\cos\theta''$

if $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow B_{\tau_1} = B_{\tau_2}$ т.е. $B + B' = B''$

$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \Rightarrow B = \frac{\alpha}{n_1}E$ $\quad B' = \frac{\alpha}{n_1}E'$

$\frac{\alpha}{n_1}E + \frac{\alpha}{n_1}E' = \frac{\alpha}{n_2}E'' \Rightarrow E'' = \frac{n_2}{n_1} = n\,(E + E')$

$n(E\cos\theta - E'\cos\theta')$ $\quad E = E'\cos\theta''$

$E(n\cos\theta - \cos\theta') = E'(n\cos\theta' + \cos\theta'')$

$\frac{E'}{E} = \frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta + \cos\theta''}$

$$\frac{\sin\theta\cos\theta - \cos\theta''\sin\theta''}{\sin\theta} > 0$$

14. 03. 06

Лекция №6

Формулы Френеля

$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}$

более оптич. плотная среда

$$\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta' + \cos\theta''}$$

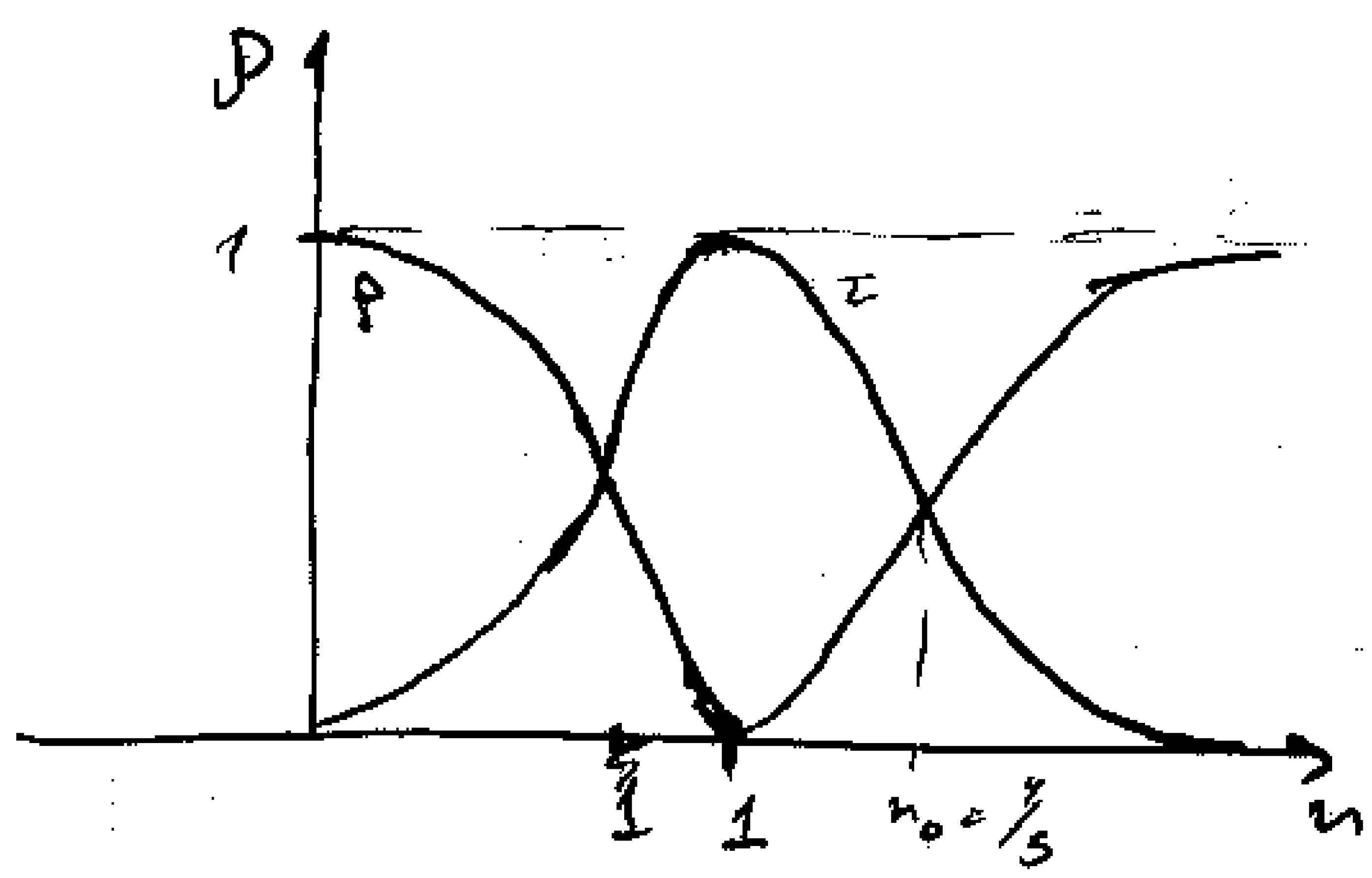
$> 0 \quad (n > 1) \to \Delta\varphi = \pi$

$< 0 \quad (n < 1) \to \Delta\varphi = 0$

$$\rho = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \left(\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}\right)^2 = \left(\frac{n\cos\theta - \cos\theta''}{n\cos\theta' + \cos\theta''}\right)^2 \Rightarrow \theta = 0$$

коэф. отраж.

$\theta' = \theta'' = 0 \Rightarrow \rho_{\parallel} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad \tau_{\parallel} = 1, \ \rho_{\parallel} = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$



$\rho_{\parallel} = 0: \ n\cos\theta - \cos\theta'' = 0$

$n\sin\theta'' - \sin\theta' = 0$

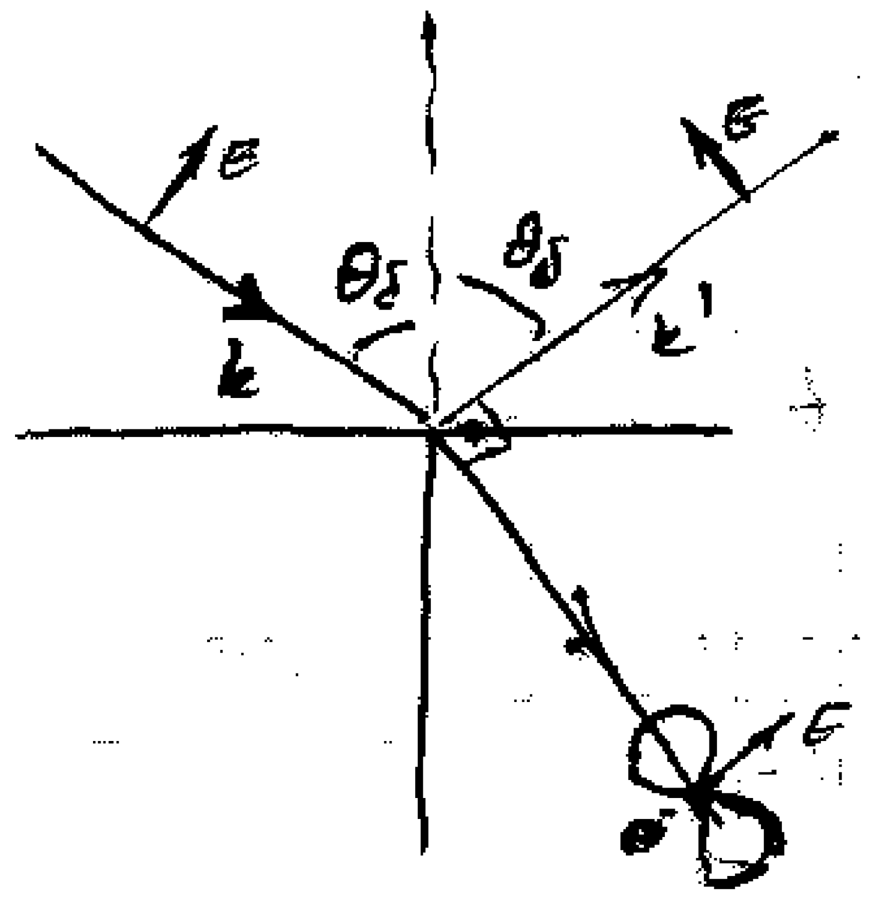
Угол Брюстера.

з-н преломл.

(при этой поляризации отражение отсутствует)

$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \qquad \theta'' = \frac{\pi}{2} - \theta \to \quad n\cos\theta = \sin\theta$

т. о. $\operatorname{tg}\theta_Б = n$

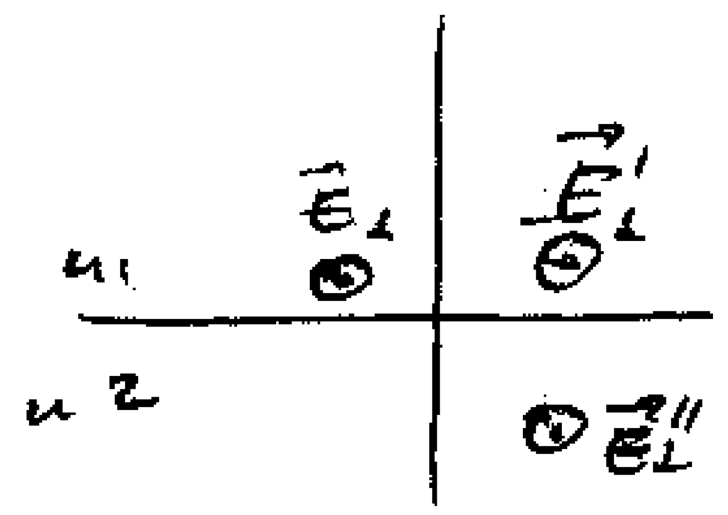


$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$$

$$\frac{\vec{E}'_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{-n\cos\theta'' - \cos\theta}{n\cos\theta' - \cos\theta}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \rho_{\perp} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

угол Брюстера отсутств.

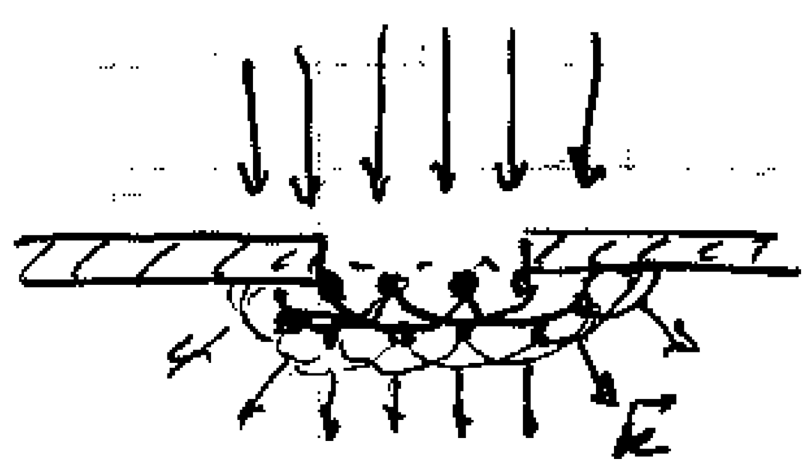


$$\begin{cases} n > 1 & \Delta\varphi = \pm\pi \\ n < 1 & \Delta\varphi = 0 \end{cases}$$

Геометрическая оптика

и Фотометрия

принцип Гюйгенса



каждая точка поверхности волн. фронта, является источником вторичных сферических волн

т.о. волна огибает препятствие

параметр Френеля.

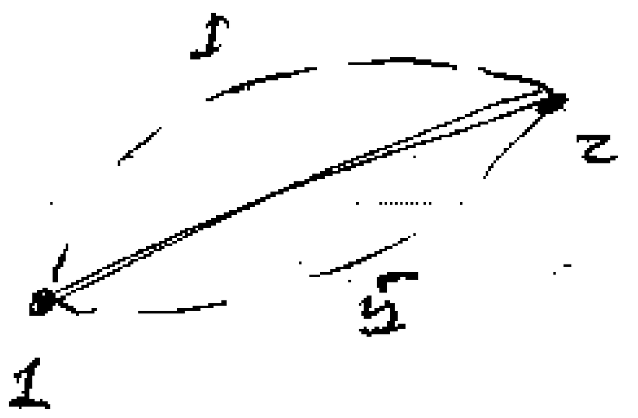
$$\frac{b^2}{L\lambda}$$

парам. Френеля

b – размер препятствия
L – расстояние до объекта
λ – длина волны

если $\frac{b^2}{L\lambda} \gg 1$ имеет место геом. оптика

Принцип Ферма.



$$\tau_{1,2} = \int_1^2 dt = \min \quad \text{if } n = const$$

$$\tau_{12} = \int_1^2 \frac{dl\,dt}{dl} = \int_1^2 \frac{dl}{v} =$$

$$= \frac{1}{c}\int_1^2 n(l)\,dl = \min$$

свет распрост. по траектории с миним. временем

$$n(l)\,dl = ds \qquad \int_1^2 ds = \Delta_{12}$$

Таутохронные лучи $\tau_{12}^{I} = \tau_{12}^{II}$

Идеальная центрированная оптическая система

(центр - оптическая ось)

H и H' - главные плоскости: котор. увеличение между гл. плоскостями одинаковое $\frac{y}{y'} = 1 = \beta$

Узловые плоскости N и N'

сопряженные лучи имеют один и тот же угол по отношению к оптической оси

F и F' - фокальные пл-ти: || лучи после сист. пересекаются в этих пл-тях

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \Rightarrow -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} > 1$$

+ для точки справа

− для точки слева

Формула Ньютона

$$\frac{y}{-y'} = \frac{x}{f} \text{ (слева)}; \quad \frac{y}{-y'} = \frac{x'}{f'} \text{ (справа)}$$

$$s = x + f \Rightarrow x = s - f \rightarrow \quad xx' = ff'$$

$$s' = x' + f'; \quad x' = s' - f' \rightarrow$$

$$(s+f)(s'-f') = ff' \Rightarrow \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

Интерференция монохроматических плоских волн.

Тем. когерентность

Когерентность − согласованность колеб. в волне и эффекты, кот. к этому приводят

Природные источники света некогерентны

Интерференция − перераспределение интенсивности волн

(не связано с нарушением з-на сохр. эн.)

обычно наб. расчет от дискретного ряда источников

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{1m} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \alpha_1) + \vec{E}_{2m} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \alpha_2)$$

$$I \sim \langle (\vec{E})^2 \rangle = \langle \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \frac{2}{2}(\vec{E}_{1m}\vec{E}_{2m})\left(\cos\underbrace{\left((\omega_1+\omega_2)t - (\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1+\alpha_2\right)}_{\sigma} + \cos\underbrace{\left((\omega_1-\omega_2)t + (\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1-\alpha_2\right)}_{\delta}\right)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\chi \cos\delta$$

$$\delta = (\omega_1 - \omega_2)t + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \alpha_1 - \alpha_2$$

21.03.06

Лекция №

Л.Д. Горбачёв „Элементы волновой оптики. Распространение света"

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\chi \cdot \langle\cos\delta\rangle_{t_{\text{прибора}}}$$

$$\delta = |\Delta\omega| \cdot t + k(r_1 - r_2) + \Delta\varphi$$

1) if $\chi = \frac{\pi}{2}$ то $I = I_1 + I_2$ - нет интерференции

2) $\chi \neq \frac{\pi}{2}$, $\chi = 0$ $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \le I \le (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

а) $0 \le \delta \le \pi$ $-1 \le \cos\delta \le 1$ случайно

$\langle\cos\delta\rangle_{t_{\text{приб}}} = 0 \Rightarrow I_\Sigma = I_1 + I_2$ нет интерф.

б) $\Delta\omega \neq 0$ время когерентности - время за которое фаза

$|\Delta\omega| t \le \pi$

$$\Delta\tau_{\text{ког}} \le \frac{\pi}{|\Delta\omega|} = \frac{\pi}{2\pi c\left|\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right|} = \frac{\lambda^2}{2c|\Delta\lambda|}$$

if $\lambda_1 \approx \lambda_2$, то $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2_{\text{средн}}$

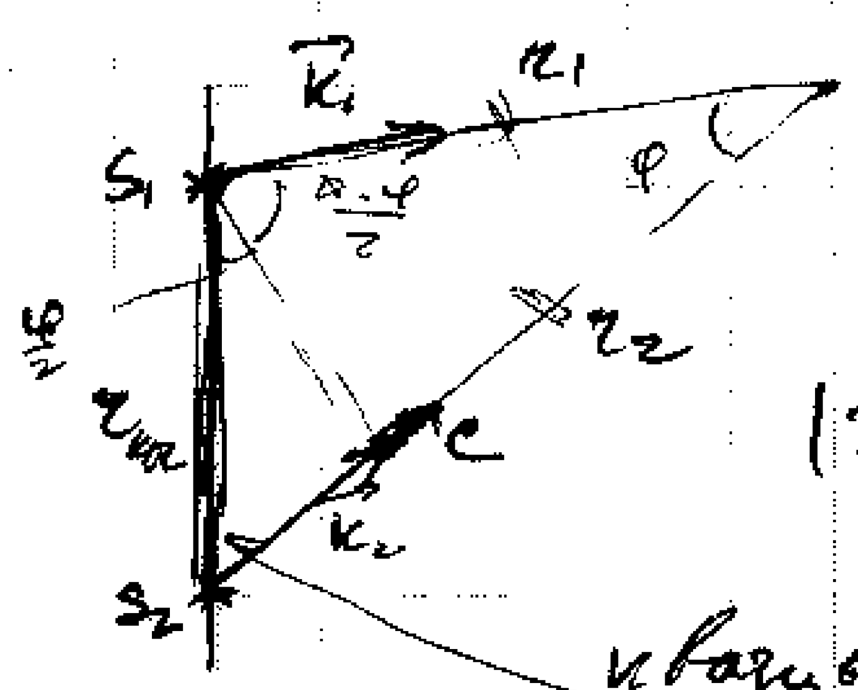
длина ког - длина на кот волны приобретают соотв. max фазу π

$l_{ког} = c\,\tau_{ког} = \dfrac{\lambda^2}{2|\Delta\lambda|}$

$\tau_{приб} \gg \tau_{ког}$

в) $\Delta\omega = 0$
$\Delta\varphi = 0$

$k|r_1 - r_2| \le \pi$ для сфер.



$[S_2C] = r_{ког}\sin\frac{\varphi}{2}$

$|r_1 - r_2|$ $\quad \varphi \ll 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} r_{ког} \sin\frac{\varphi}{2} \le \pi$

квазиволновая поверхность $\quad \lambda_{S_1} = \lambda_{S_2}$

~~$\tau_{ког}$~~ $\quad r_{ког}\,\varphi \le \lambda$

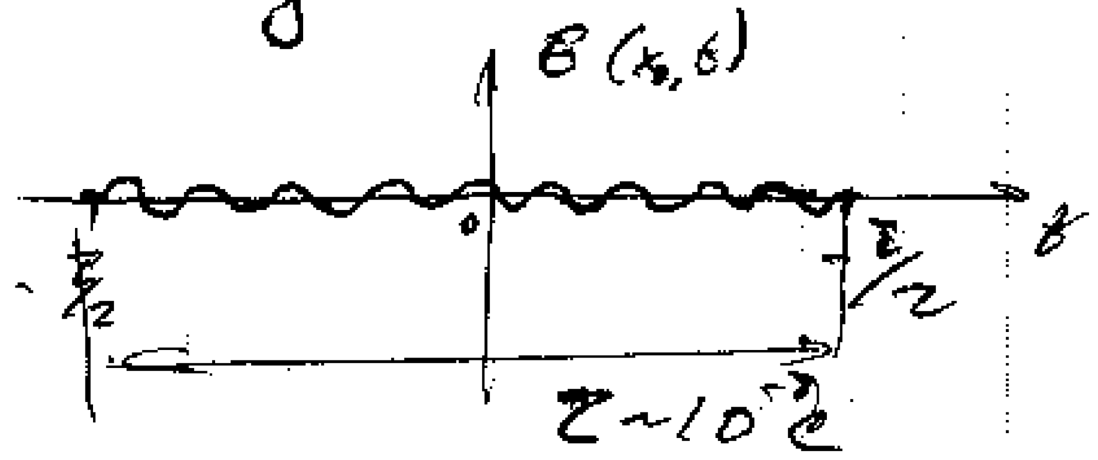
$\boxed{r_{ког} \le \frac{\lambda}{\varphi}}$ — усл. для расстояния между ист. для квазиволнового пов.

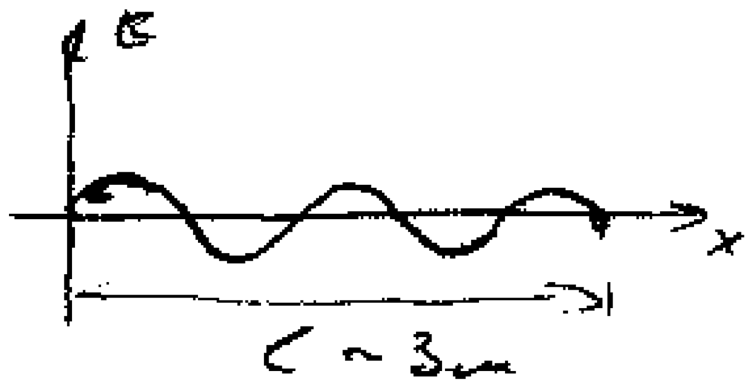
Для солнца $\varphi = 0{,}01$ рад, $\lambda = 500$ нм $\qquad r_{ког} = \dfrac{500\cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \sim 50$ мкм

Для лазера $\tau_{ког} = 10^{-3} \div 10^{-4}$ с
естеств. ист. $\tau_{ког} \sim 10^{-8}$ с.

Волновой цуг

т.к. отд. атом изл. за время $\sim 10^{-8}$ с, то во естеств. ист. длина волн. з. (отрез. вр. жизни атома) оказывается ~ 3 м





$$E(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{\tau}{2} \\ E_0 e^{i\omega_0 t}, & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

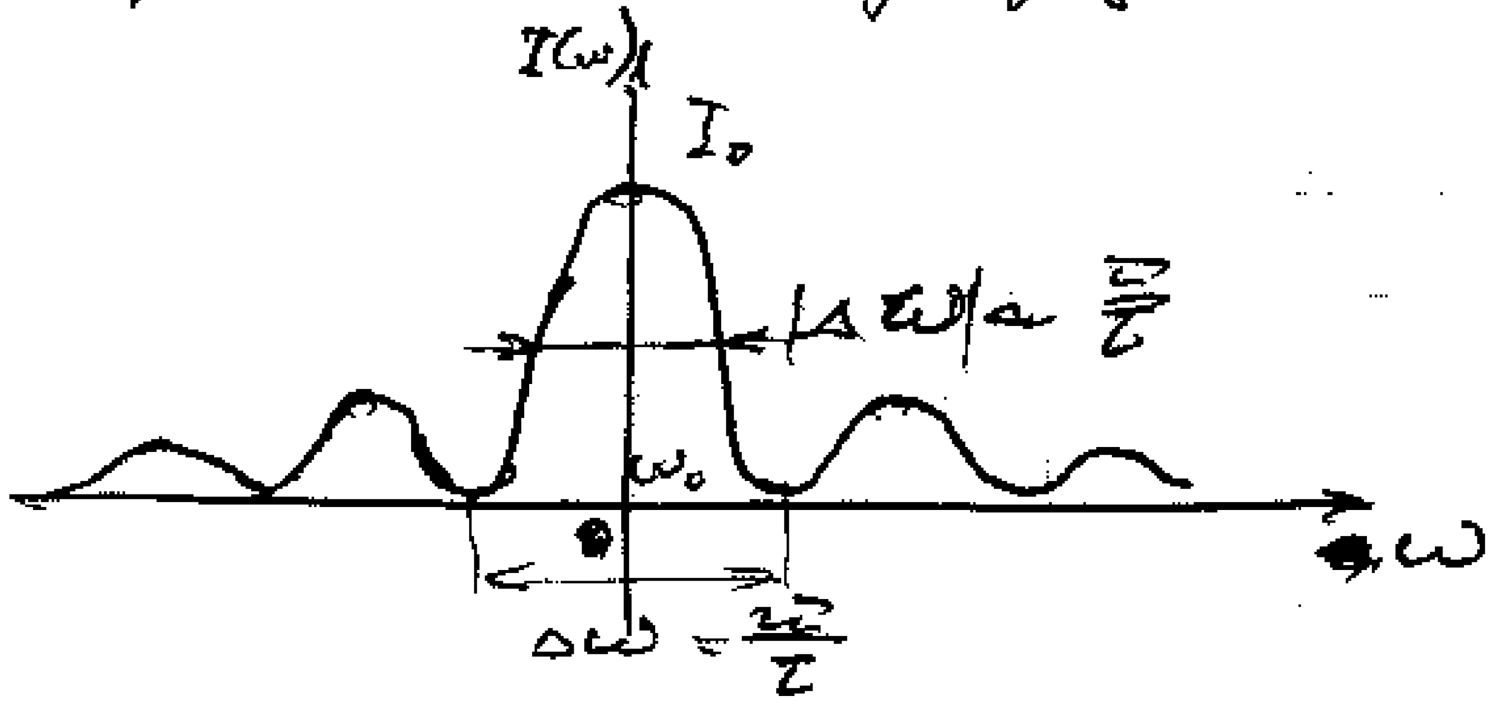
$$E(\omega) = \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{eE_0}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0-\omega)t} dt =$$

$$= \frac{eE_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\omega_0-\omega)} \cdot e^{i(\omega_0-\omega)t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2eE_0\tau}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}} - e^{-i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}}{2i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}$$

$$\approx \frac{\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_0-\omega}{2}\tau}$$

$$I \sim E^2(\omega) \qquad I = I_0 \frac{\sin^2\left(\Delta\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\left(\Delta\omega \frac{\tau}{2}\right)^2}$$

огр. посл-ть возмущений



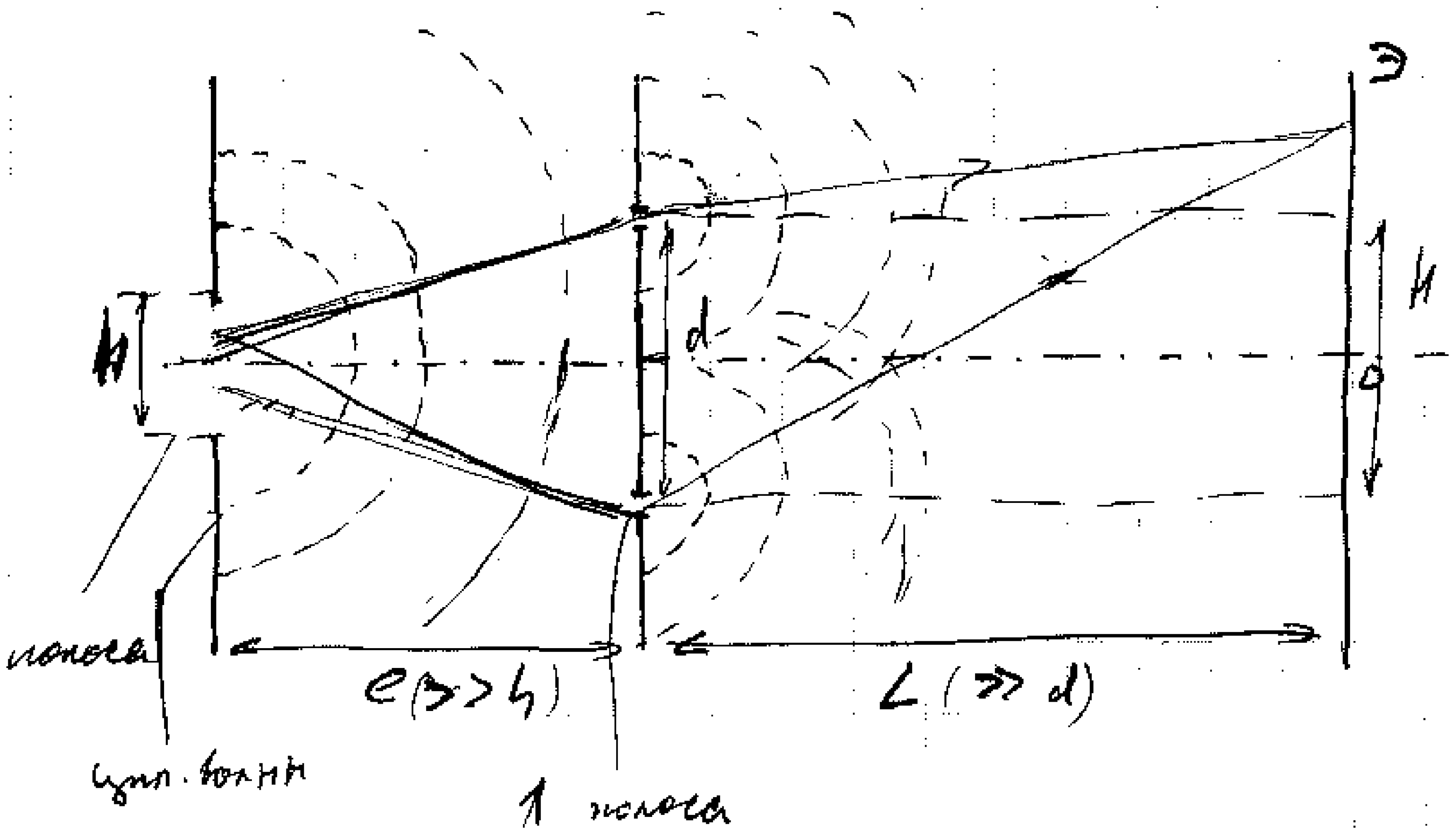
$$\frac{\Delta\omega\tau}{2} = \pi$$

полуширина — ширина max на полувысоте

$$\tau_{ког} \sim \tau \sim \frac{\pi}{|\Delta\omega|}$$

Способы получения интерференционной картины

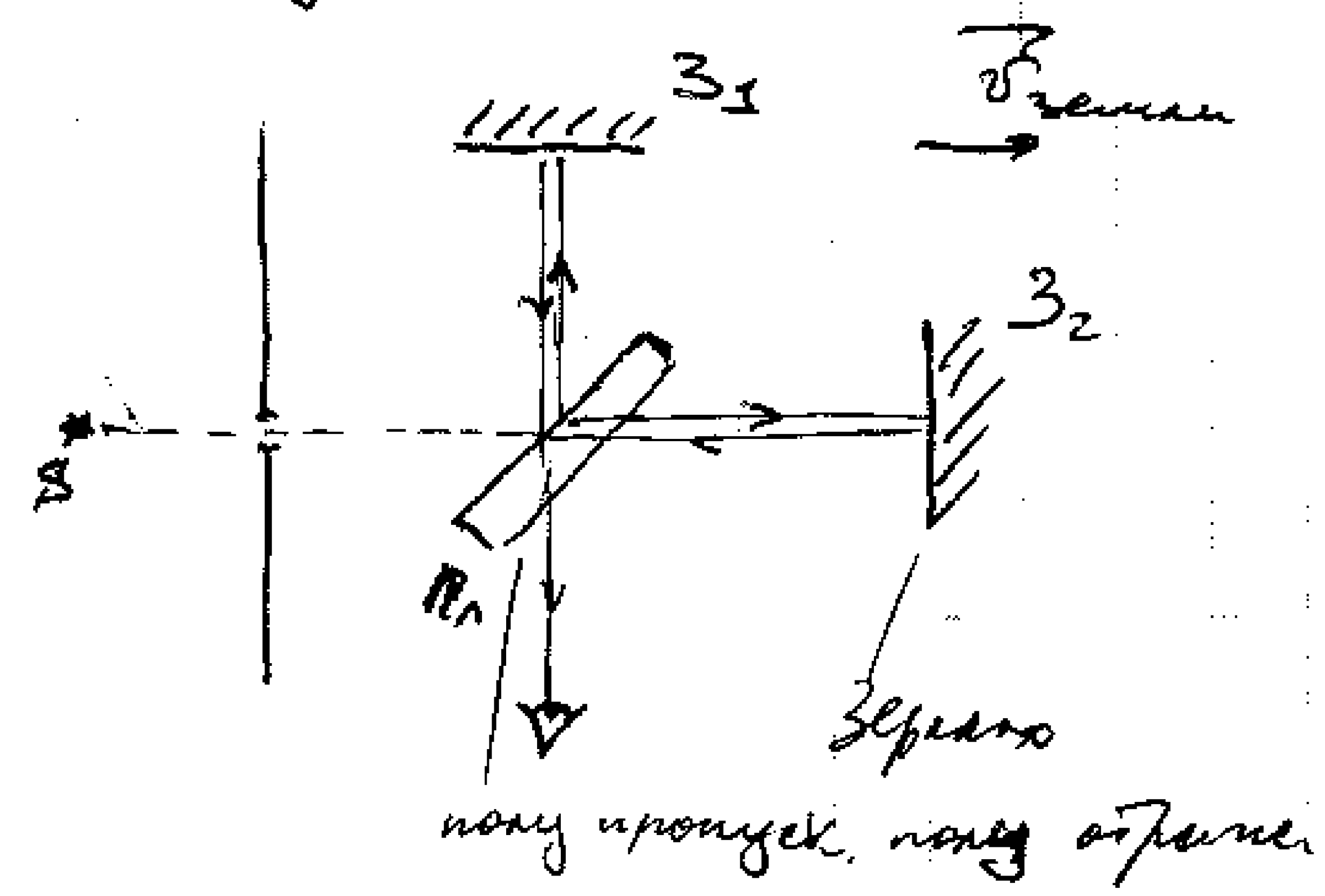
$\boxed{1}$ Разделение фронта волны (опыт Юнга)(1802г)



деление волнового фронта

$\boxed{2}$ (Опыт Майкельсона (1805) 1884)

Метод деления светового луча



скорость света не зависит от скорости движения источника

$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp}$

$t_{\parallel} = \frac{\ell c}{v} +$

Опыт Юнга с узкой и широкой щелью

Объем ког. — объем пр-ва в кот волны когерентны

$V_{ког} = \pi r_{ког}^2 \, l_{ког}$

Видность интерф. картины $\mathcal{D} = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

28. 03.06

Лекция №

К рис $\boxed{1}$

$$\sqrt{\left(\xi + \frac{h}{2}\right)^2 + \ell^2} - \sqrt{\left(\frac{h}{2} - \xi\right)^2 + \ell^2} \approx \ell\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\xi + h/2)^2}{\ell^2}\right) -$$

$$-\ell\left(1 + \frac{(h/2 - \xi)^2}{2\ell^2}\right) = \frac{\ell}{2\ell^2}\left(\left(\xi + \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{h}{2} - \xi\right)\right)\cdot\left(\left(\xi + \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} - \xi\right)\right)$$

$$= \frac{2H\xi}{2\ell} = \frac{H}{\ell}\xi$$

$$I = 2I_0\left(1 + \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(H\left(\frac{\xi}{\ell} + \frac{x}{L}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\right)\frac{d\xi}{h} = \ldots = 2I_0\left(1 + \frac{\lambda\ell}{\pi H h}\right.\right. \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi h H}{\lambda \ell}\right)\cos\left(\frac{2\pi H x}{\lambda \ell}\right)$$

а) h - дост. большая

$$\frac{\lambda \ell}{\pi H h} \ll 1 \implies I = 2I_0$$

б) $\frac{\lambda l}{\pi H h} \gg 1$ то $I = 2I_0 \left(1 + \cos\frac{2\pi H x}{\lambda l}\right) = 4I_0 \cos^2\frac{\pi H x}{\lambda l}$

$x \ll 1$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \approx 1$

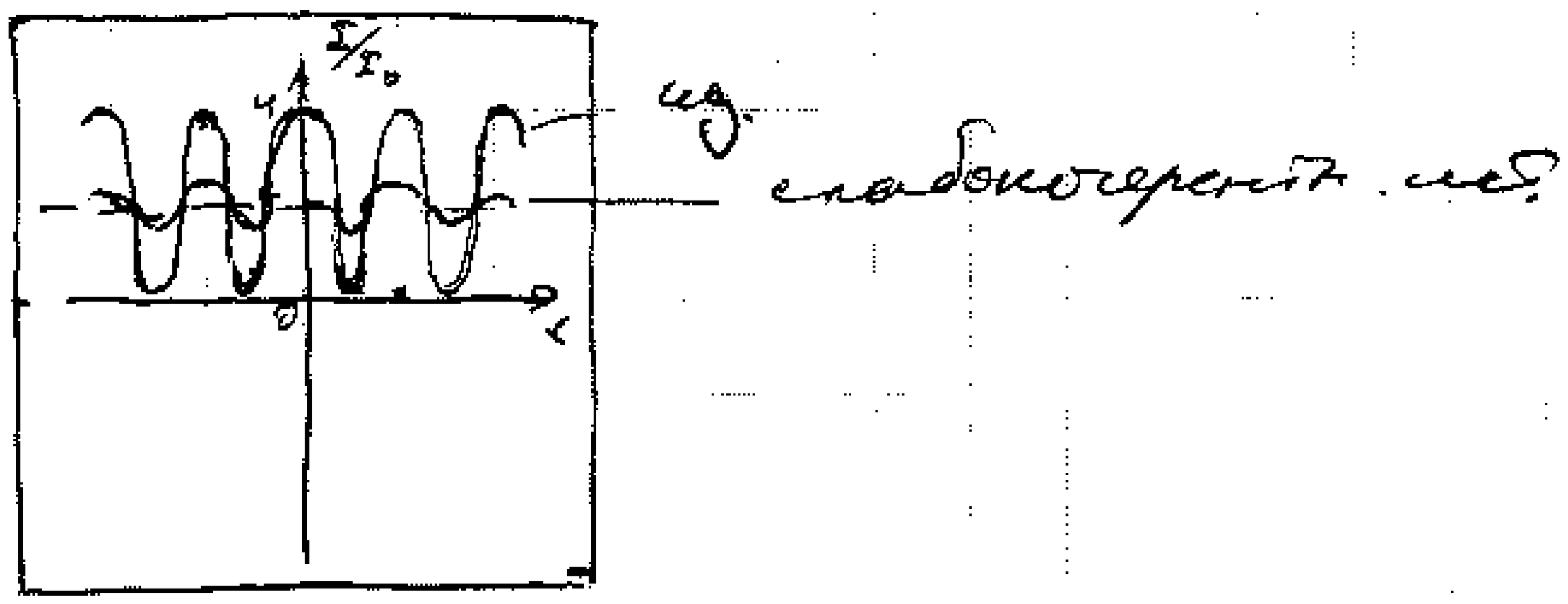
Усл. max

$\frac{\pi H x}{\lambda l} = \pm \pi m$ $(m = 0, 1, 2 \ldots$

$I = 4 I_0$ $\Delta x_m = x_{max} - x_{max} = \frac{\lambda l}{H}$ ширина интерференц. полосы

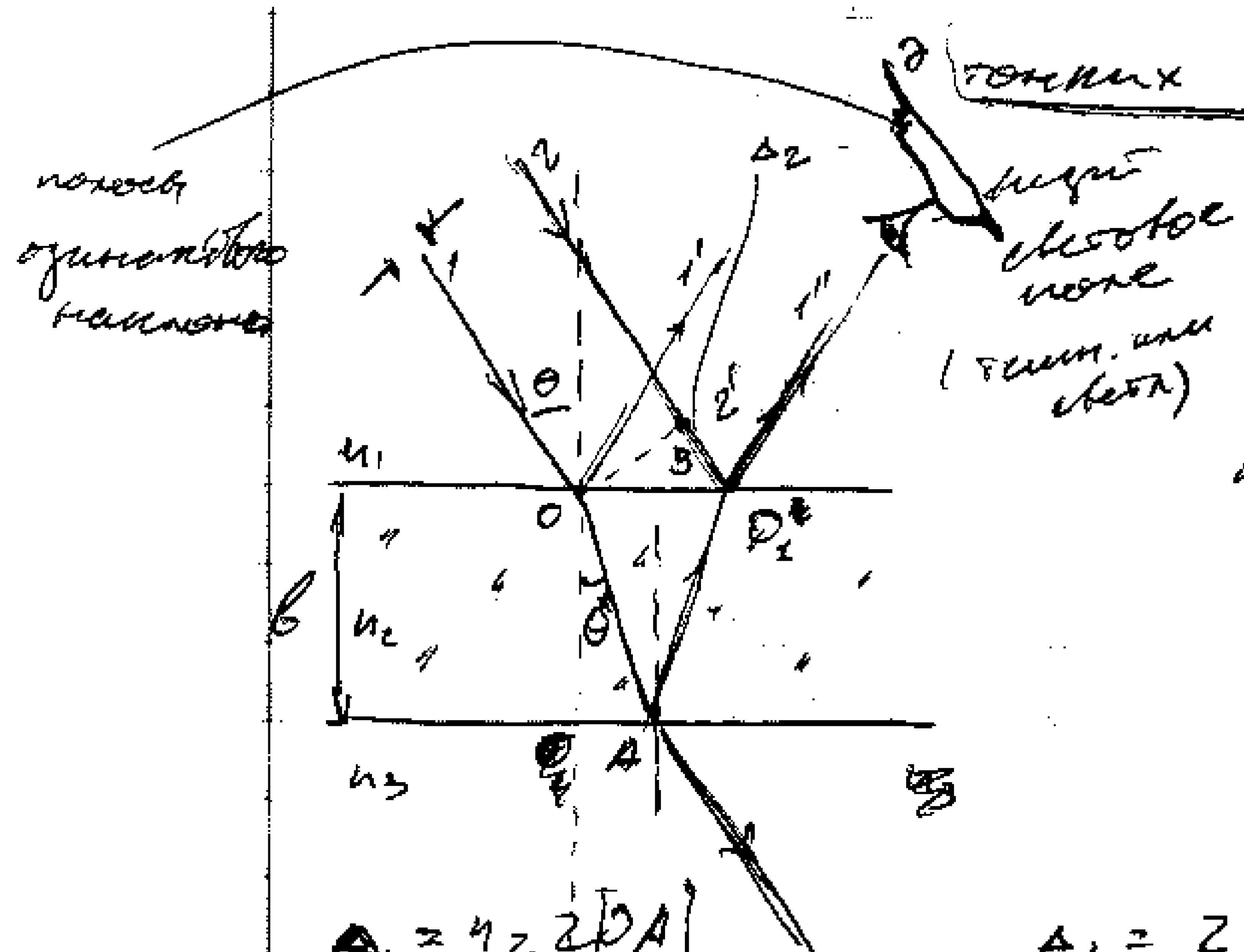
Усл. min $\frac{\pi H x}{\lambda l} = \pm (2m+1)\pi$

Интерференционная картина



Бизеркала Френеля, Бипризма Френеля
Зеркало Ллойда

Интерференция при отражении от тонких плоских пластин.



$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$$

плоская волна $r_{ког} = \infty$

$$\Delta\lambda = 0 \Rightarrow l_{ког} = \infty$$

а) $n_1 < n_2 > n_3$

$\Delta_1 = n_2 2[OA]$ $\qquad \Delta_1 = 2n_2 \dfrac{b}{\cos\theta''}$ $\qquad n = \dfrac{n_2}{n_1}$

$\Delta_2 = n_1[OB]$ $\qquad \Delta_2 = n_1[OO_1]\cdot\sin\theta = n_1 2b\,\mathrm{tg}\,\theta''\sin\theta$

оптич. разн. хода

$\Delta_3 = \lambda/2$ $\qquad \Delta_1 - \Delta_2 = \dfrac{2b}{\cos\theta''}\left(n_2 - n_1 \sin\theta''\sin\theta\right) =$

$\boxed{\sin\theta = n\sin\theta''}$ $\qquad = \dfrac{2b\left(n_2 - \sin^2\theta/n\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} =$

$$= \frac{2bn_1\left(n^2 - \sin^2\theta\right)}{n\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}} = \frac{2bn_1\left(n^2-\sin^2\theta\right)}{\left(n^2-\sin^2\theta\right)^{1/2}} = 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta}$$

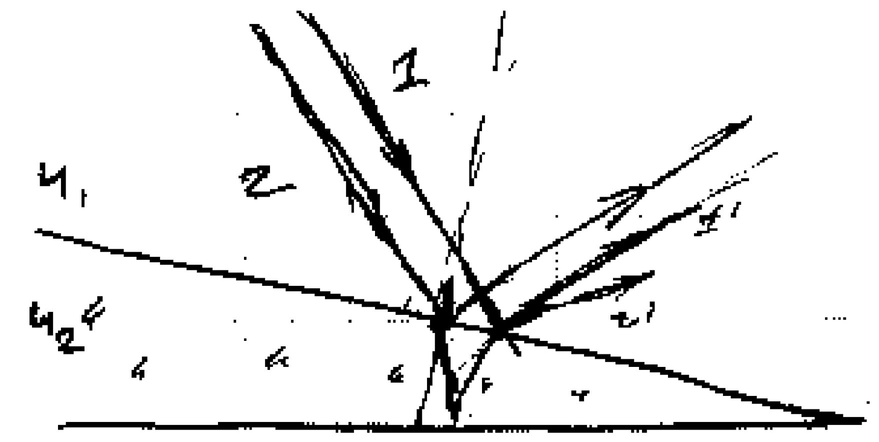
$$\Delta = 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} + \frac{\lambda}{2}$$

max $\qquad \Delta_{max} = \lambda m$ $\qquad m \in \mathbb{Z}$

min $\qquad \Delta_{min} = \dfrac{\lambda}{2}(2m+1)$

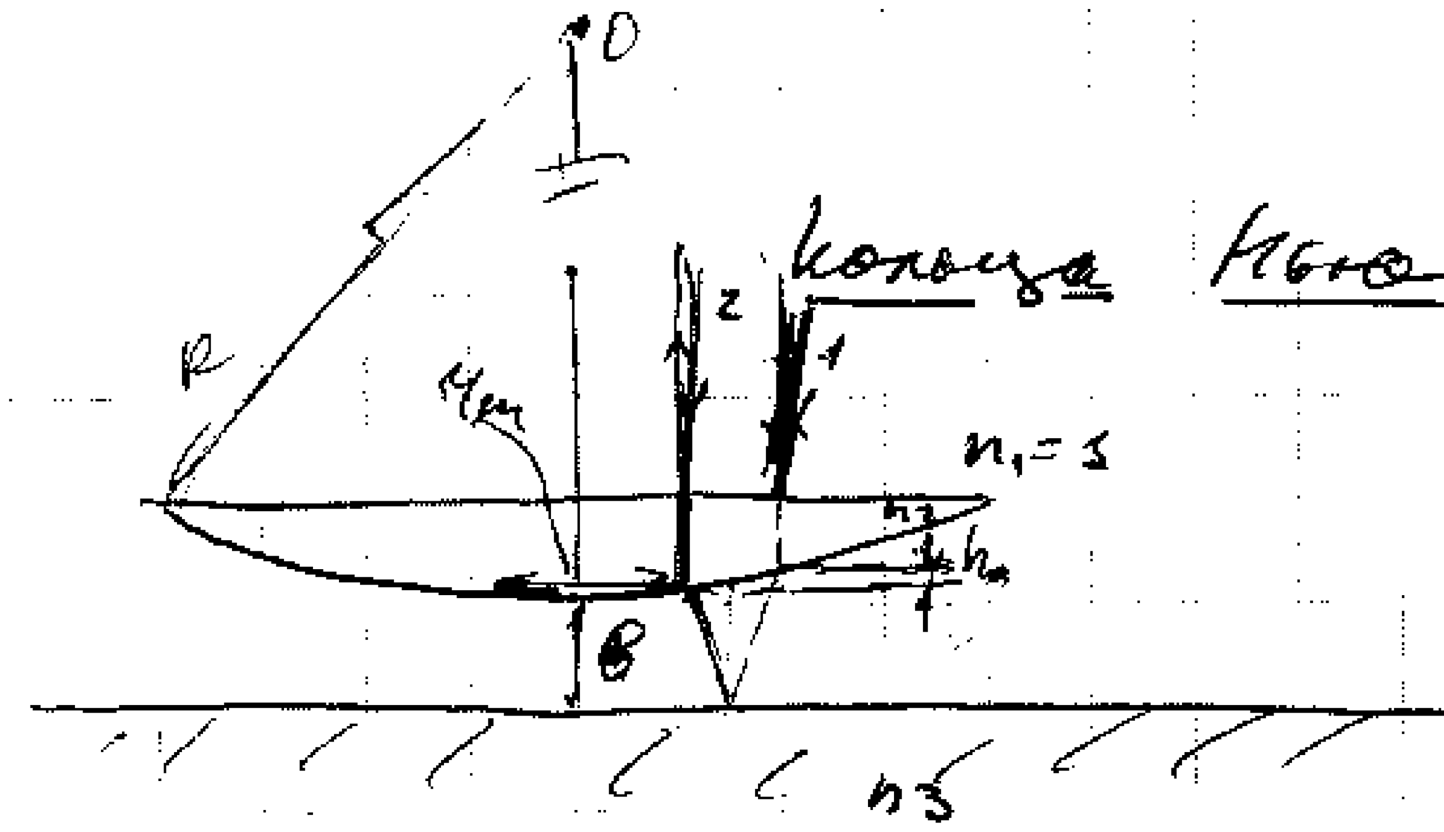
max: $\quad 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} = \dfrac{\lambda}{2}(2m+1)$

min: $\quad 2bn_1\sqrt{n^2-\sin^2\theta} = \lambda m$



4.04.06

лекция №



Кольца Ньютона.

Опред. вид интерференц. картины.

плоская монохроматич. волна

$\Delta = 2hn_1 + 2bn_1 + \Delta_1$

связ. с набором или потерей фазы при отражении

а) $n_1 < n_2 < n_1 \Rightarrow \Delta_1 = \pm\frac{\lambda}{2}$

$$\Delta = \begin{cases} \frac{2\lambda}{2}m & (max) \\ \frac{\lambda}{2}(2m+1) & (min) \end{cases} \Rightarrow 2hn_1 = \Delta - \Delta_1 - 2bn_1$$

$$R^2 = (R-h)^2 + r_m^2 \Rightarrow \cancel{R^2} = \cancel{R^2} - 2Rh + \cancel{h^2} + r_m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h \ll r_m) \Rightarrow r_m = \sqrt{2Rh} = \sqrt{2R\left(\frac{\Delta - \Delta_1}{n_1} - 2b\right)}$$

т.

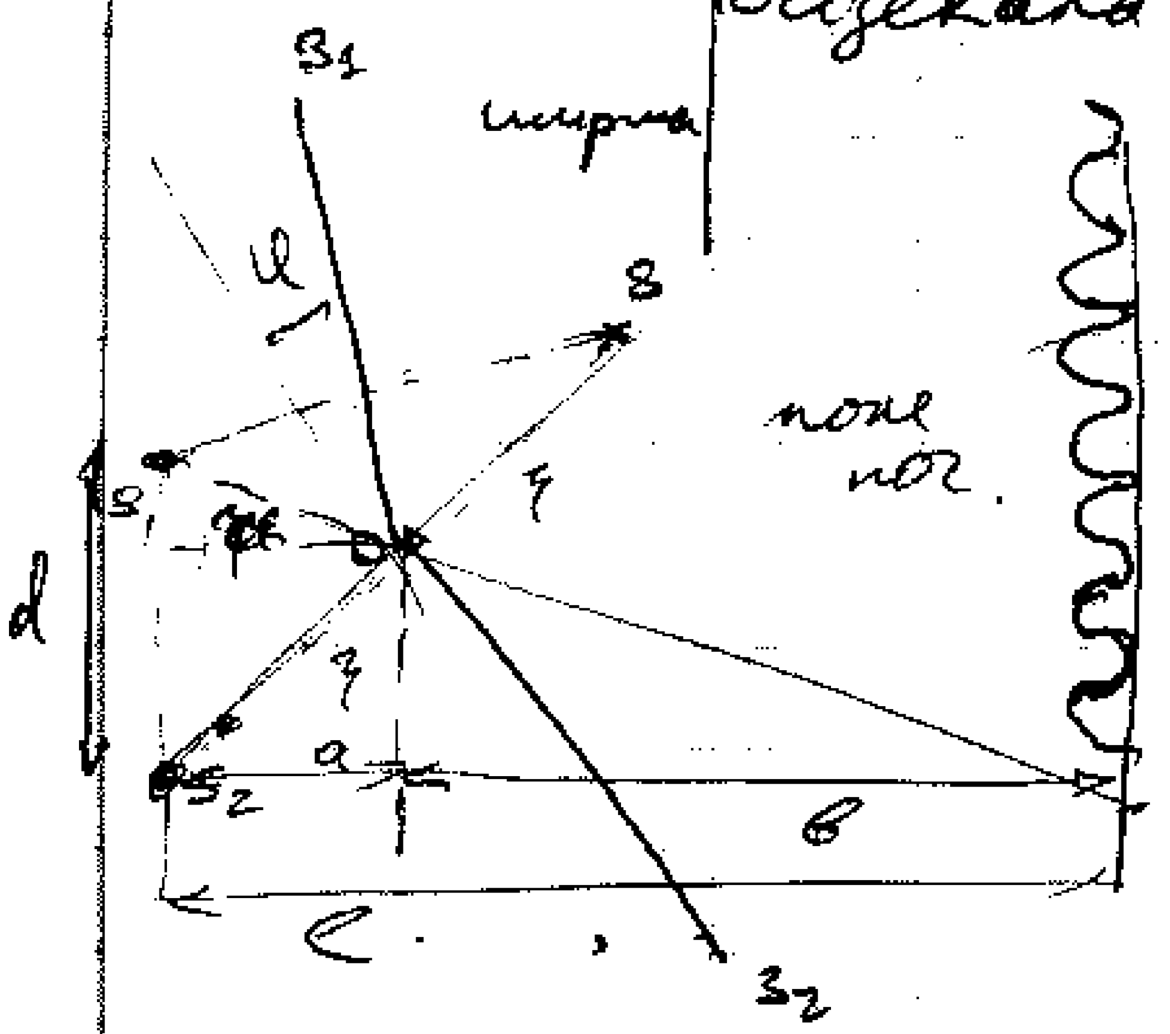
б. т.е. $r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}m - \frac{\lambda}{2}}$ max

$b = 0$

$\Delta_1 = \frac{\lambda}{2}$

[illegible]

Бизеркала Френеля



$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\varphi}$$

$$l = a+b$$

φ – малое $\quad d = 2a\sin\varphi \approx 2a\varphi$

$$L = 2b\,tg\varphi \approx 2b\varphi$$

$$N'_{max} = \frac{L}{\Delta x} = \frac{2b\varphi\cdot 2a\varphi}{\lambda(a+b)} = \frac{4ba\varphi^2}{\lambda(a+b)}$$

if усл. ког. соблюд.

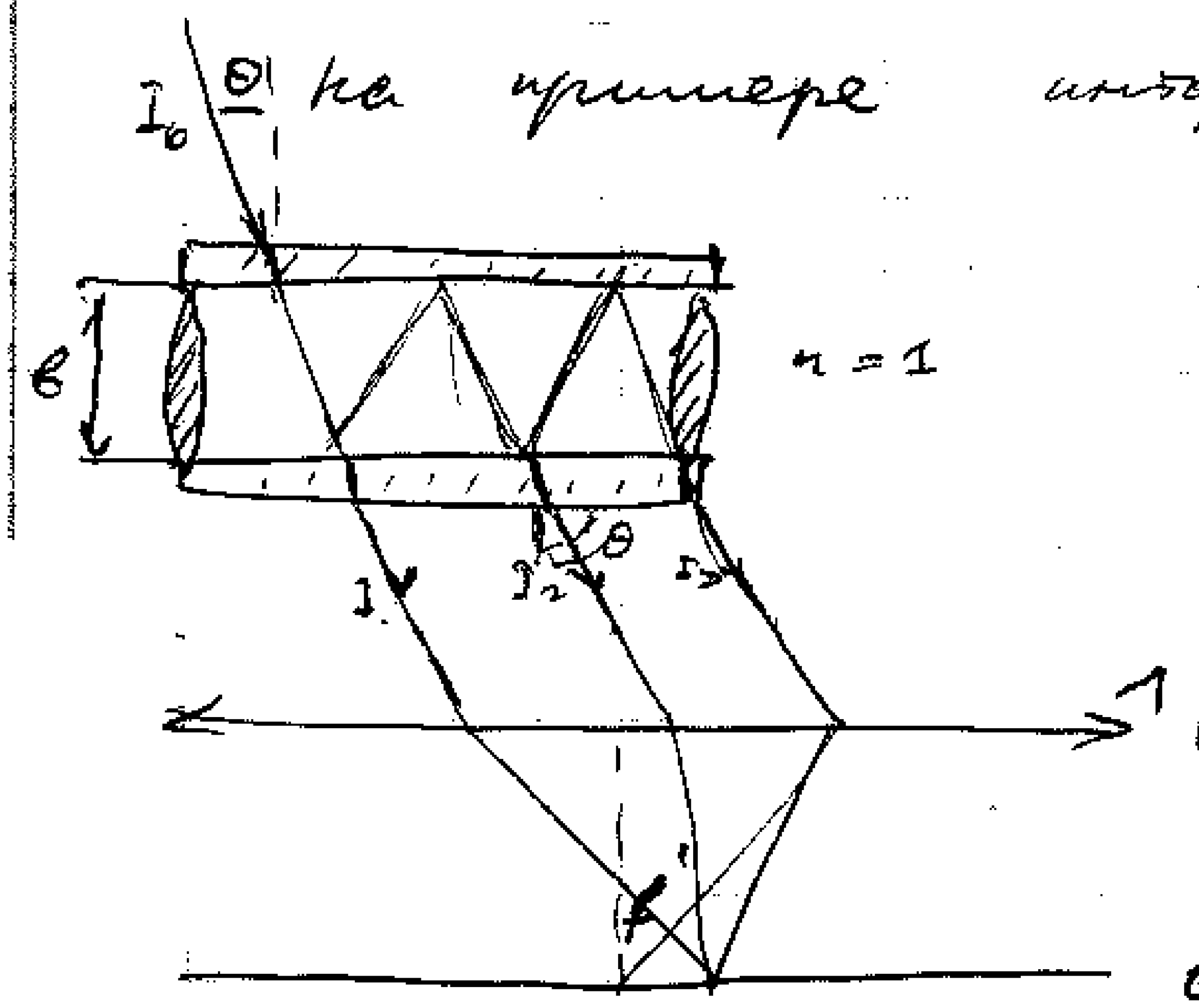
$$N''_{max} = \frac{l_{ког}}{\Delta x} = \frac{\lambda^2}{\Delta x\,\Delta\lambda}$$

$$N = \min\{N'_{max}, N''_{max}\}$$

Опыт Юнга явл-ся основ. для получения соотв. в других уст-вах для раздел. волнового фронта

Многолучевая интерференция

на примере интерферометра ~~Майкельсона~~ Фабри Перо



расчм. ког. волну (точеч., монохром)

$$\Delta = \Delta_I + \Delta_{II} + \Delta_{III} = \ldots =$$

$$= 2b\cos\theta$$

$$2b\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2b\cos\theta$$

$$I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : (1-\rho)\cdot\rho : (1-\rho)^3\rho^2 : \ldots$$

$$E_{m_1} : E_{m_2} : E_{m_3} : \ldots = \sqrt{I_1} : \sqrt{I_2} : \sqrt{I_3} : \ldots = 1 : (1-\rho)\rho^{2} : (1-\rho)\rho^{\prime} \ldots$$

$$\hat{E}_m = \sum_{i=1}^{\infty} E_{m_i} e^{j\delta i} = E_{m_1}\sum_{i=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{i/2}e^{j\delta i} \underset{\text{γεωμ. πρόοδ.}}{=}$$

$$= E_{m_1}\frac{1}{1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{j\delta}}$$

$$I \sim |\hat{E}_m|^2/2 = E_{m_1}^2\frac{1}{\left(1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{j\delta}\right)\left(1-(1-\rho)\rho^{1/2}e^{-j\delta}\right)}$$

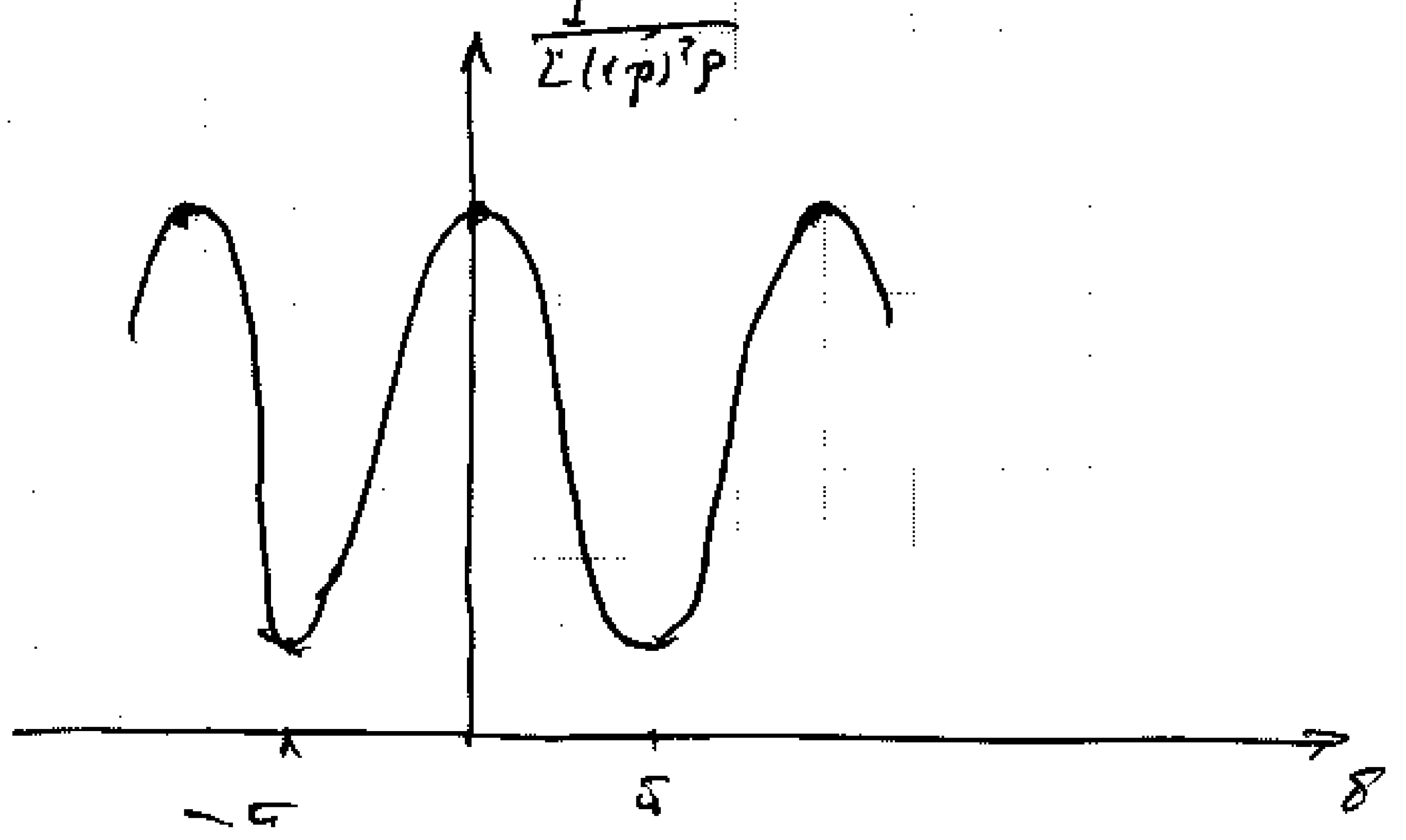
$$= E_m^2(1-\rho)^2\cdot\rho \quad \frac{1}{1-(1-\rho)\rho^2(e^{j\delta}-e^{-j\delta})\cdot(1-\rho)^2\rho}$$

$$I = I_0(1-\rho)^2\rho \quad \frac{1}{[1-(1-\rho)\rho^2]^2+2(1-\rho)\rho^2-2(1-\rho)\cdot\rho^2\cos\delta}$$

$$I = I_0(1-\rho)^2\rho \quad \frac{1}{[1-(1-\rho)\rho^2]^2+4(1-\rho)\rho^{1/2}\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$$\frac{I_{max}}{L(1-\rho)^2\rho} = \frac{1}{[1-\rho^2(1-\rho)]^2} \qquad \sin\frac{\delta}{2}=0$$

$$\frac{I_{max}}{L(1-\rho)^2\rho} = \frac{1}{[1-\rho^2(1-\rho)]^2}$$



Дифракция

$$\frac{b^2}{L\lambda} \gg 1$$ геом. оптика

$$\frac{b^2}{L\lambda} \lesssim 1$$ (Дифракция)

Дифракция Френеля

$$\frac{b^2}{L\lambda} \sim 1$$

15.04.06

лекция №6

Дифракция Френеля для щели и края полуплоскости

$$A(P) = C_n \int_{x'}^{x} e^{\frac{ikx^2}{2b}} dx$$

обозн. $\frac{kx^2}{2b} = \frac{\pi u^2}{2}$

$\frac{2\pi x^2}{2\lambda b} = \frac{\pi u^2}{2}$ $\qquad x_m = \sqrt{m\lambda b}$ - гр. зоны Шустера

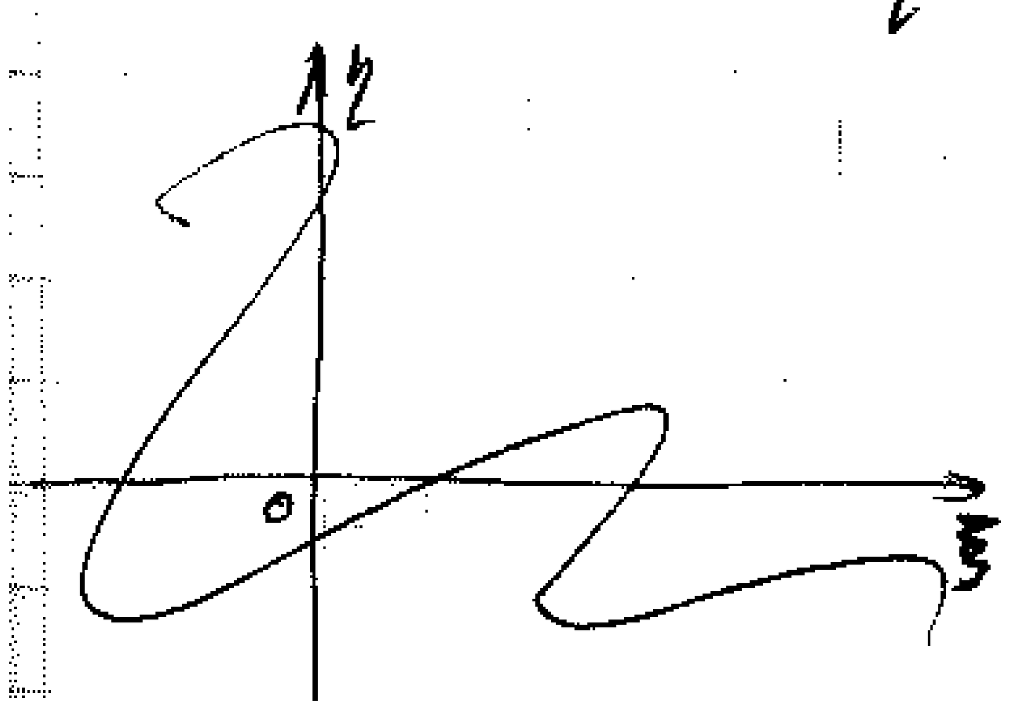
$2\frac{m\lambda b}{\lambda b} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2m}$

т.о. $A(P) = C_n \int_{v'}^{v} \left(\cos\frac{\pi u^2}{2} + i\sin\frac{\pi u^2}{2}\right) du$ — интегралы Френеля

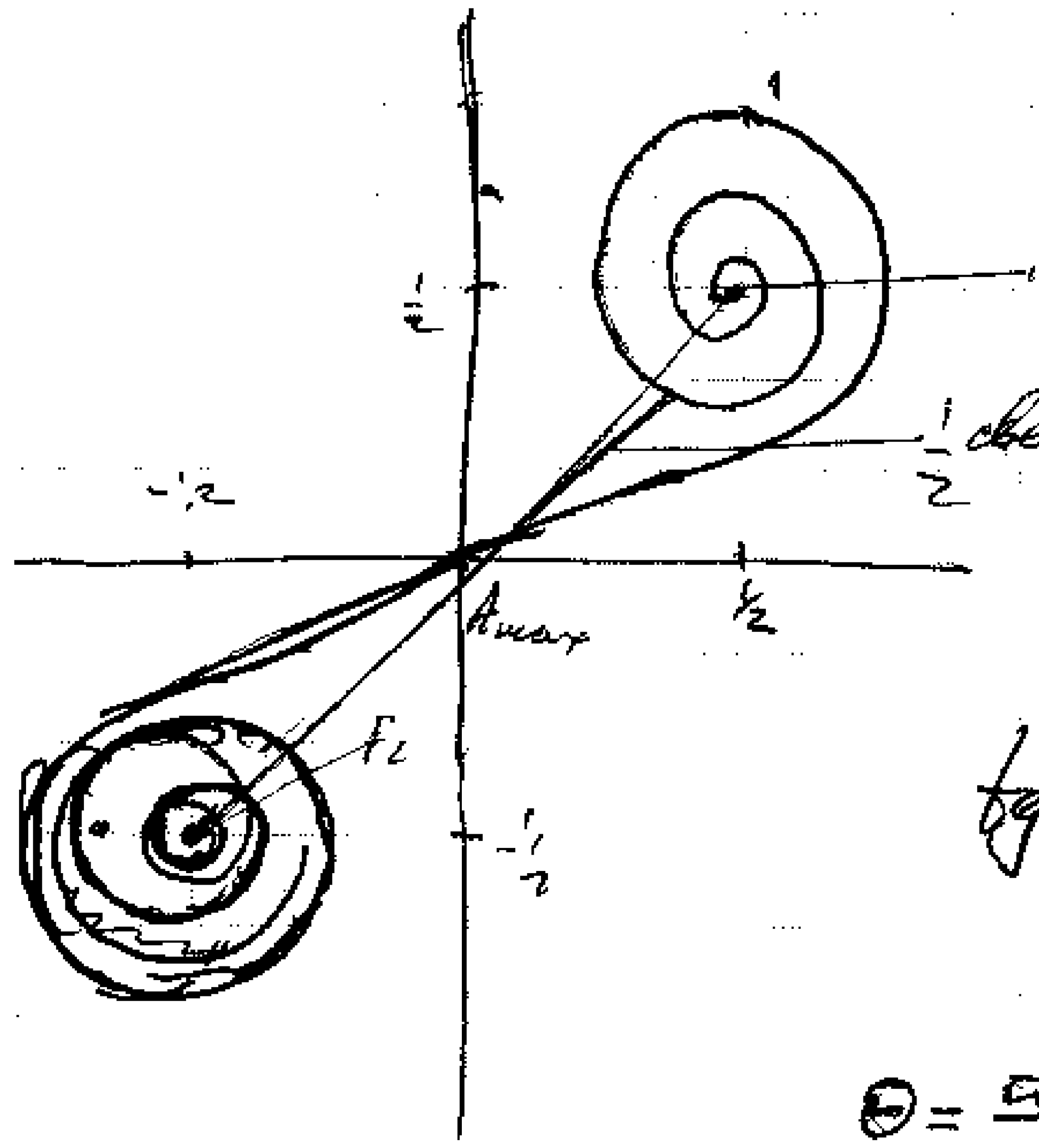
т. предел $A(P) = C_5(\Delta\xi + i\Delta\eta)$, где $\xi = \int_{0}^{v(v')} \cos\frac{\pi u^2}{2} du$

$\eta = \int_{0}^{v(v')} \sin\frac{\pi u^2}{2} du$

$I_0 = C_5^2(\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2)$



Спираль Корню



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin\frac{\pi v^2}{2}}{\cos\frac{\pi v^2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi v^2}{2}$$

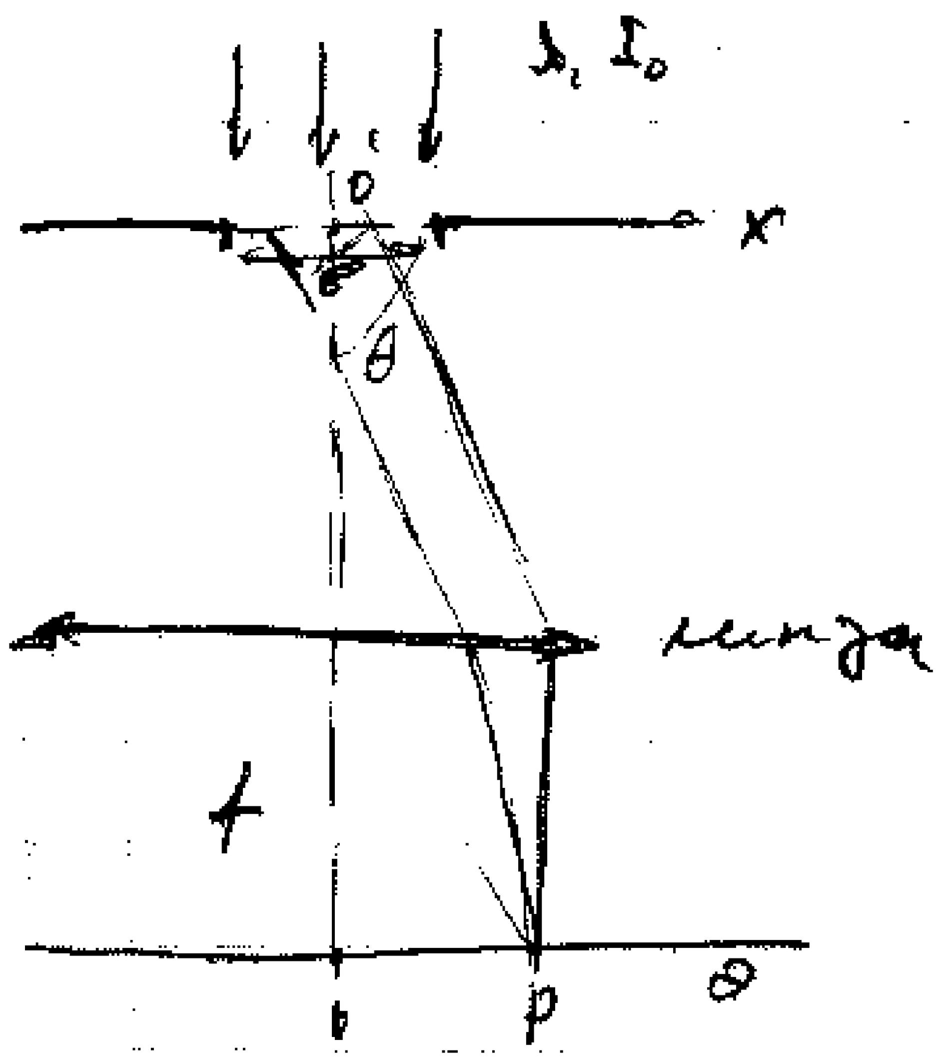
$$\theta = \frac{\pi v^2}{2}$$

Дифракция Фраунгофера

$\frac{b^2}{\lambda \ell} \sim m \ll 1$ — Фраунгофер

$m \sim 1$ — Френель

Перераспределение интенсивности в пр-ве от непрерывных источников



$$A(P) = c_1 \int_{-b/2}^{b/2} e^{i(\vec{k},\vec{r})} dx =$$

$$= c_1 \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx\sin\theta} dx =$$

$$= \frac{c\left(e^{-\frac{ikb}{2}\sin\theta} - e^{\frac{ikb}{2}\sin\theta}\right)}{2i\frac{k\sin\theta\, b}{2}} \Rightarrow$$

$= C_2 \dfrac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)}{\frac{kb}{2}\sin\theta}$

$\theta \sim 1$ $\quad A^2(0) \sim I_0$

с др. стор. $A^2(0) = C_2^2$

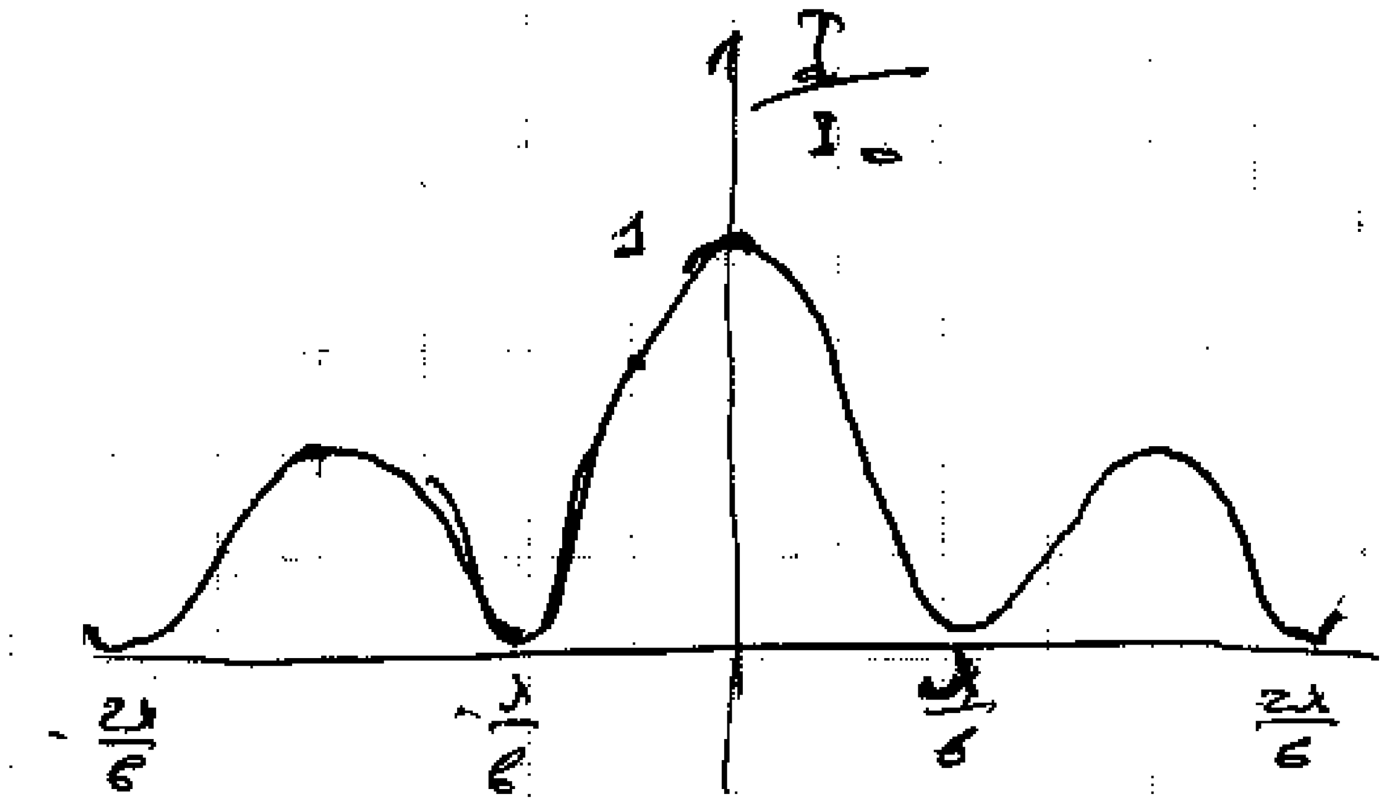
$C_2 = A(0) \cdot \sqrt{I_0}$

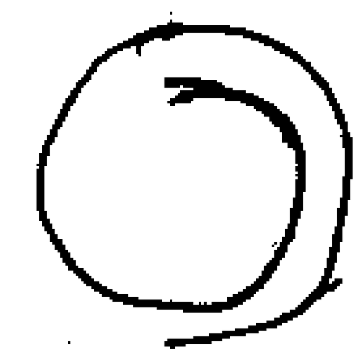
$$I(\gamma) = I_0 \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}$$

min $\gamma = \frac{kb}{2}\sin\theta = \pm\pi m$ $\quad \frac{2\pi b}{2\lambda} = \pm\pi m$

$m = 1, 2, 3, \dots$

$b\sin\theta = \pm m\lambda$ (min)





$\frac{3}{2}\pi A_1 = A_0$ $\qquad A_1 = \dfrac{A_0}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)}$ $\qquad I_1 = \dfrac{I_0}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} = 0{,}04 I_0$

$$I_0 : I_1 : I_2 : \dots = 1 : \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} : \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}$$

Дифракц. реш. - самостоят.

разреш. способн. дифр. прибора $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$

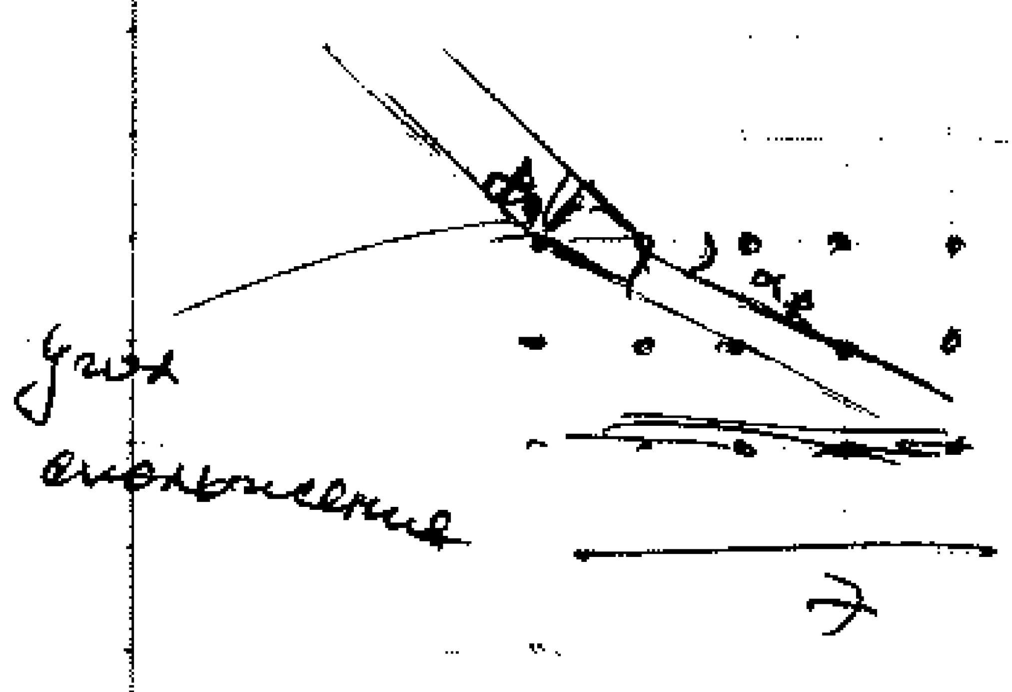
Дисперсия

$D_\varphi = \dfrac{\delta\lambda}{\delta\varphi}$ $\qquad D_x = \dfrac{\delta\lambda}{\delta x}$

Дифракция рентгеновских лучей

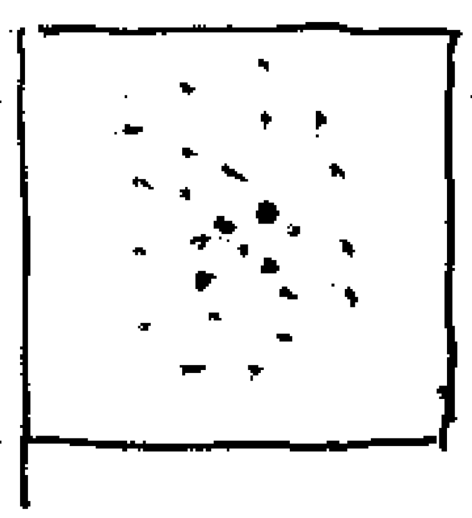
Лауэ

дифр. на кристалл. структуре



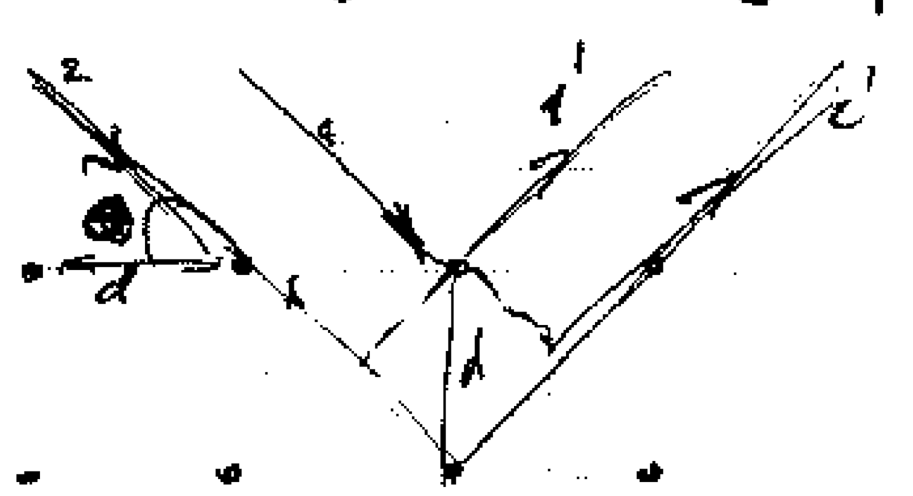
$$\text{max}\begin{cases} d(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = \pm m\lambda \\ d(\cos\beta_0 - \cos\beta) = \pm m'\lambda \\ d(\cos\gamma_0 - \cos\gamma) = \pm m''\lambda \end{cases}$$

Лауэ-грамма



$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$$

Формула Вульфа - Брегга



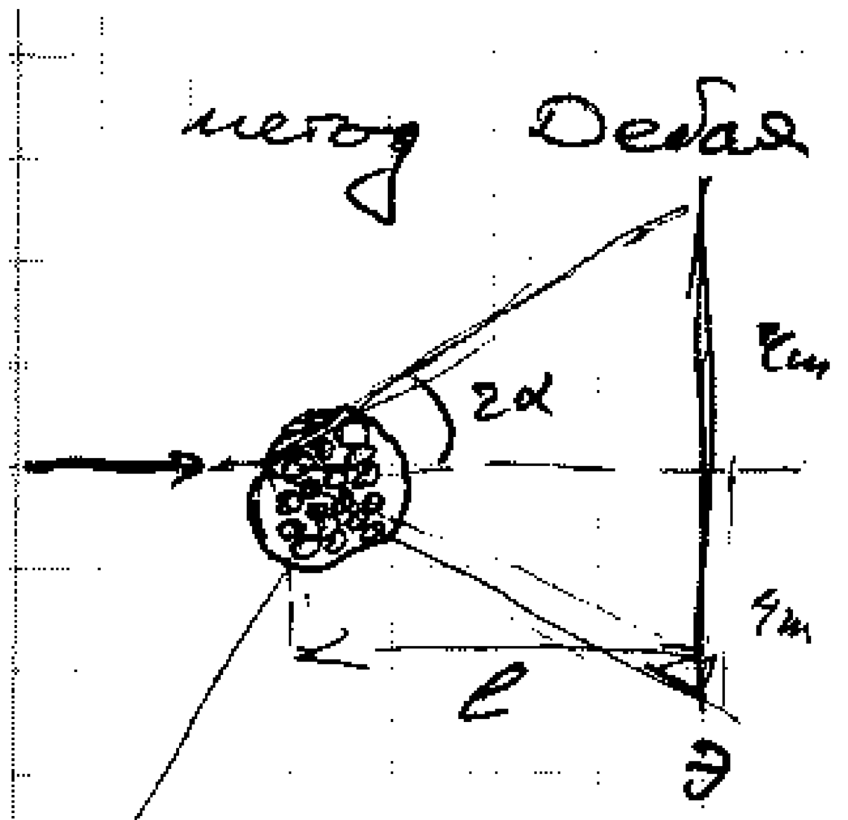
$$2d\sin\theta = \pm m\lambda \quad \text{max}$$

$m = 1, 2, \ldots$

25.04.06

Лекция №

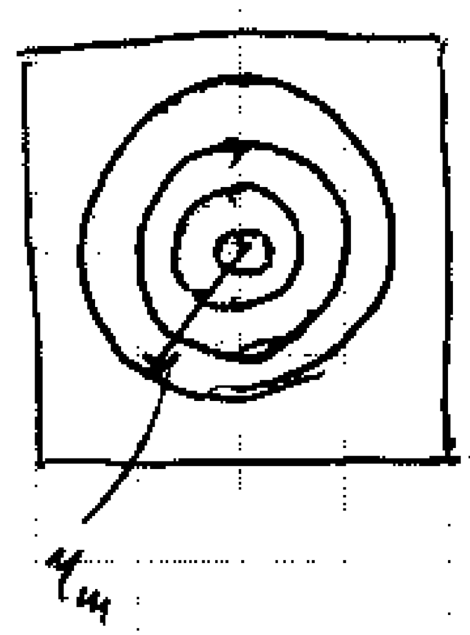
метод Дебая



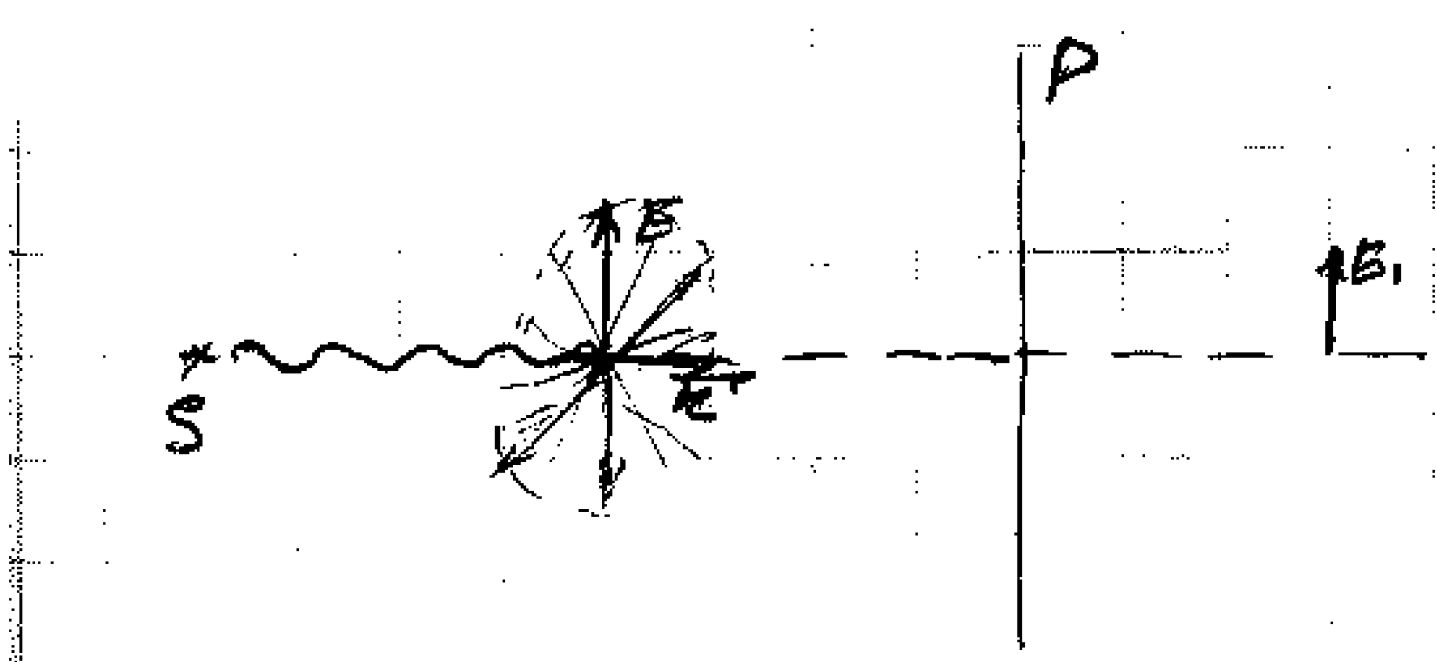
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{r_m}{l} \\ 2d \sin\alpha = \pm m\lambda \end{cases} \qquad d(\lambda)$$

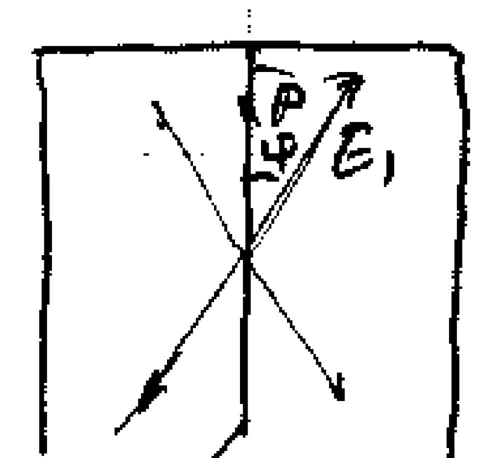
поликристалл $\qquad \alpha$ - угол скольжения

Дебаеграмма



Естественный свет и поляризация света.





направление, в кот. поляризатор пропускает

$E_1 = E_0 \cos\varphi \qquad I_1 = I_0 \cos^2\varphi$

усредн. по времени $\Leftrightarrow$ усредн. по углу

$$\langle I_1 \rangle = I_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{\pi} = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\pi} \left((1 + \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{I_0}{2}$$

т.о.

$I_1 = \frac{I_0}{2}$ – з-н Малюса

$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$

Степень поляризации

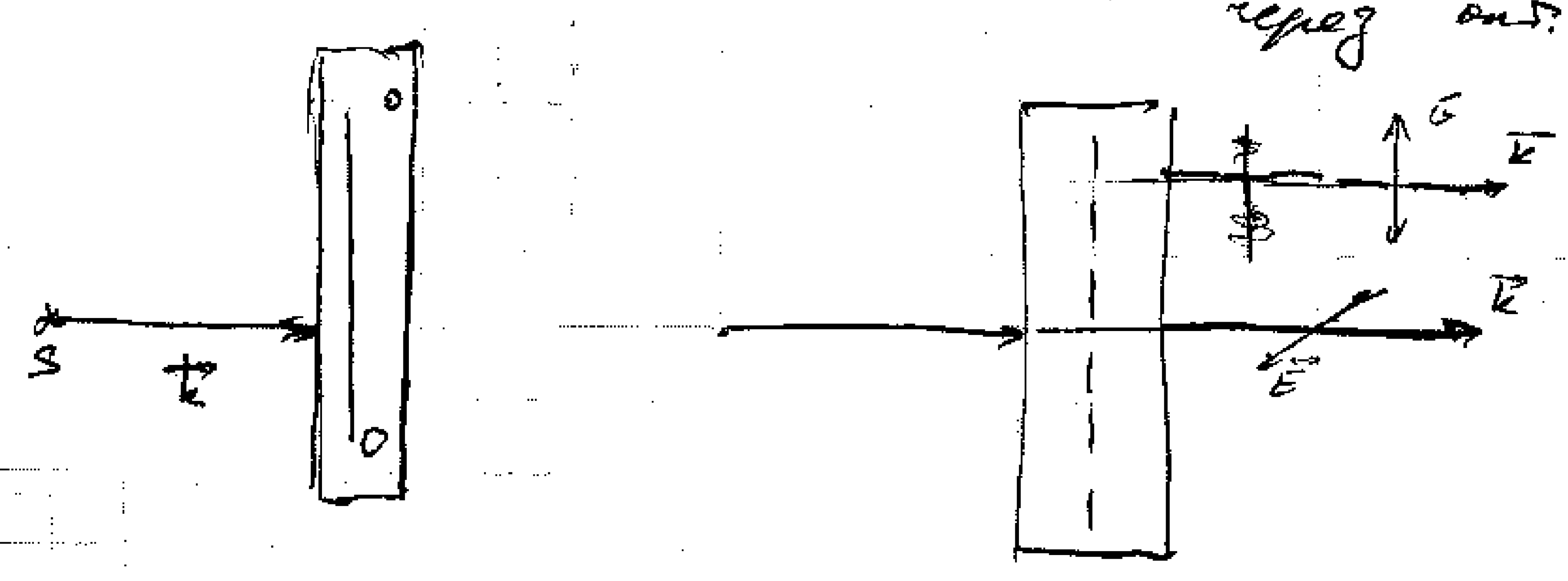
$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ – применимо только для лин. поляризации (смешанного не полностью поляриз. света)

(для круговой $I_{max} = I_{min}$)

Поляризаторы – в-ва (слюда, кварц ...), кот. обладают анизотропией для этого волны (дихроизм), волны, образному поляризационные, образ знаному пропускаются

Одноосные кристаллы

Главная плоскость (сечение) – плоскость прох. через опт. ось



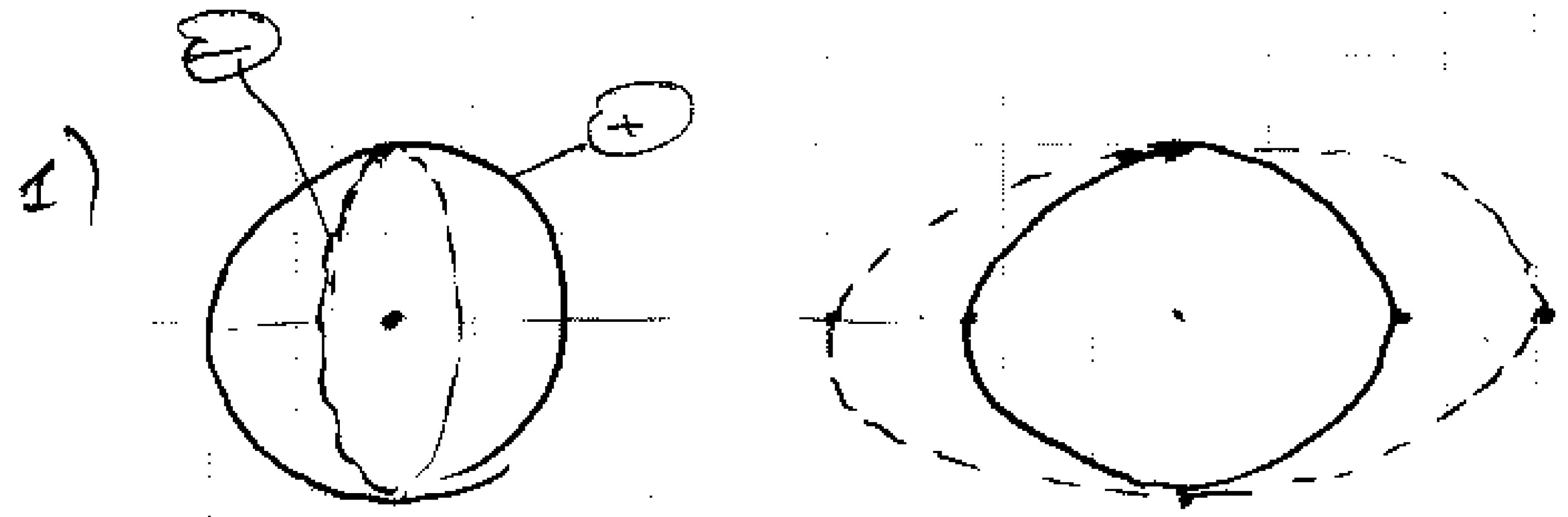
$\parallel \quad v_e = v_o \Rightarrow n_e = n_o$

$$
\perp \quad \begin{cases} v_o > v_e \Rightarrow n_o < n_e & \text{(положит. кристалл)} \; (+) \\ v_o < v_e \Rightarrow n_o > n_e & \text{(отрицат. кристалл)} \; (-) \end{cases}
$$

o – ординарный (обычный)
e – экстраординарный (необычный) луч.

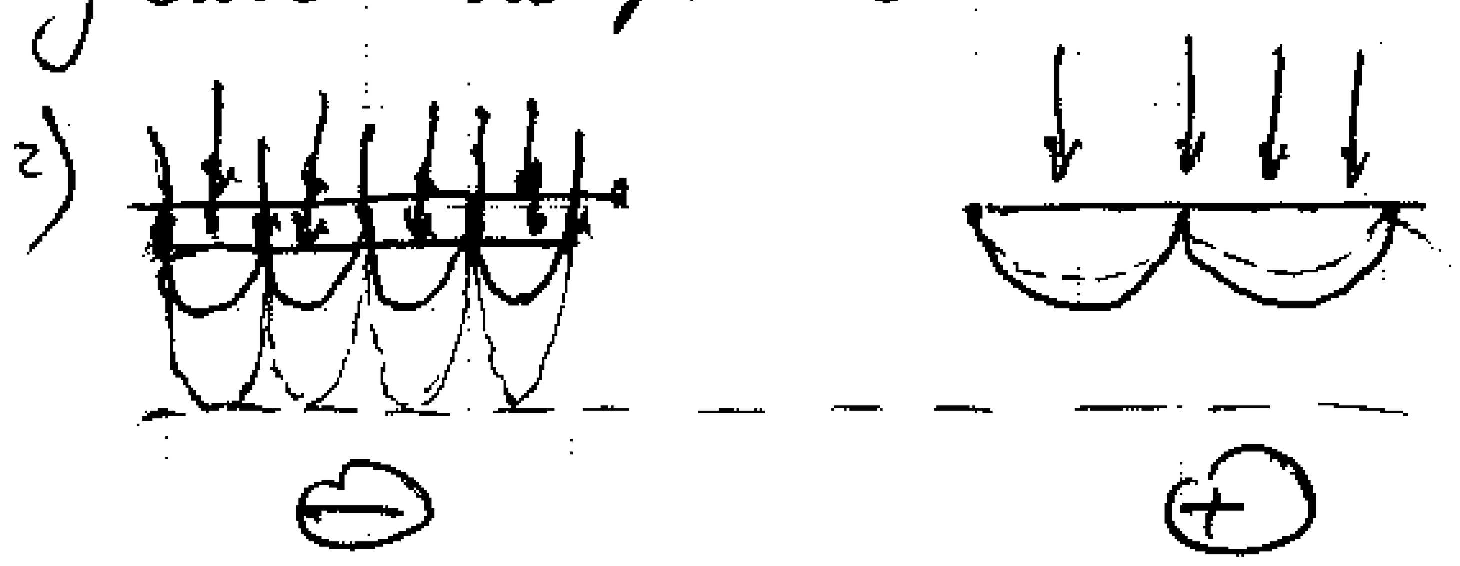
Двойное лучепреломление

1)

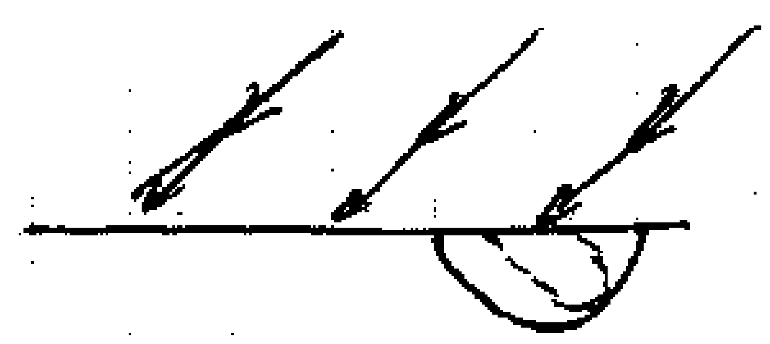


лучевые поверхности

2)

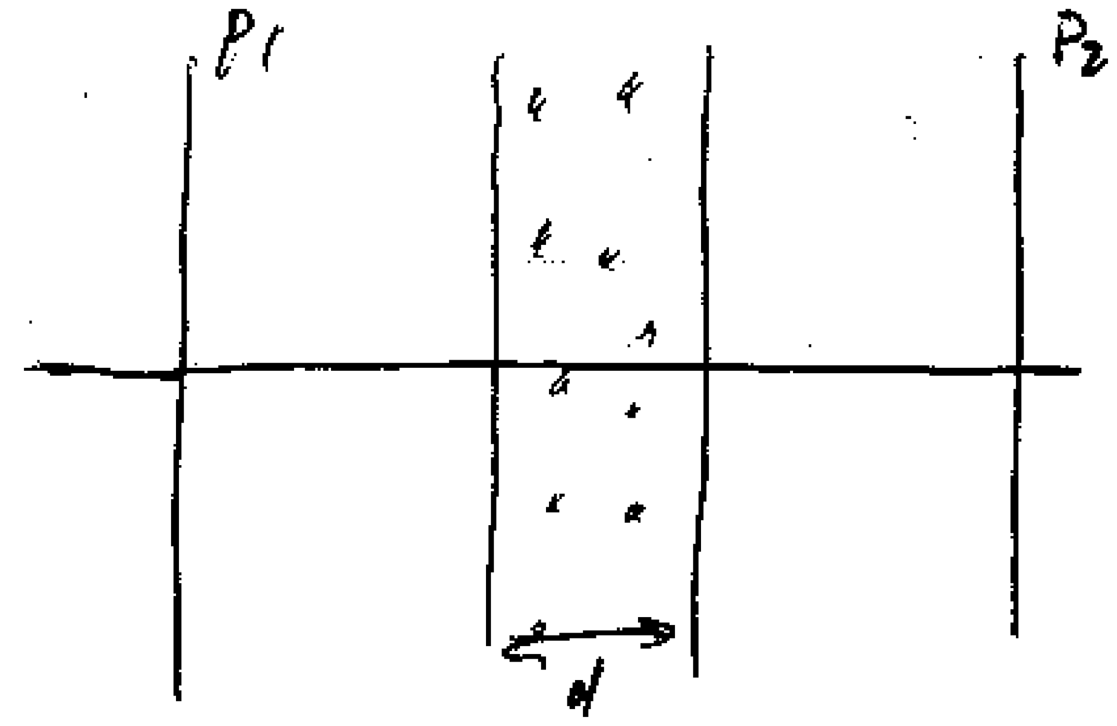


3)

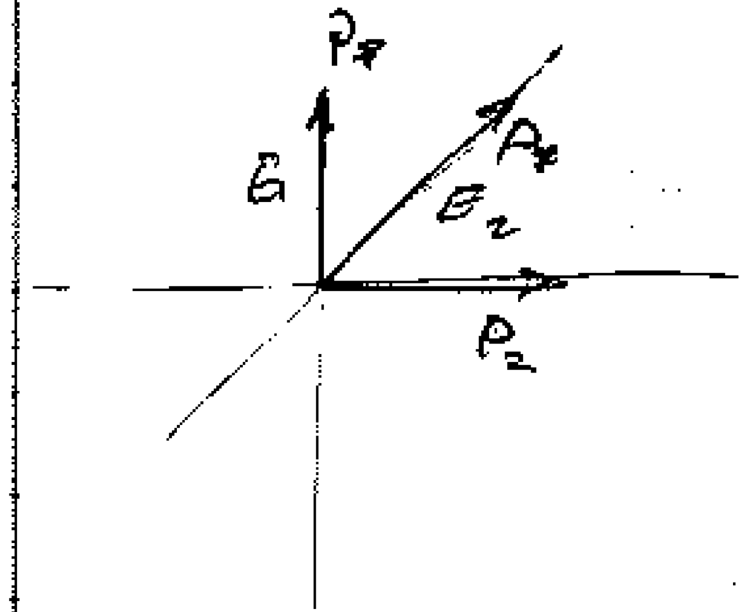


Кристаллическая плоско-параллельная пластинка

между двумя поляризаторами



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \left(n_e - n_0 \right)$$



$$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \quad E_{1e} = E_1 \cos\alpha_1$$

$$E_{1o} = E_1 \sin\alpha_1$$

после прохожд. ~~пл~~астинки

$$E'_{2e} = E_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$$

$$E'_{2o} = E_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

$$E_2^2 = E_1^2 \Big[\big(\cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 + 2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \big)$$

$$- 2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + 2 \cos\delta \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \Big]$$

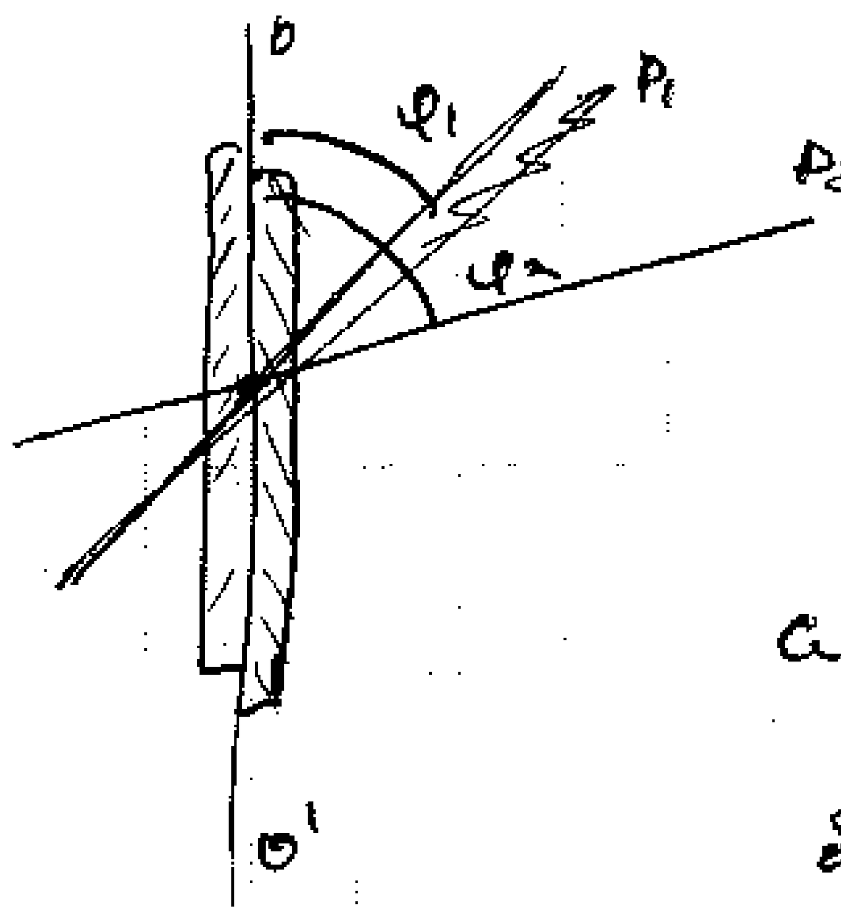
$$\underline{2 E'_{2o} E'_{2e} \cos\delta}$$

$$= E_1^2 \left(\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \left(\cos\delta - 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{E_0^2}{2} \left[\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin\frac{\delta}{2} \right]$$

$I = \frac{I_0}{2}\left[\;—\; u \;—\;\right]$

2.04.06



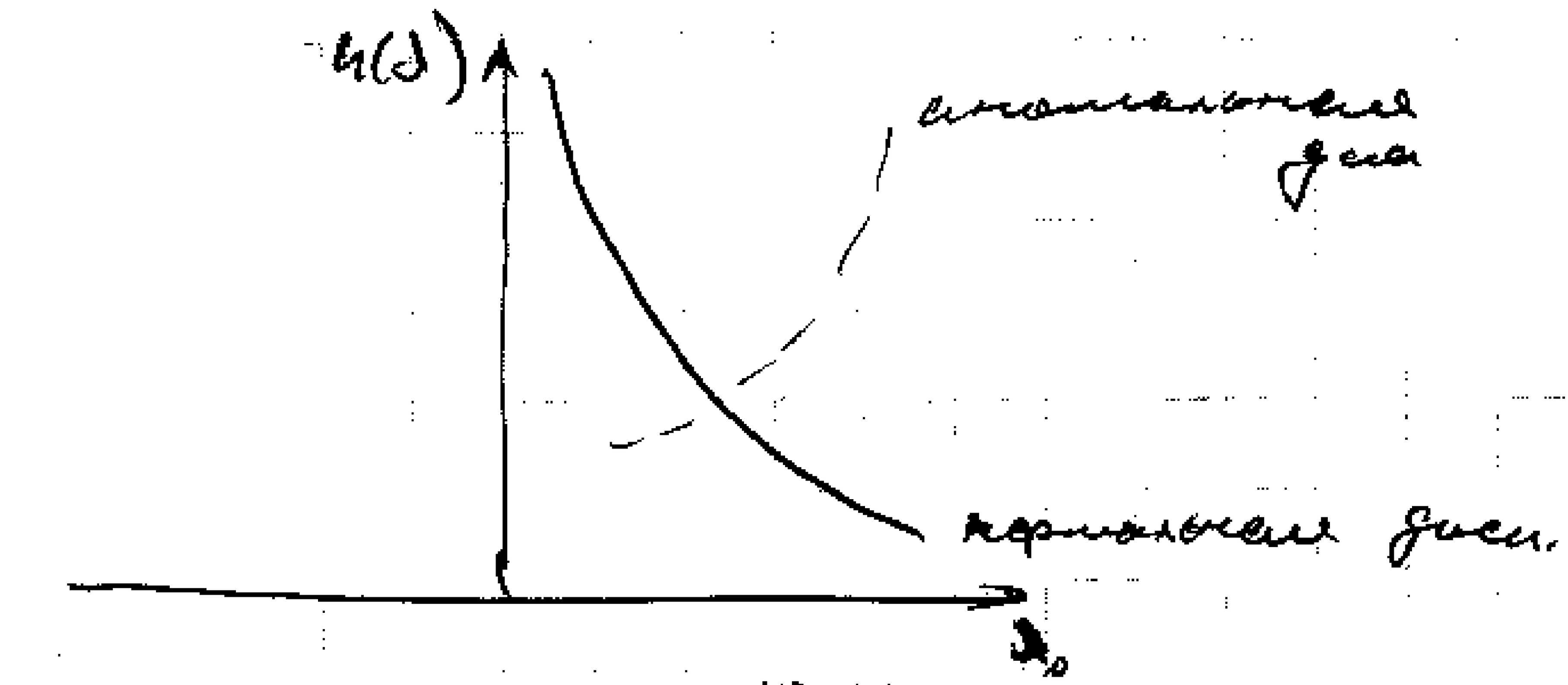
$$I(\lambda) = \frac{I_0(\lambda)}{2}\left(\cos^2(\varphi_2-\varphi_1) - \sin^2\frac{\delta(\lambda)}{2} \times \sin 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2\right)$$

а) $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow I_\perp(\lambda) = \frac{I_0}{2}\sin^2\frac{\delta(\lambda)}{2}$ (⊥)

б) $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{4} \longrightarrow I_\parallel(\lambda) = \frac{I_0}{2}\cos^2\frac{\delta}{2}$ (||)

$I_\Sigma(\lambda) = \frac{I_0}{2}$

Дисперсия света



$\frac{dn}{d\lambda_0} < 0$ (норм.)

$\frac{dn}{d\lambda_0} > 0$ (аном.)

$$E(x,t) = c\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} e^{i(\omega t - kx)}\,d\omega = c\, \cancel{e^{i\omega_0 t}\int e^{i[(\omega-\omega_0)t - k|_{\omega_0}x}}$$

$\Delta\omega = \omega - \omega_0$

конст.

$$= c\, e^{i\omega_0 t}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\left[(\omega-\omega_0)t - k|_{\omega=\omega_0}x - \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega=\omega_0}\Delta\omega\, x\right]} =$$

$$= c\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\Delta\omega\left(t - \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega=\omega_0}x\right)} = E_m\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

похожий

найдем max инт-ла

$$t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} x = 0$$

min $\underset{\to}{v} = v_{фаз} = \frac{\omega}{k}$

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{v_{г}} = u = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{dk}\cdot k \qquad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = vk$$

$$v = \frac{c}{n}, \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

$$u = \frac{c}{n} + \frac{2\pi n c}{\lambda_0 n^2}\,\frac{dn}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{dn}{\lambda_0} - \frac{n}{\lambda_0^2}\,d\lambda_0\right)} =$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \lambda_0\,\frac{dn/d\lambda_0}{\frac{\lambda_0\,dn}{n\,d\lambda_0} - 1}\right)$$

при аномальной дисперсии v получается $> c$

<u>Классическая теория дисперсии</u>

прохождение эл.м. волны через среду вызывает поляризацию среды

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E} \qquad (1)$$

$$\text{вр. стор.}\ \vec{P} = \cancel{n\vec{p}} = -ne\vec{r} \qquad (2)$$

Запишем ур-е движ. e^- под действ. E эл.-м. волны

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} + 2\gamma\dot{\vec{r}} = -e\vec{E}_0\,e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \frac{2\gamma}{m}\dot{\vec{r}} = -\frac{e}{m}\vec{E} e^{i\omega t}$$

ч.р. $\vec{r} = c\, e^{i\omega t}$; $\ddot{\vec{r}} = -\frac{e\vec{E}}{m} e^{i\omega t} c$ обозн $\frac{\gamma}{m} = \beta$

~~пров~~ $$-\frac{e\vec{E}_0}{m} e^{i\omega t}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega 2 i\beta\right) C = -\frac{e\vec{E}_0}{m} e^{i\omega t}$$

т.о. $$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0}{m} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta}$$

(2) $$\vec{P} = \frac{n e^2 \vec{E}_0}{m} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta} \overset{(1)}{=} (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

т.о. $$\varepsilon = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta}$$

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \qquad \sqrt{\varepsilon} = n_0 - i\mu$$

~~плазменная~~ частота

плазменная частота

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = n^2 - \mu^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

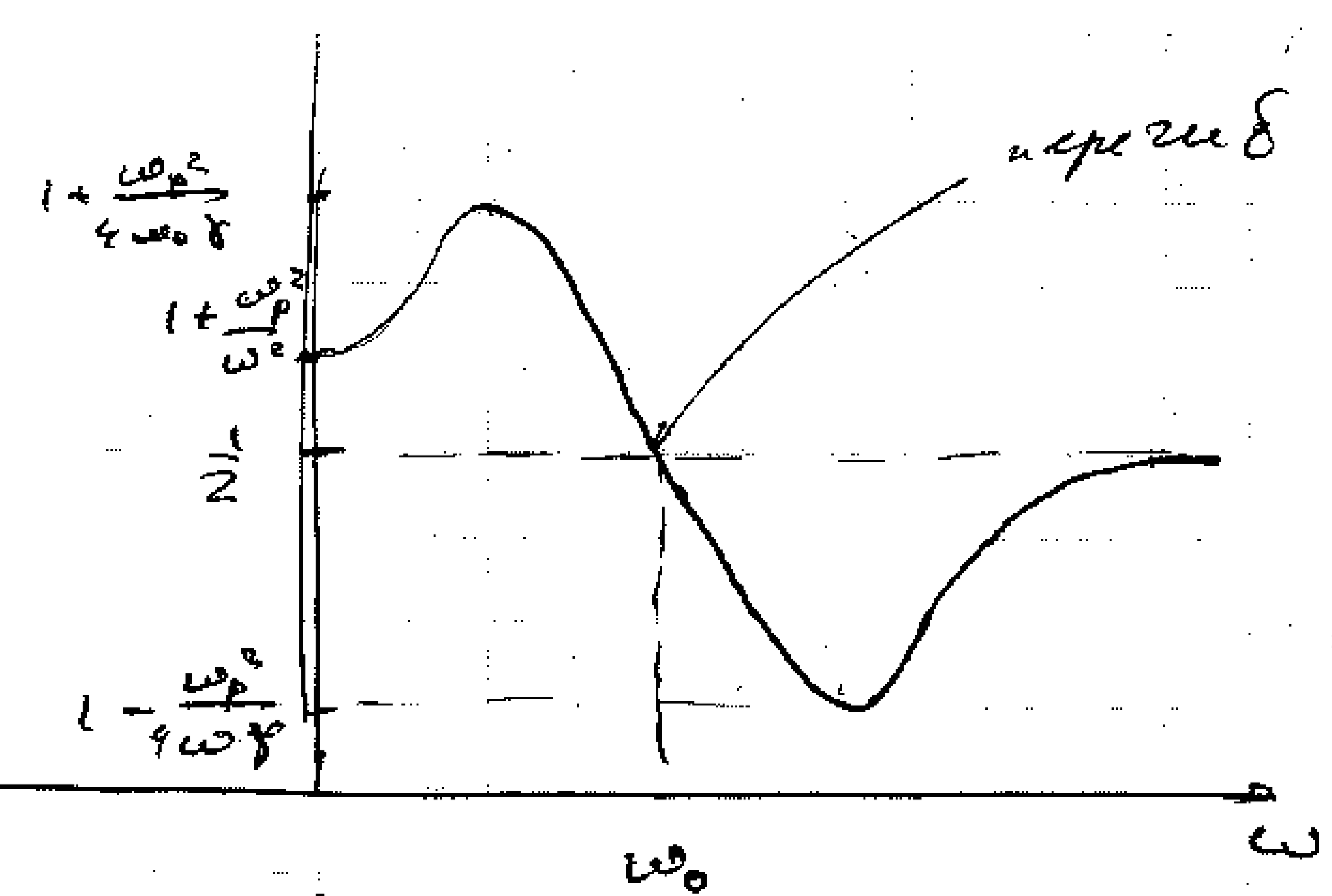
$$\mathrm{Im}\,\varepsilon = -2in\mu = \frac{-2i\,\omega_p^2 \omega_0 \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

Пусть $n \sim 1$, $\mu \ll 1$ для свободных электронов $\beta = 0$, $\omega_0 = 0$

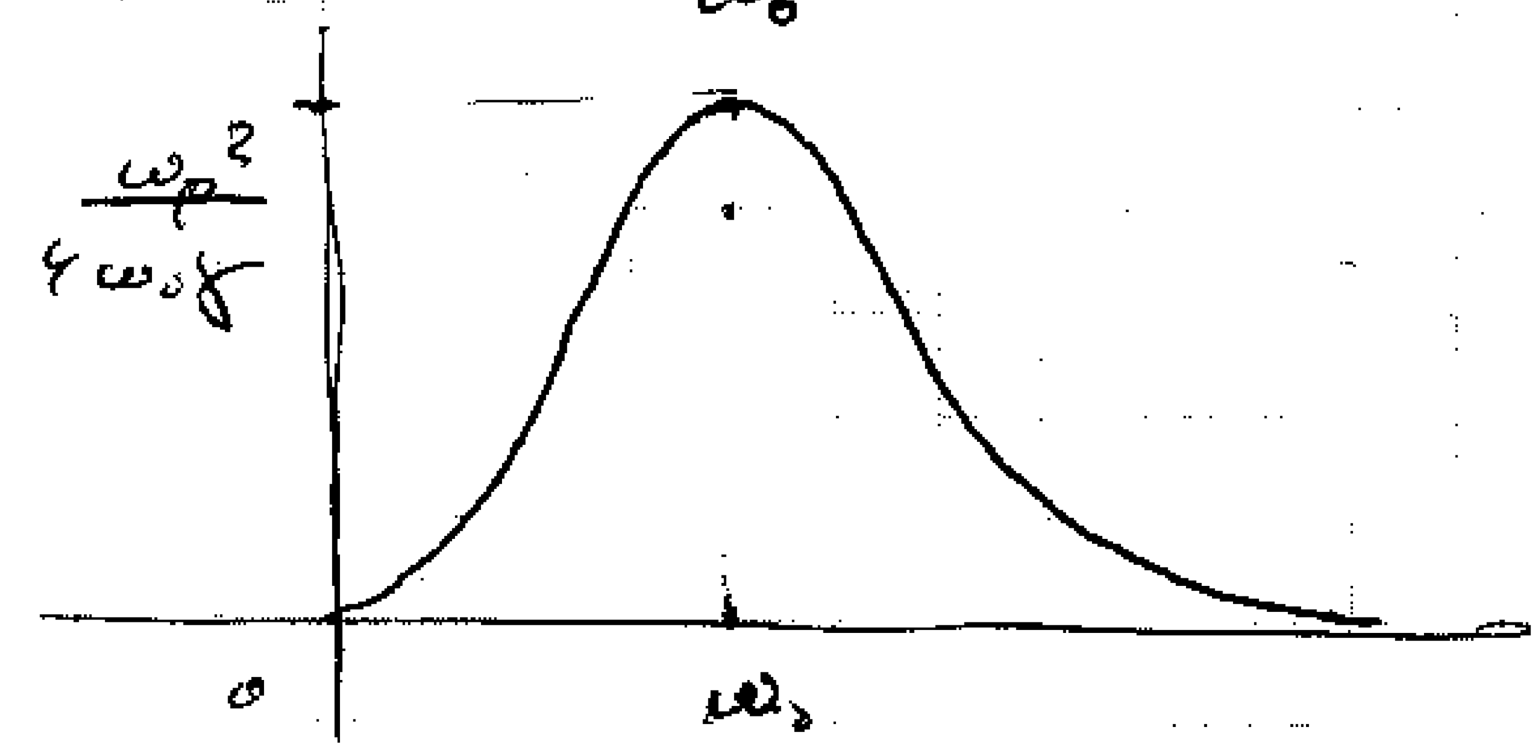
тогда

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$, т.о. при $n \le 0$ – отражение с частотой $\geq \omega_p$

Ионосфера $n_e = 10^{12} \div 10^{14}$ м$^{-3}$



что приводит
к тому, что
при поглощении
скорость
кажется
больше скорости
света



] $\beta \gg \omega_p,\ \omega_0 \Rightarrow$

$$n^2-\mu^2 = 1 - \frac{\omega_p^2\omega^2}{\omega^2+4\omega^2\beta^2}$$

$$n\mu = \frac{\omega_0^2\omega_\beta}{\omega^4+4\omega^2\beta^2}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\ \frac{\omega_p^2\beta}{\omega^2+4\omega\beta^2} - \mu^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+4\beta^2}$$

$$\beta\gg\omega \Rightarrow \frac{\omega_0^2\beta}{4\omega\beta^2} - \mu^4 - \left(1-\frac{\omega_p^2}{4\beta^2}\right)\mu^2 = 0$$

$$\mu^2 \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega\beta} \Rightarrow \mu \sim \frac{\omega_p}{2\sqrt{\omega\beta}}$$

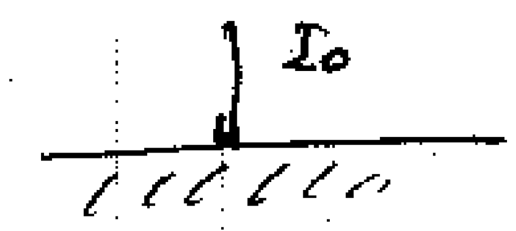
16. 05.06

Лекция №0

Дисперсия

$$\mu \approx \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega\beta}}$$

(з-н Бугера $I(x) = I_0 e^{-æl}$



$$æ = 2\frac{2\pi}{\lambda_0}\mu = 2\frac{2\pi\nu}{c}\mu = \frac{2\omega}{c}\mu$$

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-1} \xRightarrow{\text{опр-ся}} æ l_{ск} \sim 1, \quad l_{ск} \sim \frac{1}{æ} = \frac{c}{2\omega\mu} \sim \frac{2c\sqrt{\omega\beta}}{2\cdot\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega/\beta}} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega\sigma}}$$

$$\sigma = \frac{1}{\beta}$$

чем больше частота, тем меньше скин-слой

Закон Бугера

$$I \sim \langle |E|^2 \rangle \sim \langle E E^* \rangle = E_m^2 \cdot e^{i(\omega t - kx)} e^{-i\omega t + (ik)^* x}$$

$$\sim E_m^2 e^{-i\left(\frac{n - i\mu}{\lambda_0}\right)2\pi x} \cdot e^{-(i(n-i\mu))^* \frac{2\pi x}{\lambda_0}} =$$

$$= E_m^2 e^{-\frac{2\mu\cdot 2\pi}{\lambda_0}x}$$

$$I(x) = I_0 e^{-æx} \qquad æ = \frac{2\mu\omega}{c}$$

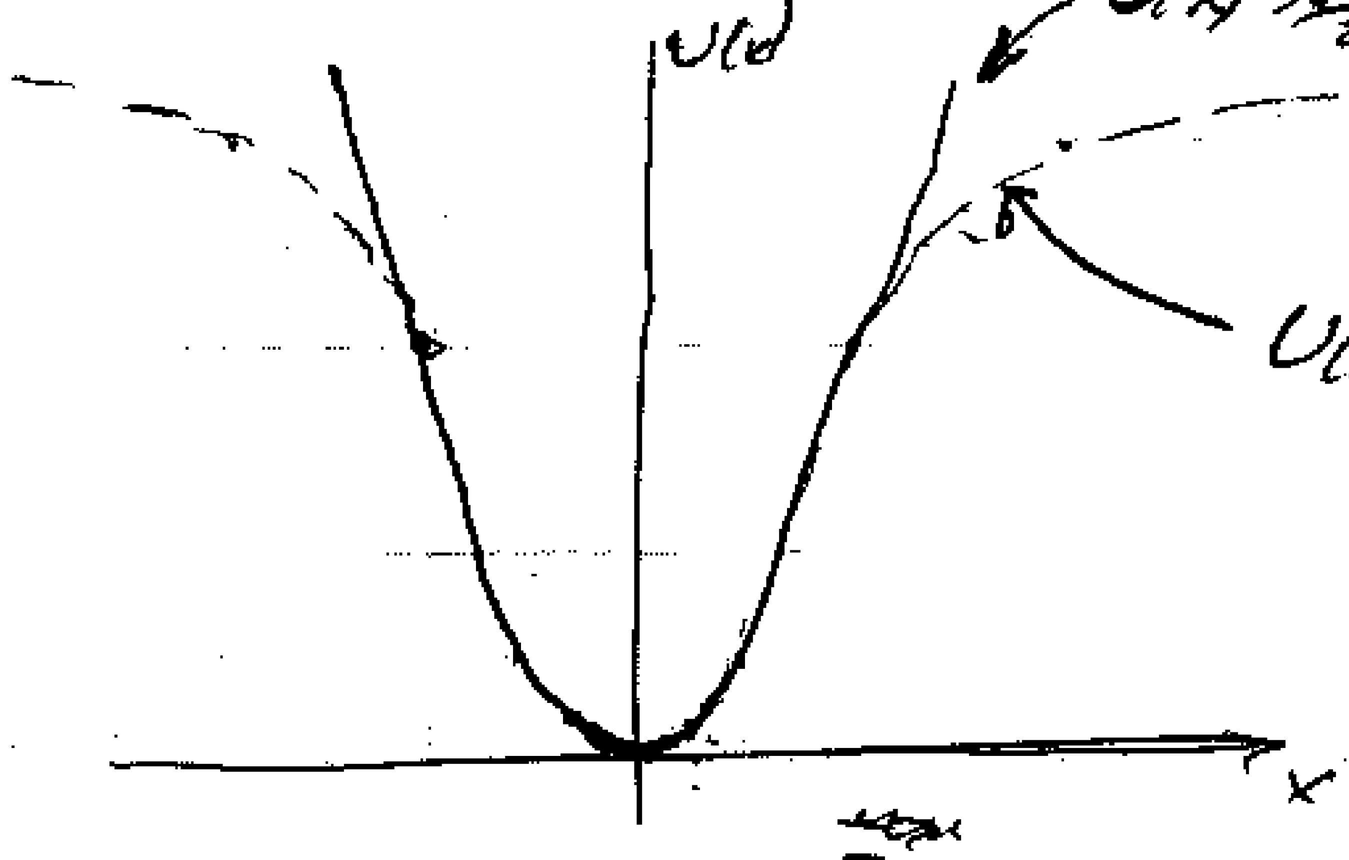
Нелинейные оптические явления

Лазер | 10 – 100 МВт $\Rightarrow E \sim 10^7 - 10^8$ В/м

Эффекты связаны с возникновением негармонического движения.

Обычно Пот. эн. имеет параболич. характер

$U(x) = \frac{kx^2}{2}$ – гармонич.



$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{\beta x^3 m}{3} - \gamma \frac{x^4 m}{4}$$

ангармонич.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_x^{внеш}}{m} + \beta x^2 + \gamma x^3$$

$$\beta |x|, \gamma x^2 \ll \omega_0$$

Решим в нулевом приближении (~~β и γ малы~~)

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = \frac{eE_m \cos\omega t}{m}$$

считаем, что все происходит в диэл. малом объеме

$$\left(-a\omega^2 + a\omega_0^2\right) \cancel{\cos\omega t} = -\alpha \cancel{\cos\omega t}$$

$$\alpha = \frac{eE_m}{m}$$

т.о. $x^{(0)} = a\cos\omega t$

$$a = \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

2-е приближение

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\alpha\cos\omega t + \beta\left(\frac{\alpha}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^2 \underbrace{\cos^2\omega t}_{\frac12(1+\cos 2\omega t)} \; (+)$$

$$(+)\; \gamma\left(\frac{\alpha}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^3 \frac14\left(3\cos\omega t + \cos 3\omega t\right)$$

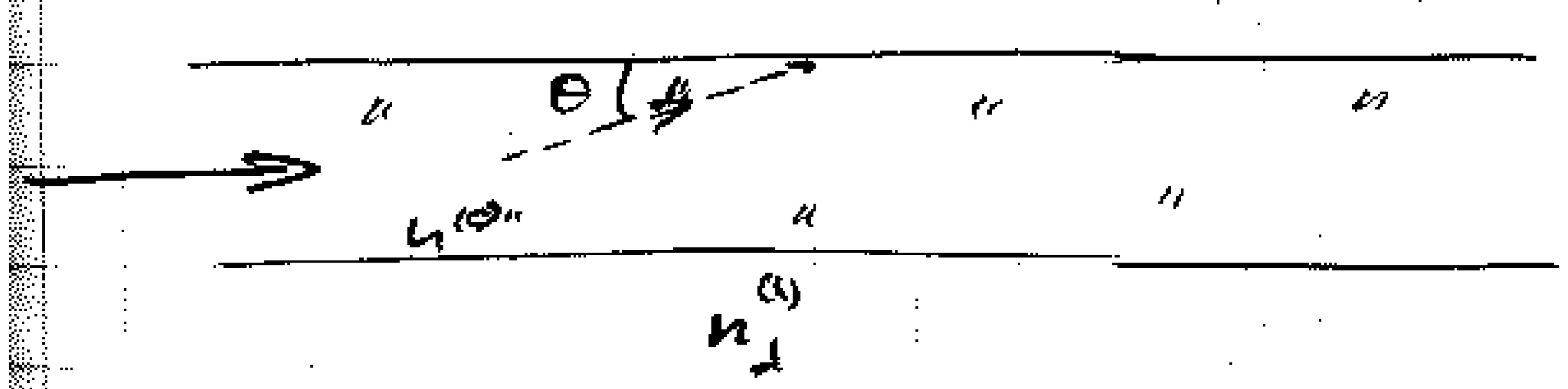
$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \left(-\alpha + \frac34\frac{\alpha^3\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)^3}\right)\cos\omega t + \frac{\beta\alpha^2}{\omega^2-\omega_0^2}\cos 2\omega t +$$

$$+\frac{\beta\alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)^2} + \frac{\gamma}{4}\left(\frac{\alpha^3}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^3\cos 3\omega t$$

$$x^{(1)} = \underbrace{\frac{\beta\alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)\,\omega_0^2}}_{1} + \underbrace{\left(-\alpha + \overbrace{\frac34\frac{\alpha^3\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)}}^{3}\right)\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t}_{2} + \dots$$

1. Поляризация среды
2. Генерация гармоник
3. Изменение показателя преломления (самофокусировка излучения)

$$n = n^{(0)} + \varepsilon E_m^2 \qquad n^{(1)} > n^{(0)}$$



$$\cos\theta = \frac{n^{(0)}}{n^{(1)}} \qquad \theta \ll 1$$

$$1-\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{n^{(0)}}{n^{(0)}+\varepsilon E_m^2} \approx 1-\frac{\varepsilon}{n^{(0)}}E_m^2$$

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon}{n^{(0)}}}\,E_m$$

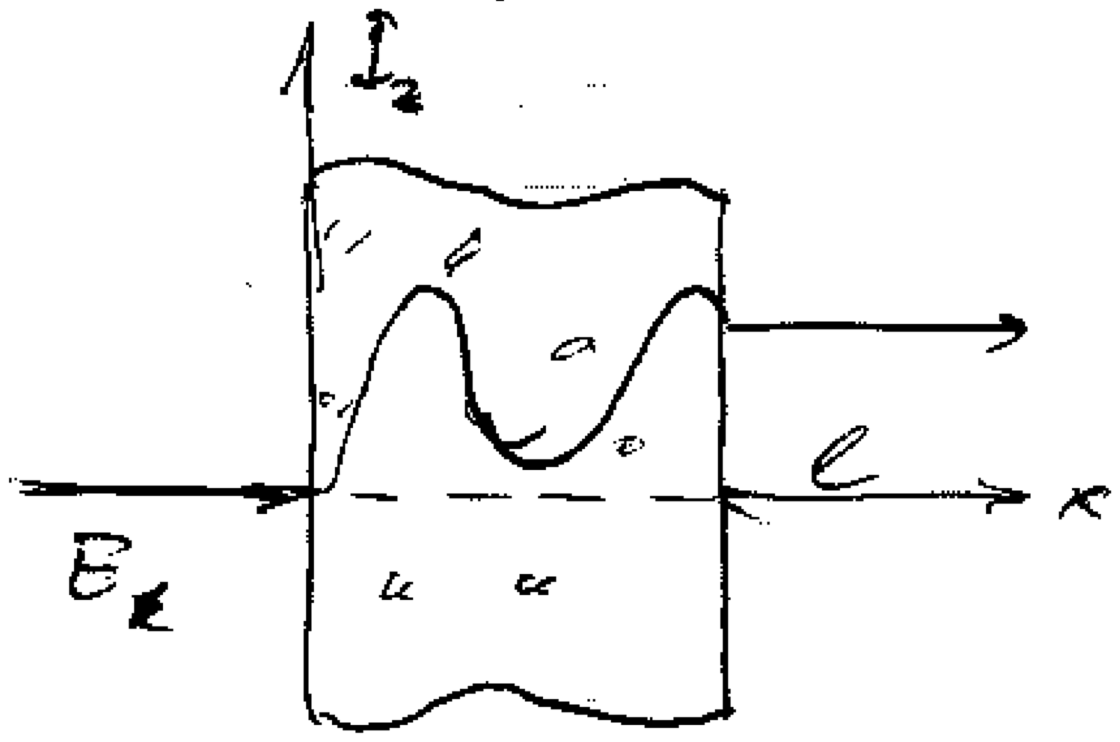
Генерация второй гармоники

$$E_2^{(1)} \approx \frac{\beta \alpha^2}{2(\omega^2-\omega_0^2)} \cos 2(\omega t - k_1 x)$$

$$k_1 = \frac{2\pi n(\omega)}{\lambda_0}$$

$$E_2^{(6н)} = c \cos(2\omega t - k_2 x) \qquad k_2 = \frac{2\pi 2 n(2\omega)}{\lambda_0}$$

$$E_2 = E_2^{(1)} + E_2^{(6н)}$$ внешнее



$$\cancel{E_2(t, 0x)} = E_2(t, x=0) = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_x}{m} + \beta x^2 + \gamma x^3$$

$$E_0 \sim \frac{\beta \alpha^2}{2(\omega-\omega_0)^2} \left[\cos 2(\omega t - k_1 x) - \cos(2\omega t - k_2 x)\right]$$

$$I_2(x) = I_0 \sin^2\left(2\omega t - 2\frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \sin^2\left(\frac{k_2 - 2k_1}{2} x\right)$$

$$\Rightarrow \langle I_2^{(2)} \rangle \sim \sin^2\left(\frac{k_2 - 2k_1}{2} x\right)$$