# IV. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 4.1. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К РАЗДЕЛУ I

В приведенных ниже *повторно* (для удобства пользования книгой) формулировках задач и в ответах и решениях при рассмотрении векторных пространств, если не оговорено противное, подразумевается, что координаты векторов являются целыми неотрицательными числами из множества $\{0, 1, \ldots, L\text{-}1\}$, где $L \geq 2$.

### ЗАДАЧИ

**1.1.** Определить:

1) $|B_k^n|$ – число всех элементов $k$-го слоя куба $B^n$;

2) $|B^n|$ – число всех вершин куба $B^n$.

***1.1.*** 1) $|B_k^n| = C_n^k$.

2) Число символов алфавита, используемого для кодирования вершин куба $L$=2. Поэтому число всех возможных слов, которыми закодированы все возможные вершины куба,

$$|B^n| = L^n = 2^n.$$

Или несколько иначе: $|B^n| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$.

Этот результат часто формулируется как *теорема*: число всех подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов, равно $2^n$ (включая пустое подмножество – подмножество, не содержащее ни одного элемента).



**1.2.** Определить:

1) $|B_k^n(\boldsymbol{b}_i)|$ – число всех элементов сферы радиуса $k$ с центром в $\boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$;

2) $|S_k^n(\boldsymbol{b}_i)|$ – число всех элементов шара радиуса $k$ с центром в $\boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$.

***1.2.*** 1) $|B_k^n(\mathbf{0})| = |B_k^n| = C_n^k$;

2) $|S_k^n(\mathbf{0})| = \sum_{i=0}^{k} C_n^i$.

Заметим, что $|S_k^n(\boldsymbol{b}_i)| \equiv |S_k^n(\mathbf{0})|$ для $i = 1, 2, \ldots, |B^n|$.

**1.3.** Показать, что расстояние Евклида является метрикой.

***1.3.*** Очевидно, что расстояние Евклида $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет аксиомам симметрии и неотрицательности расстояния; поэтому требуется лишь доказать, что оно удовлетворяет аксиоме треугольника.

Для любого набора вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство: [4.10, с. 385]

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad (4\text{-}1)$$

Если положить

$$a_i = x_i - y_i, \quad b_i = y_i - z_i, \quad \text{так, что} \quad a_i + b_i = x_i - z_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

то получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2},$$

что равносильно выполнению аксиомы треугольника.

**1.4.** Показать, что расстояние Хэмминга является метрикой.

***1.4.*** Очевидно, что расстояние Хемминга $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет аксиомам симметрии и неотрицательности расстояния; поэтому требуется лишь доказать, что оно удовлетворяет аксиоме треугольника.

1) $L = 2$. Известно следующее практически очевидное неравенство

$$|a + b| \le |a| + |b|, \qquad (4\text{-}2)$$

где $a$ и $b$ – произвольные действительные (вещественные) числа.

Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ – три произвольных двоичных вектора из $V_n = B^n$. Согласно (4-2)

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i - z_i | = \sum_{i=1}^{n} | (x_i - y_i) + (y_i - z_i) | \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i | + \sum_{i=1}^{n} | y_i - z_i | \qquad (4\text{-}3)$$

и, следовательно, аксиома треугольника выполняется.

2) Общий случай: $L \ge 2$, из которого (4-3) вытекает как частный случай. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = |\Phi(x) - \Phi(-x)| = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \ne 0, \end{cases} \qquad (4\text{-}4)$$

где $\Phi(x)$ – единичная ступенька (функция Хевисайда) с областью определения на множестве $R$: $\Phi(x)=1$ при $x \ge 0$ и $\Phi(x)=0$ при $x<0$.

Докажем справедливость следующего неравенства



$$\theta(a - b) \le \theta(a) + \theta(b), \qquad (4\text{-}5)$$

где $a$ и $b$ – два произвольных целых числа, выбираемых из множества неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, L\text{-}1\}$, а их разность $(a - b)$ по модулю $L$ – неотрицательное целое число из того же множества чисел: $0 \le (a\text{-}b) \le L\text{-}1$.

Рассмотрим всевозможные соотношения между $\theta(a - b)$ и $(\theta(a) + \theta(b))$ в зависимости от равенства или неравенства нулю чисел $a$ и $b$:

$$\theta(a - b) = \begin{cases} 0, & a = b = 0; \ \theta(a) + \theta(b) = 0; \\ 0, & a = b \ne 0; \ \theta(a) + \theta(b)=2; \\ 1, & a \ne b, \ ab = 0; \ \theta(a) + \theta(b)=1; \\ 1, & a \ne b, \ ab \ne 0, \ \theta(a) + \theta(b)=2. \end{cases} \qquad (4\text{-}6)$$

Из совокупности всевозможных приведенных в (4-6) соотношений следует справедливость неравенства (4-5).

Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ – три произвольных $L$-ичных вектора из $V_n$. Очевидно, что

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i - z_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i - y_i + y_i - z_i) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n} \theta(y_i - z_i) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + w(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) =$$

$$= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \qquad (4\text{-}7)$$

и, следовательно, аксиома треугольника выполняется.

**1.5.** Показать, что расстояние Ли является метрикой.

***1.5.*** Очевидно, что расстояние Ли $d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет аксиоме неотрицательности расстояния: это следует из соотношений (1-93), (1-93а) и (1-94).

Поэтому требуется лишь доказать, что оно удовлетворяет: a) аксиоме симметрии и b) аксиоме треугольника.

### a) Аксиома симметрии

Покажем, что справедливы соотношения:

$$d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = w_L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - y_i \,|_L =$$

$$= d_L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = w_L(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} |\, y_i - x_i \,|_L \,. \qquad (4\text{-}8)$$

Для этого достаточно доказать, что

$$|a|_L = |a\text{-}0|_L = |0\text{-}a|_L = |\text{-}a|_L = |L\text{-}a|_L, \qquad (4\text{-}9)$$

где $a$ и $(L\text{-}a)$ принадлежат $\{0, 1, \ldots, (L\text{-}1)\}$, $L \geq 2$.

Согласно (1-93a)

$$|a|_L = \begin{cases} a, & 0 \leq a \leq (L\text{-}1)/2, \\ L - a, & (L\text{-}1)/2 < a \leq (L\text{-}1) \end{cases} \qquad (4\text{-}10)$$

и

$$|\text{-}a|_L = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ L\text{-}a, & 0 < L\text{-}a \leq (L\text{-}1)/2, \\ a, & (L\text{-}1)/2 < L\text{-}a \leq (L\text{-}1). \end{cases} \qquad (4\text{-}11)$$

Из двух последних выражений (4-10) и (4-11) вытекает справедливость выражения (4-8). Таким образом, установлено, что аксиома симметрии выполняется.

### b) Аксиома треугольника

Докажем справедливость неравенства, из которого следует справедливость аксиомы треугольника:



$$|a - b|_L \leq |a|_L + |b|_L, \qquad (4\text{-}12)$$

где $a$ и $b$ – целые неотрицательные числа, принадлежащие множеству $\{0, 1, \ldots, (L\text{-}1)\}$, $L \geq 2$.

Очевидно, что

$$|a\text{-}b|_L = \begin{cases} a\text{-}b, & 0 \leq a\text{-}b \leq (L\text{-}1)/2, & \text{если } a > b; \\ L\text{-}(a\text{-}b), & (L\text{-}1)/2 < a\text{-}b \leq L\text{-}1, & \text{если } a > b; \\ 0, & & \text{если } a = b; \\ L\text{+}(a\text{-}b), & 0 \leq L\text{+}(a\text{-}b) \leq (L\text{-}1)/2, & \text{если } a < b; \\ b\text{-}a, & (L\text{-}1)/2 < L\text{+}(a\text{-}b) \leq (L\text{-}1), & \text{если } a < b. \end{cases} \qquad (4\text{-}13)$$

Обозначим интервал $[0, (L\text{-}1)/2]$ как $[\ldots]_1$ и интервал $((L\text{-}1)/2, (L\text{-}1)]$ как $(\ldots]_2$. Табл.4.1 содержит найденные с помощью выражений (4-13) и (4-10) величины $|a\text{-}b|_L$ и $|a|_L\text{+}|b|_L$ или прочерки для каждой из двенадцати мыслимых ситуаций, формально определяемых четырьмя всевозможными размещениями $a$ и $b$ в интервалах $[\ldots]_1$ и $(\ldots]_2$ и тремя всевозможными соотношениями между $a$ и $b$. Прочерки в табл.4.1 соответствуют ***нереализуемым*** ситуациям.

Таблица 4.1

| $a\in[\ldots]_m$, $b\in[\ldots]_n$ | $a>b$ | | $a=b$ | | $a<b$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lvert a\text{-}b\rvert_L$ | $\lvert a\rvert_L\text{+}\lvert b\rvert_L$ | $\lvert a\text{-}b\rvert_L$ | $\lvert a\rvert_L\text{+}\lvert b\rvert_L$ | $\lvert a\text{-}b\rvert_L$ | $\lvert a\rvert_L\text{+}\lvert b\rvert_L$ |
| $a\in[\ldots]_1$, $b\in[\ldots]_1$ | $a\text{-}b$ | $a\text{+}b$ | 0 | $a\text{+}b$ | $b\text{-}a$ | $a\text{+}b$ |
| $a\in(\ldots]_2$, $b\in[\ldots]_1$ | $a\text{-}b$ | $L\text{-}a\text{+}b$ | — | — | — | — |
| | $L\text{-}a\text{+}b$ | $L\text{-}a\text{+}b$ | | | | |
| $a\in[\ldots]_1$, $b\in(\ldots]_2$ | — | — | — | — | $L\text{+}a\text{-}b$ | $L\text{+}a\text{-}b$ |
| | | | | | $b\text{-}a$ | $L\text{+}a\text{-}b$ |
| $a\in(\ldots]_2$, $b\in(\ldots]_2$ | $a\text{-}b$ | $2L\text{-}a\text{-}b$ | 0 | $2L\text{-}a\text{-}b$ | $b\text{-}a$ | $2L\text{-}a\text{-}b$ |

Сравнивая приведенные для каждой ситуации в табл. 4.1 величины $|a\text{-}b|_L$ и $|a|_L\text{+}|b|_L$, убеждаемся в выполнимости неравенства (4-12).

Используя неравенство (4-12), справедливость которого только что установлена, получим

$$d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - z_i \,|_L = \sum_{i=1}^{n} |\, (x_i - y_i) - (z_i - y_i) \,|_L \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - y_i \,|_L + \sum_{i=1}^{n} |\, z_i - y_i \,|_L = d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \ . \qquad (4\text{-}14)$$

Таким образом доказано, что расстояние Ли $d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ является метрикой.

**1.6.** Показать, что при $L = 2$ и $L = 3$ расстояние Ли и расстояние Хэмминга между двумя комбинациями длины $n$ *совпадают*, а при $L > 3$ расстояние Ли больше/равно расстояния/ю Хэмминга.

***1.6.*** Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ – два произвольных $L$-ичных вектора из $V_n$. При любом $L$ расстояние Хемминга выражается соотношением

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i - z_i) , \qquad (4\text{-}15)$$

а расстояние Ли соотношением

$$d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = w_L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - z_i \,|_L \ . \qquad (4\text{-}16)$$

Сравним вклад в расстояние Хемминга и в расстояние Ли между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ разницей их $i$-х компонент $(x_i - y_i)$; т.е. сравним величины $\theta(x_i - z_i)$ и $|x_i - y_i|_L$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно (4-4) минимально и максимально возможные вклады, вносимые слагаемым $\theta(x_i - z_i)$ в расстояние Хемминга, равны соответственно 0 и 1 и ***не зависят*** от $L$.

Согласно соотношению (4-13) минимально и максимально возможные вклады, вносимые слагаемым $|x_i - z_i|_L$ в расстояние Ли, равны соответственно 0 и $(L\text{-}1)/2$ при $L$ нечётном и 0 и $L/2$ – при $L$ чётном; т.е. только максимально возможный вклад ***завит*** от $L$ и ***растёт*** с ростом $L$.



Так как при $L = 2$ и при $L = 3$ максимально возможный вклад в расстояние Ли равен 1, то расстояния Ли и Хемминга в этих случаях совпадают.

При $L > 3$ расстояние Ли больше или равно расстояния/ю Хемминга, так как максимально возможный вклад, вносимый слагаемым $|x_i - z_i|_L$ в расстояние Ли, растёт с ростом $L$.

**1.7.** Показать, что для произвольных векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ из $B^n$ справедливо соотношение:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = d(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}).$$

***1.7.*** Предположим, что $x$, $y$ и $z$ – произвольные целые числа из $\{0, 1\}$. Покажем непосредственным вычислением, что при этом всегда справедливы соотношения

$$|x - z| = |x \oplus z| = |(x \oplus y) \oplus (y \oplus z)| \qquad (4\text{-}17)$$

(см. табл.4.2).

Таблица 4.2

| $x, y, z$ | $\lvert x - z \rvert$ | $\lvert x \oplus z \rvert$ | $\lvert (x \oplus y) \oplus (y \oplus z) \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0, 0, 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0, 0, 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0, 1, 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1, 0, 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1, 1, 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1, 0, 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0, 1, 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1, 1, 1 | 0 | 0 | 0 |

Учитывая соотношение (4-17), получим

$$d(\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{z}) =$$

$$=\sum_{i}^{n}|\,(x_i\oplus y_i)-(y_i\oplus z_i)\,|=\sum_{i}^{n}|\,(x_i\oplus y_i)\oplus(y_i\oplus z_i)\,|=$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\,x_i-z_i\,|=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).$$

**1.8.** Чему равно число векторов $z\in B_k^n$, удовлетворяющих условию:

$$2^{n-1}\le\gamma(z)<2^n\ ? \qquad (1\text{-}108)$$

***1.8.*** Согласно условию задачи $\gamma(z)$ для каждого вектора $z$ в рассматриваемом случае выражается соотношением:

$$\gamma(z)=\sum_{i=1}^{n}z_i2^{n-i}\ , \qquad (4\text{-}18)$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n}z_i=k$.

Заметим, что

$$\gamma(111\ \ldots\ 1)=2^n\text{-}1; \qquad \gamma(100\ \ldots\ 0)=2^{n-1}.$$

Следовательно, вектора $z\in B_k^n$, удовлетворяющие условию (1-108), должны иметь единицу в первой позиции и остальные ($k$-1) единиц в следующих ($n$-1) позициях; поэтому искомое число векторов равно $C_{n-1}^{k-1}$.

**1.9.** Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ – некоторые вектора из $B^n$, $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=m$. Найти число векторов $\boldsymbol{y}$ из $B^n$, удовлетворяющих условию:

1) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$;



2) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k,\quad d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=r$;

3) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le k;\quad d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=r$.

***1.9.*** Из постановки задачи следует, что $m$ ***определённых*** компонент двоичного вектора $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$ равны единице, а все остальные (также определённые) компоненты равны нулю. Очевидно, что $m$ удовлетворяет соотношениям $0\le m\le n$.

1) Искомое число векторов $\boldsymbol{y}$ из $B^n$, удовлетворяющих условию задачи, равно числу всех подмножеств множества всех разрядов двоичной последовательности $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$ длины $n$ и веса $m$, содержащих единицы, и, согласно теореме о числе всех подмножеств множества, (см. решение задачи **1.1.** 2)

$$N_y=\ 2^m. \qquad (4\text{-}19)$$

2) Введём дополнительные обозначения:

$k=k^*+(k-k^*)$, где $k^*$ – «частичное расстояние» между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ за счёт разницы содержимого тех их $m$ позиций, которые заняты единицами в $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$; а $(k-k^*)$ – «частичное расстояние» между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ за счёт разницы содержимого их остальных $(n-m)$ позиций, которые заняты в $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$ нулями;

$r=r^*+(r-r^*)$, где $r^*$ – «частичное расстояние» между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ за счёт разницы содержимого тех их $m$ позиций, которые заняты в $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$ единицами; а $(k-k^*)$ – «частичное расстояние» между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ за счёт разницы содержимого их остальных $(n-k)$ позиций, которые заняты в $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{z}$ нулями;

при этом имеют место соотношения: $k^*\le k$, $r^*\le r$,

$$r^*=m-k^*, \qquad (4\text{-}20)$$

$$k - k^* = r - r^*. \qquad (4\text{-}21)$$

Из (4-20) и (4-21) найдём:

$$k^* = \frac{k+m-r}{2} \quad (4\text{-}22), \qquad r^* = \frac{r+m-k}{2}. \quad (4\text{-}22\text{а})$$

При этом искомое число

$$N_y = \binom{m}{k^*} \cdot \binom{n-m}{r-r^*}, \qquad (4\text{-}23)$$

где первый сомножитель получен из (4-22), а второй сомножитель получен из (4-22а).

3)
$$N_y = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{\frac{j+m-r}{2}} \cdot \binom{n-m}{\frac{j+r-m}{2}} \qquad (4\text{-}24)$$

**Замечание**. В (4-23) и (4-24) полагается, что $C_n^q = 0$ при нецелом $q$.

**1.10.** Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ – некоторые вектора из $B^n$, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = m$. Найти $N_y$ – число векторов $\boldsymbol{y}$ из $B^n$, удовлетворяющих условию:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) > d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

***1.10.*** $N_y = (2^n - 2^m)$.

Пусть $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$ – множества векторов, удовлетворяющих соответственно соотношениям:

1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$,
2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) > d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$,



3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.

Очевидно, что $|Y_1|=|Y_2|+|Y_3|$. Следовательно, согласно решениям задач **1.1** и **1.7**:

$$N_y = |Y_2| = |Y_1| - |Y_3| = (2^n - 2^m).$$

**1.11.** Ниже приведены подклассы кодов из класса блоковых групповых кодов с проверкой на чётность с одинаковыми параметрами:

1) $n$ и $k$,
2) $n$ и $d_{\min}$,
3) $k$ и $d_{\min}$.

Какой в каждом из перечисленных подклассов 1), 2) и 3) код более предпочтителен?

***1.11.*** 1) Среди кодов с одинаковыми параметрами $n$ и $k$ более предпочтителен код, имеющий *наибольшее кодовое расстояние* $d_{\min}$;

2) среди кодов с одинаковыми параметрами $n$ и $d_{\min}$ более предпочтителен код, имеющий наибольшее число информационных символов $k$ и, следовательно, обладающий наибольшим значением $N = 2^k$ и $R=k/n$;

3) среди кодов с одинаковыми параметрами $k$ и $d_{\min}$ более предпочтителен код, имеющий наименьшую длину кодовых комбинаций $n$ и, следовательно, обладающий наибольшим значением $R=k/n$.

**1.12.** Ниже приведены различные двоичные пятизначные блоковые коды. Требуется:

определить вид кода;

охарактеризовать потенциальные обнаруживающую и исправляющую способности кода;

определить параметры $d_{min}$ и $R$ кода;

произвести сравнение приведенных кодов как корректирующих.

1) (5, 1)-код:

$$\boldsymbol{H}_{(5,\,1)} = \begin{bmatrix} 11000 \\ 10100 \\ 10010 \\ 11001 \end{bmatrix},$$

2) 00011 00101 00110 01001 01010

01100 10001 10010 10100 11000,

3) (5, 2)-код:

$$\boldsymbol{H}_{(5,\,2)} = \begin{bmatrix} 11100 \\ 10010 \\ 01001 \end{bmatrix},$$

4) (5, 3)-код:

$$\boldsymbol{H}_{(5,\,3)} = \begin{bmatrix} 11010 \\ \quad\quad \\ 01101 \end{bmatrix},$$

5) 00001 00010 00100 01000 10000,

6) (5,4)-код:

$$\boldsymbol{H}_{(5,\,4)} = [11111].$$



***1.12.*** См. табл. 4.3.

Таблица 4.3

| № | Заданный код | Вид заданного кода | Параметры заданного кода | $d_{\min}$, $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (5, 1)-код $G_{(5,1)} = [I_1 R_{1\times 4}]$ $H_{(5,1)} = \left[R^{\mathrm{T}}_{1\times 4} I_4\right]$ | Двоичный пятизначный линейный (групповой) (5, 1)-код; код с повторением | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5; $k$=1; $r$=4 | $N$=2, $d_{\min}$=5, $R$= 1/5= =0.20 |
| 2 | 00011<br>00101<br>00110<br>01001<br>01010<br>01100<br>10001<br>10010<br>10100<br>11000 | Двоичный пятизначный *нелинейный равновесный код* «2 из 5», используемый иногда для представления десятичных цифр 0, 1, …, 9. Код применяется при *несимметричных* ошибках [4.3] | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5 | $N$=10, $d_{\min}$=2, $R$= =$ld$(10)/5= =0.664 |
| 3 | (5, 2)-код $G_{(5,2)} = [I_2 R_{2\times 3}]$ $H_{(5,2)} = \left[R^{\mathrm{T}}_{2\times 3} I_3\right]$ | Двоичный пятизначный линейный (групповой) (5, 2)-код | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5; $k$=2; $r$=3 | $N$=4, $d_{\min}$=3, $R$ = 2/5= =0.40 |

Таблица 4.3 (продолжение)

| № | Заданный код | Вид заданного кода | Параметры заданного кода | $d_{min}$, $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | (5, 3)-код $G_{(5,3)}=[I_3 R_{3\times 2}]$ $H_{(5,3)}=\left[R^{T}_{3\times 2} I_2\right]$ | Двоичный пятизначный линейный групповой (5, 3)-код | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5; $k$=3; $r$=2 | $N$=8, $d_{min}$=2, $R$=3/5= =0.60 |
| 5 | 00001 00010 00100 01000 10000 | Двоичный пятизначный нелинейный эквидистантный и равновесный код «1 из 5» | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5 | $N$=5, $d_{min}$=2, $R$ = =$ld(5)$/5= =0.464 |
| 6 | (5, 4)-код $G_{(5,4)}=[I_4 R_{4\times 1}]$ $H_{(5,4)}=\left[R^{T}_{4\times 1} I_1\right]$ | Двоичный пятизначный линейный групповой (5, 4)-код; код с общей или однократной проверкой (код со стиранием и возможно с переспросом) | $L$=2; $N_0$=32; $n$=5; $k$=4; $r$=1 | $N$=16, $d_{min}$=2, $R$=4/5= =0.80 |

Код №1 обладает самой высокой исправляющей способностью ($d_{min}$=5, $t$ = 2, $s$ = 4); второе место после него занимает код № 3 ($d_{min}$=3, $t$=1, $s$ = 2).

Коды № 2, № 4, № 5 и № 6 ($d_{min}$=2) позволяют только обнаруживать, но не исправлять ошибки.

Код № 6 обладает самой высокой скоростью ($R$ = 0.8); код № 1 обладает самой низкой скоростью ($R$ = 0.2).



**1.13.** Пусть вероятность искажения одиночного символа в ДСК $p$ = 0.01. Определить вероятность появления $q$-кратной ошибки на выходе ДСК $P(q)$, $q$ = 0, 1, …, 5 при условии, что используемый с ДСК код является двоичным пятизначным, а передаваемые по каналу сообщения являются равновероятными. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (с.к.о) кратности ошибки $q$.

Сравнить применение в рассматриваемом канале кодов № 1 ($d_{min}$=5) и № 3 ($d_{min}$=3) из предыдущей задачи.

***1.13.*** Решение задачи в Mathcad.

p := 0.01

$$P(q) := \frac{5! \cdot p^{q} \cdot (1-p)^{5-q}}{q! \cdot (5-q)!}$$

q := 0,1..5

$$\sum_{q=0}^{5} q \cdot P(q) = 0.050000$$

P(q) =

| |
|---|
| 0.950990 |
| 0.048030 |
| $9.702990 \cdot 10^{-4}$ |
| $9.801000 \cdot 10^{-6}$ |
| $4.950000 \cdot 10^{-8}$ |
| $1.000000 \cdot 10^{-10}$ |

$$\sum_{q=0}^{5} (q-0.05)^2 \cdot P(q) = 0.049500$$

$$\sqrt{0.05} = 0.223607$$

P(0) = 0.950990

(P(0) + P(1) + P(2)) = 0.999990

(P(0) + P(1)) = 0.999020

См. (1-4), (1-5). Приведенные результаты счёта свидетельствуют о том, что низкократные ошибки являются высоковероятными, а высокократные – низковероятными.

Математическое ожидание кратности ошибки $q$ равно 0.050000; с.к.о. равно 0.223607.

Если с заданным ДСК применяется код № 1 ($d_{min}$=5), то вероятность правильного декодирования равна ($P(0)+P(1)+P(2)$) = 0.999990.

Если с заданным ДСК применяется код № 3 ($d_{min}$=3), то вероятность правильного декодирования ($P(0) + P(1)$)= =0.999020.

**1.14.** Какие предпосылки:

1) о свойствах передаваемых сообщений или о свойствах двоичных кодовых слов, поступающих на вход канала,

2) о свойствах канала,

3) о методе декодирования на приёмном конце канала

***необходимы*** для обоснования оптимальности метода декодирования по максимуму правдоподобия (декодирование принятой комбинации $\boldsymbol{y}$ в ближайшую кодовую комбинацию в смысле расстояния Хэмминга) и почему?

***1.14.*** 1) Кодовые слова, поступающие на вход канала, (а, следовательно, и передаваемые сообщения) должны быть ***равновероятными***.

2) Канал должен быть двоичным каналом ***без памяти*** (СБПК, [4.11]). При этом в выходных последовательностях символов длины $n$ ошибки будут ***статистически независимыми***.

3) Если $p_0$ – вероятность искажения двоичных символов в ДСК, то должно выполняться ***соотношение:*** $p_0 < 0.5$



(на практике $p_0 << 1$); отсюда следует, что низкократные ошибки являются более вероятными.

Вывод: при выполнении условий, указанных в пп. 1), 2) и 3) справедливо соотношение (1-53) и, следовательно, наилучшим способом декодирования полученной на выходе канала комбинации, содержащей ошибки, является её декодирование в ближайшую в смысле расстояния Хемминга кодовую комбинацию, а это и есть декодирование по максимуму правдоподобия.

**1.15.** Показать, что если на вход ДСК поступают статистически независимые *неравновероятные кодовые слова* $\boldsymbol{x}_i$, $i$=1, 2, …, $N$, то вывод (в решении задачи **1.14**), вообще говоря, не является обоснованным.

***1.15.*** Если сообщения не являются равновероятными, то соотношение (1-53) уже не имеет места и, следовательно, вывод, сделанный в решении задачи 14, уже не является обоснованным.

Заметим также, что равномерное распределение $p(\boldsymbol{x}_i)$=1/$N$, $i$=1, 2, …, $N$, максимизирует скорость передачи информации; при этом $R = \dfrac{\mathrm{ld}(N)}{n}$ [бит/симв].

**1.16.** Найти максимально возможную мощность кода $C \subseteq B^n$, расстояние Хемминга $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ между двумя произвольными кодовыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ которого – чётное число.

***1.16.*** $N_{max}(n,2) = N_{max1} = \sum_{i=1}^{n} C_n^{2\cdot]i/2[}$ или

$$N_{max}(n,2) = N_{max2} = \sum_{i=1}^{]n/2[} C_n^{2\cdot i+1};$$

при этом $N_{max1} + N_{max2} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$.

Класс кодов, о которых говорится в постановке задачи, распадается на два непересекающихся подкласса: кодов:

1) подкласс кодов, все кодовые комбинации которых имеют чётный вес, при этом

$$N_{max\,1} = \sum_{i=1}^{n} C_n^{2\cdot]i/2[};$$

2) подкласс кодов, состоящих из кодовых комбинаций, которые имеют нечётный вес, при этом

$$N_{max\,2} = \sum_{i=0}^{]n/2[} C_n^{2\cdot i+1}.$$

**1.17.** Сколько существует максимальных <*n*, 2>-кодов ?

***1.17.*** Два.

Согласно решению задачи **1.16** существует два максимальных <*n*, 2>-кода:

1) максимальный код, все $N_{max}(n,2) = \sum_{i=1}^{n} C_n^{2\cdot]i/2[}$, кодовых комбинаций которого имеют чётный вес;

2) максимальный код, все $N_{max}(n,2) = \sum_{i=1}^{]n/2[} C_n^{2\cdot i+1}$, кодовых комбинаций которого имеют нечётный вес.

**1.18.** Показать, что мощность плотно упакованного <*n*, 2*t*+1>-кода равна $2^n / \sum_{i=0}^{t} C_n^i$.



***1.18.*** См. пример 2.21. Отметим, что для существующего плотно упакованного кода $\sum_{i=0}^{t} C_n^i$ должна быть степенью двойки.

**1.19.** Существует ли плотно упакованный <*n*, 3>-код при *n*=147?

***1.19.*** Нет, не существует, так как для существования плотно упакованного <*n*, 3>-кода необходимо, чтобы отношение $\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i}$ было целым числом. В рассматриваемом случае *n* =147, *t*=1. Следовательно,

$$\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i} = \frac{2^{147}}{1+n} = \frac{2^{147}}{148}$$

не есть целое число, так как 148 не является целочисленной степенью двойки.

**1.20.** Показать, что при $n > 7$ не существует плотно упакованных <*n*, 7>-кодов.

***1.20.*** В рассматриваемом случае $n \geq 8$, $t = 3$. С помощью элементарных преобразований можно прийти к соотношению

$$\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i} = \frac{2^n}{(1+n+s)} = \frac{2^n}{[\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}]}, \qquad (4\text{-}25)$$

где

$$s = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \qquad (4\text{-}26)$$

Предположим, что для некоторого $n \geq 8$ знаменатель в самом правом выражении в (4-25) является степенью двойки. Следовательно, для некоторого $k$ выполняется равенство:

$$(n+1)(n^2 - n + 6) = 3 \cdot 2^k . \qquad (4\text{-}27)$$

При этом возможны два случая:

1) $(n+1)=2^r$

и

2) $(n+1)=3 \cdot 2^r$,

где $r$ – некоторое натуральное число.

**Первый случай**

В этом случае из (4-27) следует: $(n^2 - n + 6) = 3 \cdot 2^{k-r}$. Подставляя в это последнее выражение $n = 2^r - 1$, получим:

$$2^{2r} - 2 \cdot 2^r + 1 - 2^r + 1 + 6 = 3 \cdot 2^{k-r}$$

или

$$2^{2r} - 2 \cdot 2^r - 2^r + 2^3 = 3 \cdot 2^{k-r},$$

или

$$2^{2r-3} - 3 \cdot 2^{r-3} + 1 = 3 \cdot 2^{k-r-3}.$$

При $r > 3$ ($n \geq 8$) левая часть есть нечётное число, превышающее 3, а правая часть – чётное, т.е. мы получили противоречие.

**Второй случай**

В данном случае из (4-27) следует: $(n^2 - n + 6) = 2^{k-r}$. Подставляя в это последнее выражение $n = 2^r - 1$, получим:

$$9 \cdot 2^{2r-3} - 9 \cdot 2^{r-3} + 1 = 2^{k-r-3}.$$

При $r > 3$ ($n \geq 8$) левая часть этого последнего выражения является нечётным числом, а правая часть – чётное, т.е. мы вновь получили противоречие.



Таким образом, показано, что при $n > 7$ не существует плотно упакованных $<n, 7>$-кодов.

**1.21.** Показать, что не существует эквидистантных $<n, 2t+1>$-кодов мощности больше 2.

***1.21.*** Кодовое расстояние любого эквидистантного кода, мощность которого больше двух, является *чётным*.

Очень упрощенно можно пояснить правильность этого утверждения с помощью рассмотрения обхода произвольного цикла, образованного вершинами – кодовыми словами (или кодовыми векторами) и соединяющими их рёбрами или дугами, которым приписаны расстояния Хэмминга между вершинами и соответствующие вектора ошибок. Очевидно, что если совершить обход любого конкретного цикла, то покомпонентная сумма по модулю два векторов ошибок, соответствующих всем пройденным при этом рёбрам, должна дать нулевой вектор (см. решение задачи 1.12, табл. 4.3, код № 5).

**1.22.** Показать, что при чётном $d_{\min}$ существует эквидистантный код мощности $]2n/d_{\min}[$.

***1.22.*** См. [1.2, с. 323 – 325].

**1.23.** Показать, что если код с минимальным расстоянием Хэмминга $e+1$ между кодовыми блоками используется для канала со стиранием, то можно декодировать таким образом, что будут исправлены все комбинации из $e$ (или меньше) стираний, но не все комбинации из $e+1$ стираний.

***1.23.*** Согласно условию задачи $d_{\min} = e+1$. Согласно соотношению (1-42) для того, чтобы корректирующий код гарантированно обнаруживал бы все ошибки кратности, не превышающей $s$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось ус-

ловие $d_{\min} \geq s+1$. В рассматриваемом случае исправление эквивалентно обнаружению и поэтому, если требуется исправить $e+1$ стирание, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $d_{\min} \geq e+2$. Но тогда код с $d_{\min} = e+1$ способен исправить только $e$ стираний.

**1.24.** Показать, что для исправления всех комбинаций из $t$ ошибок и $e$ стираний необходимо и достаточно, чтобы минимальное расстояние Хэмминга между двоичными кодовыми блоками равнялось, по крайней мере, $2t+e+1$.

***1.24.*** Согласно условию задачи $d_{\min} = 2t+e+1$. Для декодера стирание – это ошибка, позиция которой известна, а значение может быть, а может и не быть нулевым.

Сначала декодер пытается декодировать принятое слово, подставив на место стираний некоторые произвольные значения, например нулевые. Затем декодер заменяет первоначальные предположительные значения стираний их дополнения и вновь декодирует.

Если $f$, $0 \leq f \leq e$, первоначальных предположительных значений стираний оказались неверными, то $e - f$ значений их дополнений будут также неверными. Так как $\min(f, e-f) \leq e/2$, то в в одном из этих двух случаев общее число ошибок не будет превышать $(d_{\min} - 1)/2$ и их можно будет исправить методом, описанным в разд. 9.4 в [1.3, с. 315 – 320].

**1.25.** Дерево, приведенное на рис. 1.3, является периодически повторяющимся. Определить вес пути наименьшего веса, проходящего через всё дерево. Показать, что независимо от значения $n$ не все двойные комбинации ошибок могут быть исправлены.

***1.25.*** См. [1.3].



## 4.2. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К РАЗДЕЛУ II

### ЗАДАЧИ

**2.1.** Показать, что число двоичных векторов из $B^n$, представимых линейными комбинациями вида

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{x}_s, \qquad (2\text{-}77)$$

в которых $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \leq t$, а $\{\boldsymbol{x}_i\}$ – совокупность линейно независимых комбинаций, не превосходит $\sum_{i=0}^{t} C_s^i$.

Рекомендуется решить эту же задачу, отказавшись от условия линейной независимости комбинаций $\{\boldsymbol{x}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

***2.1.*** Из условия задачи следует, что $0 \leq t \leq s \leq n$. Искомое число двоичных векторов из $B^n$ равно числу всевозможных двоичных комбинаций $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ веса $t$; $0 \leq t \leq s$. Очевидно, что это число векторов из $B^n$ не превосходит $\sum_{i=0}^{t} C_s^i \leq 2^s \leq 2^n$.

При отсутствии условия линейной независимости комбинаций $\{\boldsymbol{x}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, число двоичных векторов из $B^n$ уменьшается по сравнению со случаем наличия условия линейной независимости этих комбинаций.

**2.2.** Показать, что кодовые слова чётного веса двоичного группового $(n, k)$-кода $C$ образуют подгруппу.

***2.2.*** Пусть $C_ч$ – множество кодовых комбинаций двоичного группового $(n, k)$-кода чётного веса, в котором определена

основная операция – поэлементное сложение по mod 2 кодовых комбинаций.

Сумма двух комбинаций чётного веса есть комбинация чётного веса. Каждая комбинация $C_ч$ относительно операции сложения кодовых комбинаций является обратным элементом самой себе. Следовательно, в $C_ч$ имеет место свойство замкнутости и имеется единичный элемент, а этого как раз достаточно, чтобы утверждать, что кодовые комбинации чётного веса двоичного группового $(n, k)$-кода образуют подгруппу группы $C$.

**2.3.** Показать, что в каждом двоичном линейном коде либо каждый кодовый вектор имеет чётный вес, либо половина кодовых векторов имеет чётные веса и половина – нечётные.

***2.3.*** Решение данной задачи начнём с констатации следующих фактов.

Кодовая комбинация нулевого веса имеет чётный вес; любая кодовая комбинация нечётного веса имеет не нулевой вес.

Если поэлементно суммируются по mod 2 две комбинации из $B^n$ веса $w_1$ и $w_2$, то вес получившейся комбинации (комбинации-«суммы») выражается соотношением

$$w = w_1 + w_2 - 2 \cdot p, \qquad (4\text{-}28)$$

где $p$ – суммарное число одних и тех же позиций суммируемых комбинаций, в которых эти комбинации имеют единицы; эти единицы при суммировании по mod 2 дают нули и, следовательно, выбывают из числа единиц, учитываемых при определении веса комбинации-«суммы».

Из (4-28) вытекают следующие факты:



1) вес комбинации-«суммы» двух комбинаций чётного веса является чётным;

2) вес комбинации-«суммы» двух комбинаций нечётного веса является чётным;

3) вес комбинации-«суммы» двух комбинаций, одна из которых имеет чётный вес, а другая – нечётный, является нечётным.

4) Если все кодовые комбинации – строки порождающей матрицы $G_{(n, k)}$ группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес, то все кодовые комбинации этого кода имеют чётный вес.

Действительно, так как каждая комбинация кода может быть представлена как линейная комбинация $k$ строк порождающей матрицы и, учитывая 1), можно утверждать, что 4) верно.

5) Если все кодовые комбинации группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес, то все строки порождающей матрицы $G_{(n, k)}$ этого кода имеют чётный вес.

Очевидно, так как строки порождающей матрицы являются кодовыми комбинациями, образующими базис линейного подпространства.

6) Если среди кодовых комбинаций группового $(n, k)$-кода имеются комбинации нечётного веса, то его порождающая матрица $G_{(n, k)}$ имеет, по крайней мере, одну кодовую комбинацию – строку нечётного веса.

Действительно, если предположить противное, т.е. допустить, что все строки порождающей матрицы имеют чётный вес, то получим противоречие, ибо согласно 4) все кодовые комбинации группового $(n, k)$-кода в этом случае должны иметь чётный вес.

**7) Если среди кодовых комбинаций – строк порождающей матрицы $G_{(n, k)}$ группового $(n, k)$-кода имеется хотя бы одна комбинации нечётного веса, то половина комбинаций группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес, и половина комбинаций имеют нечётный вес.**

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ – кодовые комбинации – строки порождающей матрицы $G_{(n,\,k)}$. Произвольная кодовая комбинация группового $(n, k)$-кода

$$y = \alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + \alpha_k \cdot y_k, \qquad (4\text{-}29)$$

где $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ – некоторое множество двоичных чисел. Предположим, что $y_1$ имеет нечётный вес. Так как, согласно (4-29), $y_1$ входит (при $\alpha_1 = 1$) ровно в половину кодовых комбинаций группового кода и не входит (при $\alpha_1 = 0$) ровно в половину кодовых комбинаций группового кода, то, согласно 3), ровно половина кодовых комбинаций группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес и ровно половина имеют нечётный вес.

Таким образом, предложенная задача решена.

**2.4.** Убедиться, что множество всех кодовых слов чётного веса $C_ч$ группового $(n, k)$-кода $C$ есть подпространство и найти смежные классы кода $C$ по этому подпространству.

***2.4.*** Из решения задачи 2.2 следует, что $C_ч$ является подгруппой группы $C$, а следовательно, и подпространством пространства $C$.

Рассмотрим два случая.

1) Все $2^k$ кодовые комбинации группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес. В этом случае имеется один смежный класс разложения $C$ по $C_ч$, содержащий $2^k$ элементов – кодовые комбинации чётного веса; лидером этого смежного класса является кодовое слово нулевого веса.

2) Одна половина кодовых комбинаций группового $(n, k)$-кода имеют чётный вес и другая половина – нечётный вес. В этом случае имеется два смежных класса разложения $C$ по $C_ч$, каждый из которых содержит $2^{k-1}$ элемента: первый класс содержит все кодовые комбинации чётного веса, и второй



класс – все кодовые комбинации нечётного веса. Лидером первого смежного класса является кодовое слово нулевого веса.

**2.5.** Проверить утверждение: множество всех кодовых слов группового $(n, k)$-кода, содержащих 0 в некоторой фиксированной позиции, есть подпространство. Найти разложение $(n, k)$-кода на смежные классы по этому подпространству. Проверку провести на примере (5, 3)-кода.

***2.5.*** Ниже приведено решение задачи в системе Mathcad 2000.

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_0 := ( 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 )$

$v_1 := ( 0 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 )$

$v_2 := ( 0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 1 )$

$v_3 := ( 0 \; 1 \; 1 \; 1 \; 0 )$

$v_4 := ( 1 \; 0 \; 0 \; 1 \; 0 )$

$v_5 := ( 1 \; 1 \; 0 \; 0 \; 1 )$

$v_6 := ( 1 \; 0 \; 1 \; 1 \; 1 )$

$v_7 := ( 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 0 )$

Разложение кода по подпространству:

$v_0$ $v_1$ $v_2$ $v_3$

$v_4$ $v_5$ $v_6$ $v_7$

$v_0 + v_4 = ( 1 \; 0 \; 0 \; 1 \; 0 )$