

следовательности символов сдвигового регистра  $a_i$  упреждает на  $\tau_y = \tau_0$  передний фронт первого тактового импульса (рис. 3.5); заднему фронту  $i$ -го тактового импульса  $i = 0, 1, \dots$  соответствует поступление на вход сдвигового регистра символа  $a_{i+1}$ . Заметим, что для приведения сдвигового регистра в исходное состояние (содержимое регистра – четыре нулевых символа  $a^*$ ) после поступления на его вход символа  $a_7$  необходимо поступление ещё пяти нулевых символов  $a^*$ .

Как будет видно из ниже изложенного, сдвиговые регистры являются составными частями многих линейных переключательных схем.

### Умножители многочленов

На рис. 3.6 приведена схема для умножения *произвольного* входного многочлена на *фиксированный* многочлен

$$g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + \dots + g_1 X + g_0. \quad (3-72)$$

Непосредственным перемножением многочленов  $b(X)$  (3-71) и  $g(X)$  (3-72) получим соотношение

$$\begin{aligned} b(X)g(X) = & b_n g_r X^{n+r} + (b_{n-1} g_r + b_n g_{r-1}) X^{n+r-1} + \\ & + (b_{n-2} g_r + b_{n-1} g_{r-1} + b_n g_{r-2}) X^{n+r-2} + \dots \\ \dots + & (b_0 g_2 + b_1 g_1 + b_2 g_0) X^2 + (b_0 g_1 + b_1 g_0) X + b_0 g_0. \quad (3-73) \end{aligned}$$

Предположим, что:

- 1) изначально все ячейки памяти сдвигового регистра (рис. 3.6) содержат нули;
- 2) начиная с коэффициентов старших порядков, на вход схемы умножения (см. рис. 3.6) поступает, многочлен  $b(X)$  (3-71);

3) после чего поступает  $(r+1)$  нулей.

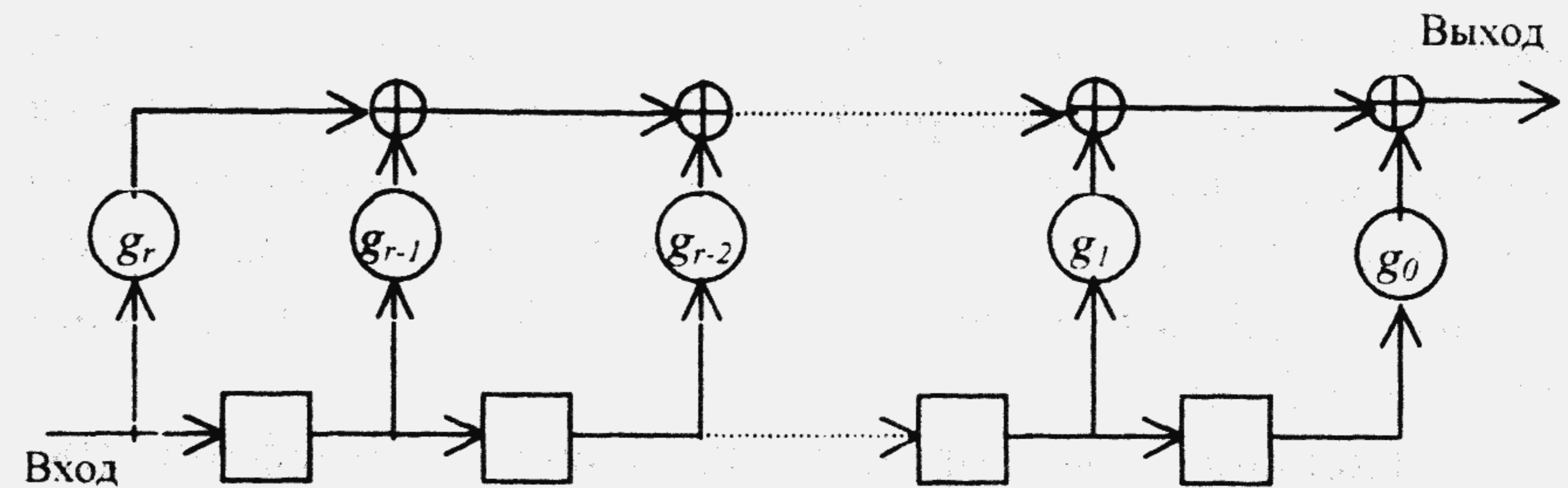


Рис. 3.6. Первая схема для умножения произвольного входного многочлена на фиксированный многочлен  $g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + \dots + g_1 X + g_0$

При выполнении этих условий докажем, что на выходе схемы появляется последовательность коэффициентов, соответствующая многочлену-произведению  $b(X)g(X) = g(X)b(X)$  в (3-73). Рассматривая схему умножения (см. рис. 3.6) и учитывая описанные выше свойства элементов, из которых она состоит, непосредственно убедимся в этом.

Допустим, что на вход рассматриваемой схемы поступает первый (старший) коэффициент  $b_n$  многочлена  $b(X)$ , при этом на выходе схемы появляется *первый* коэффициент  $b_n g_r$  многочлена  $b(X)g(X)$ , а содержимым первой ячейки памяти сдвигового регистра и её выходным сигналом до наступления очередного сдвига регистра *по-прежнему остаётся нуль*.

Затем при поступлении на вход схемы коэффициента  $b_{n-1}$  многочлена  $b(X)$  и после наступления очередного сдвига регистра содержимым первой (считая слева направо) ячейки памяти и её выходным символом становится  $b_n$ , а на выходе схемы появится *второй* коэффициент  $(b_n g_{r-1} + b_{n-1} g_r)$  многочлена  $b(X)g(X)$ .



Затем, рассуждая аналогично, найдём, что при поступлении на вход схемы коэффициента  $b_{n-2}$  многочлена  $b(X)$  и после наступления очередного сдвига регистра содержимым первой (считая слева направо) ячейки памяти и её выходным символом становится  $b_{n-1}$ , содержимым второй ячейки памяти и её выходным символом становится  $b_n$ , а на выходе схемы появится **третий коэффициент**  $(b_n g_{r-2} + b_{n-1} g_{r-1} + b_{n-2} g_r)$  многочлена  $b(X)g(X)$ .

Подобным же образом определяются коэффициенты, появляющиеся на выходе рассматриваемой схемы на заднем фронте следующих тактовых импульсов.

После  $(r+n-1)$ -го сдвига регистра в его ячейках будут содержаться символы:  $0, 0, \dots, 0, b_0, b_1$ , а на выходе схемы появится коэффициент  $(b_0 g_1 + b_1 g_0)$  многочлена  $b(X)g(X)$ .

После  $(r+n)$ -го сдвига регистра, в его ячейках будут содержаться символы:  $0, 0, \dots, 0, b_0$ , а на выходе схемы появится коэффициент  $b_0 g_0$  – последний коэффициент произведения  $b(X)g(X)$ .

Для приведения сдвигового регистра в исходное состояние (содержимое каждой ячейки памяти регистра – нуль) на вход исследуемой схемы следует подать ещё один нулевой символ (т.е. произвести  $(r+n+1)$ -й сдвиг регистра), который вытеснит символ  $b_0$  из  $r$ -й (считая слева направо) ячейки памяти; при этом выходной сигнал схемы станет нулевым.

Таким образом, доказано, что на выходе рассматриваемой схемы получается последовательность коэффициентов, определяющая многочлен  $b(X)g(X)$  (3-73), и, следовательно, эта схема действительно является умножителем произвольного входного многочлена  $b(X)$  на многочлен  $g(X)$ .

На рис. 3.7 приведена другая схема для умножения произвольного входного многочлена на многочлен  $g(X)$  (3-72).

Предположим, что все ячейки памяти регистра перед поступлением на его вход коэффициентов многочлена  $b(X)$  содержат нули.

При поступлении на вход схемы коэффициента  $b_n$  на выходе схемы появится **первый коэффициент**  $b_n g_r$  многочлена  $b(X)g(X)$ , а содержимым ячеек памяти регистра по-прежнему будут нули.

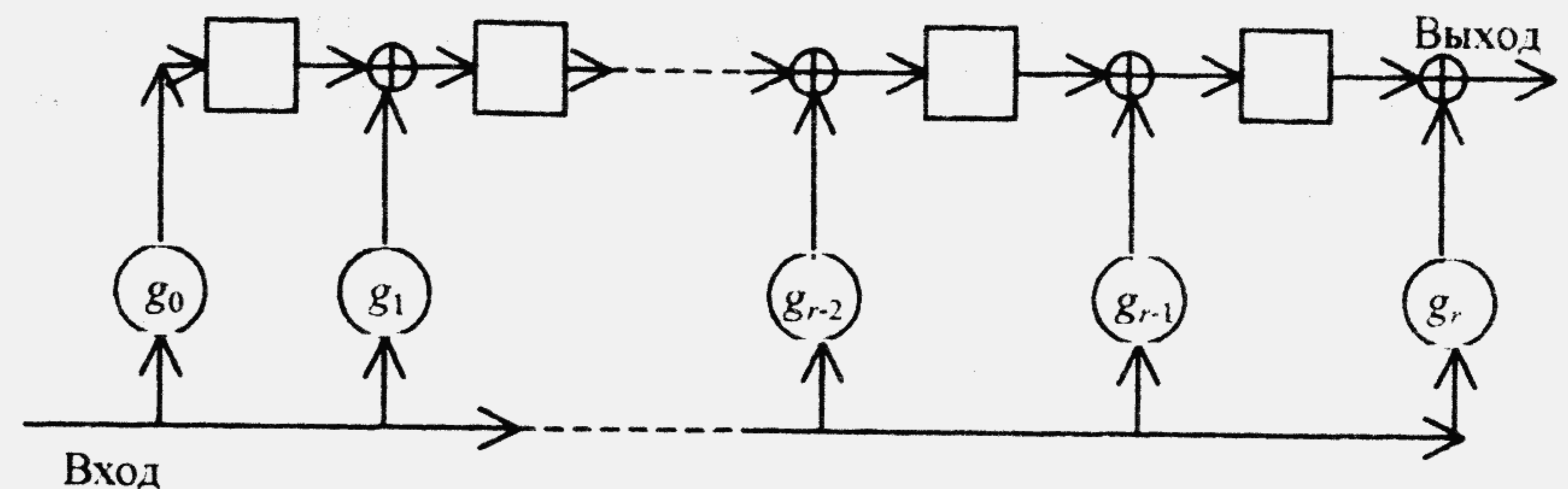


Рис. 3.7. Вторая схема для умножения произвольного входного многочлена на фиксированный многочлен  $g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + \dots + g_1 X + g_0$

При поступлении на вход схемы коэффициента  $b_{n-1}$  многочлена  $b(X)$  и очередного сдвига регистра на выходе схемы появится **второй коэффициент**  $(b_n g_{r-1} + b_{n-1} g_r)$  многочлена  $b(X)g(X)$ , а содержимым ячеек памяти регистра, считая слева направо, будут символы  $b_n g_0, b_n g_1, \dots, b_n g_{r-2}, b_n g_{r-1}$ .

При поступлении на вход схемы коэффициента  $b_{n-2}$  многочлена  $b(X)$  и после очередного сдвига регистра на выходе схемы появится **третий коэффициент**  $(b_n g_{r-2} + b_{n-1} g_{r-1} + b_{n-2} g_r)$  многочлена  $b(X)g(X)$ , а содержимым ячеек памяти регистра, считая слева направо, будут символы  $b_{n-1} g_0, b_n g_0 + b_{n-1} g_1, b_n g_1 + b_{n-1} g_2, \dots, b_n g_{r-2} + b_{n-1} g_{r-1}, b_n g_{r-2} + b_{n-1} g_{r-1}$ .

Рассуждая аналогичным образом и далее, покажем, что в итоге на выходе рассматриваемой схемы получается после-



довательность коэффициентов, соответствующая многочлену  $b(X)g(X)$  (3-73) и, следовательно, эта схема также как и предыдущая, является умножителем произвольного входного многочлена  $b(X)$  на многочлен  $g(X)$ . Однако эта вторая схема по своему функционированию и по простоте реализации всё же отличается от предыдущей схемы [3.2, 3.3].

### Делители многочленов

На рис. 3.8 приведены схемы деления с остатком входного многочлена  $d(X) = d_n X^n + d_{n-1} X^{n-1} + \dots + d_0$  на многочлен  $g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + \dots + g_0$ .

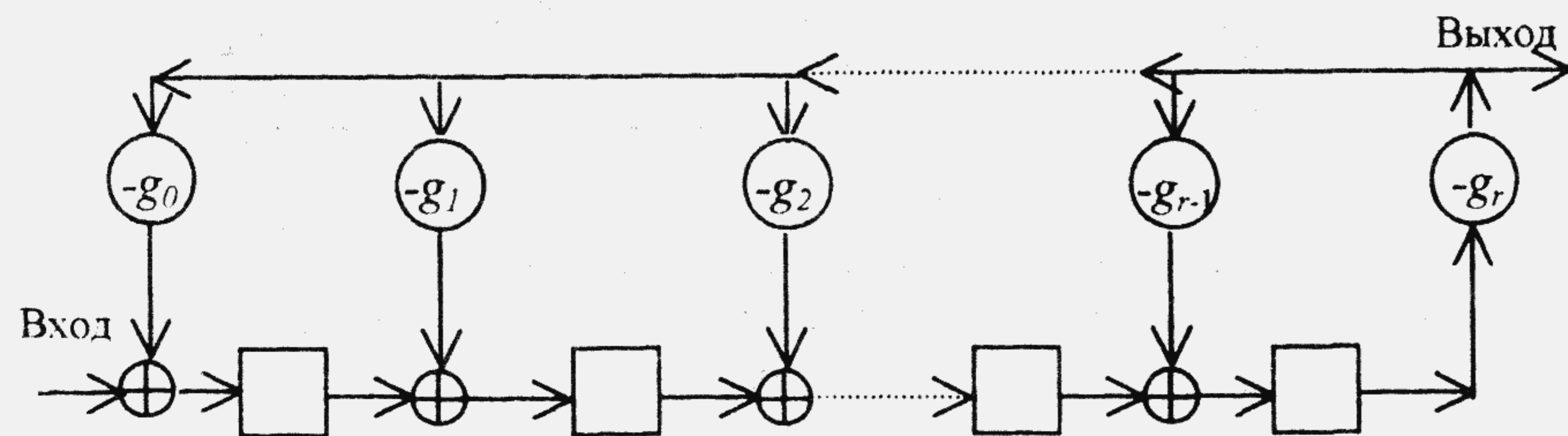


Рис. 3.8. Схема для деления входного многочлена на фиксированный многочлен  $g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + \dots + g_1 X + g_0$

Вначале ячейки памяти должны содержать нули. Для первых  $r$  входных символов выходной символ принимает значения равные нулю, так как первый коэффициент частного, равный  $d_n g_r^{-1}$ , ещё не поступит на выход схемы.

Для каждого коэффициента многочлена-частного  $q_j$  из делимого необходимо вычесть многочлен  $q_j g(X)$ , что осуществляется с помощью обратной связи.

После всех  $n$  сдвигов на выходе схемы появится частное от деления, а остаток от деления будет находиться в регистре сдвига.

Таким образом, делители многочленов допускают столь же простую схемотехническую реализацию, как и рассмотренные выше умножители многочленов. Можно показать, что они могут быть использованы в качестве кодеров для циклических кодов [3.2, 3.3].

### 3.17. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИИ-ОРИГИНАЛЫ ОТДЕЛЬНЫХ СИМВОЛОВ И ИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ЭТИХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $\Phi(t)$  – единичная ступенька (функция Хевисайда); изображение Лапласа временной функции-оригинала  $\Phi(t)$ :

$$\frac{1}{p} := \Phi(t);$$

$\tau_0$  – длительность одного (любого) символа;  $\mathbf{b} = (b_n, b_{(n-1)}, \dots, b_1, b_0)$  – входной вектор, образованный коэффициентами многочлена

$$b(X) = b_n X^n + b_{(n-1)} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0;$$

$b_i$  – компонента входного вектора или коэффициент многочлена,  $i$  – порядок коэффициента многочлена, поступающего на вход схемы,  $i = n, n-1, \dots, 1$  (первыми поступают коэффициенты, соответствующие старшим степеням  $X$ ); двоичные числа  $b_{(n-j)} \in \{0, 1\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ;  $T$  – длительность входного вектора  $\mathbf{b}$ , состоящего из  $(n + 1)$  символа;  $T = \tau_0(n + 1)$ ;  $b(j, t)$  – временная функция  $j$ -го входного символа схемы:

$$b(j, t) = b_{(n-j)}(\Phi(t - j) - \Phi(t - j - \tau_0)) = b_{(n-j)}(\Phi(t - j) \oplus$$



$$\oplus \Phi(t - j - \tau_0) = b_{(n-j)} \eta(t - j), \quad (3-74)$$

где

$$\eta(t) = (\Phi(t) - \Phi(t - \tau_0)) = (\Phi(t) \oplus \Phi(t - \tau_0)). \quad (3-75)$$

При  $j = 0, b_n = 1$

$$b(0, t) = b_n \cdot \eta(t) = 1 \cdot \eta(t); \quad \Xi(p) := 1 \cdot \eta(t),$$

$$\Xi(p) = \frac{(1 - e^{-\tau_0 p})}{p} = \frac{(1 \oplus 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p}, \quad (3-76)$$

здесь знак «-» равносильно знаку  $\oplus$  или «+» в том смысле, что при возврате от преобразований Лапласа к соответствующим им функциям-оригиналам сложение понимается по mod 2.

Пусть  $B(j, p)$  – изображение Лапласа временной функции-оригинала  $b(j, t)$ :  $B(j, p) := b(j, t)$ . Из (3-74) и (3-76) следует, что

$$B(j, p) = (b_{(n-j)} \frac{(1 - e^{-\tau_0 p})}{p}) e^{-j \tau_0 p}. \quad (3-77)$$

Пусть  $b(t)$  – временная функция входного вектора (многочлена) схемы

$$b(t) = \sum_{j=0}^n b(j, t) = \sum_{j=0}^n b_{(n-j)} \eta(t - j), \quad (3-78)$$

где суммирование выполняется по mod 2, а  $B(p)$  – изображение Лапласа функции-оригинала  $b(t)$ :  $B(p) := b(t)$ ; из (3-77) и (3-78) следует

$$B(p) = \sum_{j=0}^n B(j, p) = \frac{(1 - e^{-\tau_0 p})}{p} \sum_{j=0}^n b_{(n-j)} e^{-j \tau_0 p}. \quad (3-79)$$

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначные соответствия:

$$b(X) \Leftrightarrow b(t) \Leftrightarrow B(p). \quad (3-80)$$

**ПРИМЕР 3.25.** Пусть входной многочлен схемы  $b(X) = X^3 + X^2 + 1$ , а  $\tau_0 = 1$ . В этом случае  $n = 3$  и имеют место соотношения

$$T = \tau_0(n+1) = 4\tau_0 = 4, \quad (3-81)$$

$$(b_3 \ b_2 \ b_1 \ b_0) = (1 \ 1 \ 0 \ 1), \quad (3-82)$$

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{(1 - e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 1e^{-\tau_0 p} + 0e^{-2\tau_0 p} + 1e^{-3\tau_0 p}) = \\ &= \frac{(1 - e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 1e^{-\tau_0 p} + 1e^{-3\tau_0 p}). \end{aligned} \quad (3-83)$$

Приведенные ниже рис. 3.9 а – рис. 3.11 иллюстрируют  $b(t)$  и образующие его слагаемые.

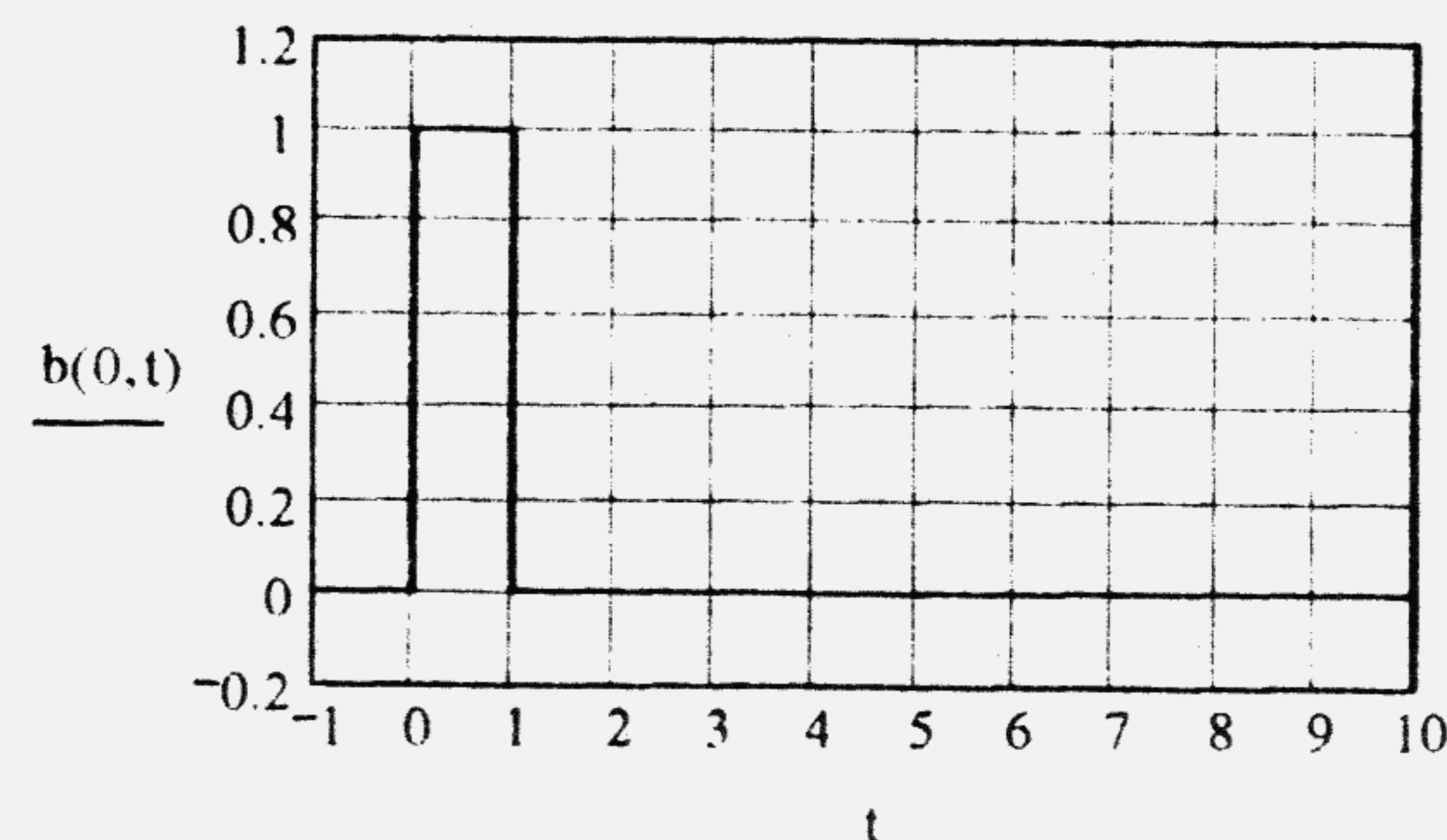


Рис. 3.9 а. График временной функции  $b(0, t)$

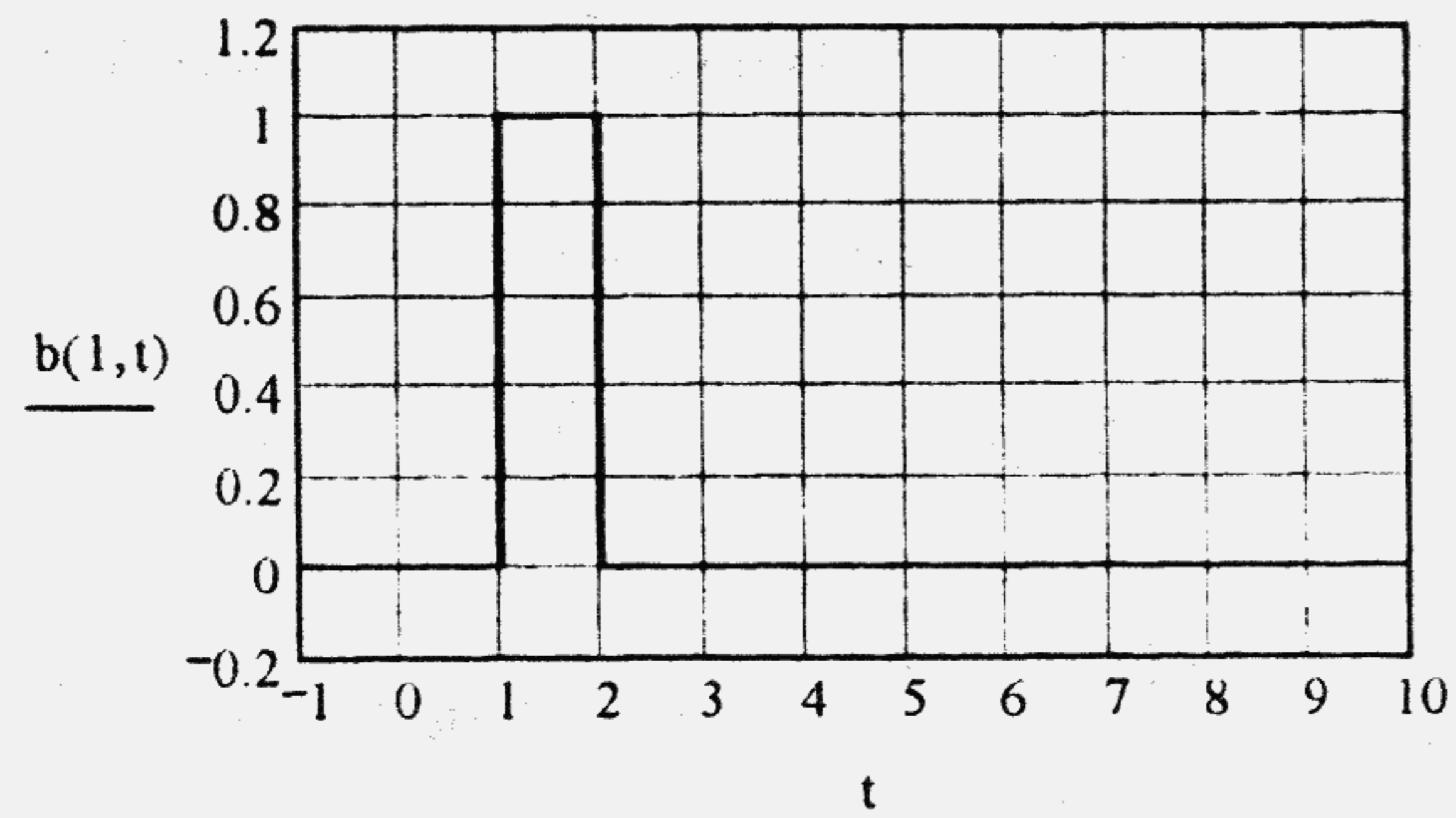


Рис. 3.9 в. График временной функции:  $b(1, t)$

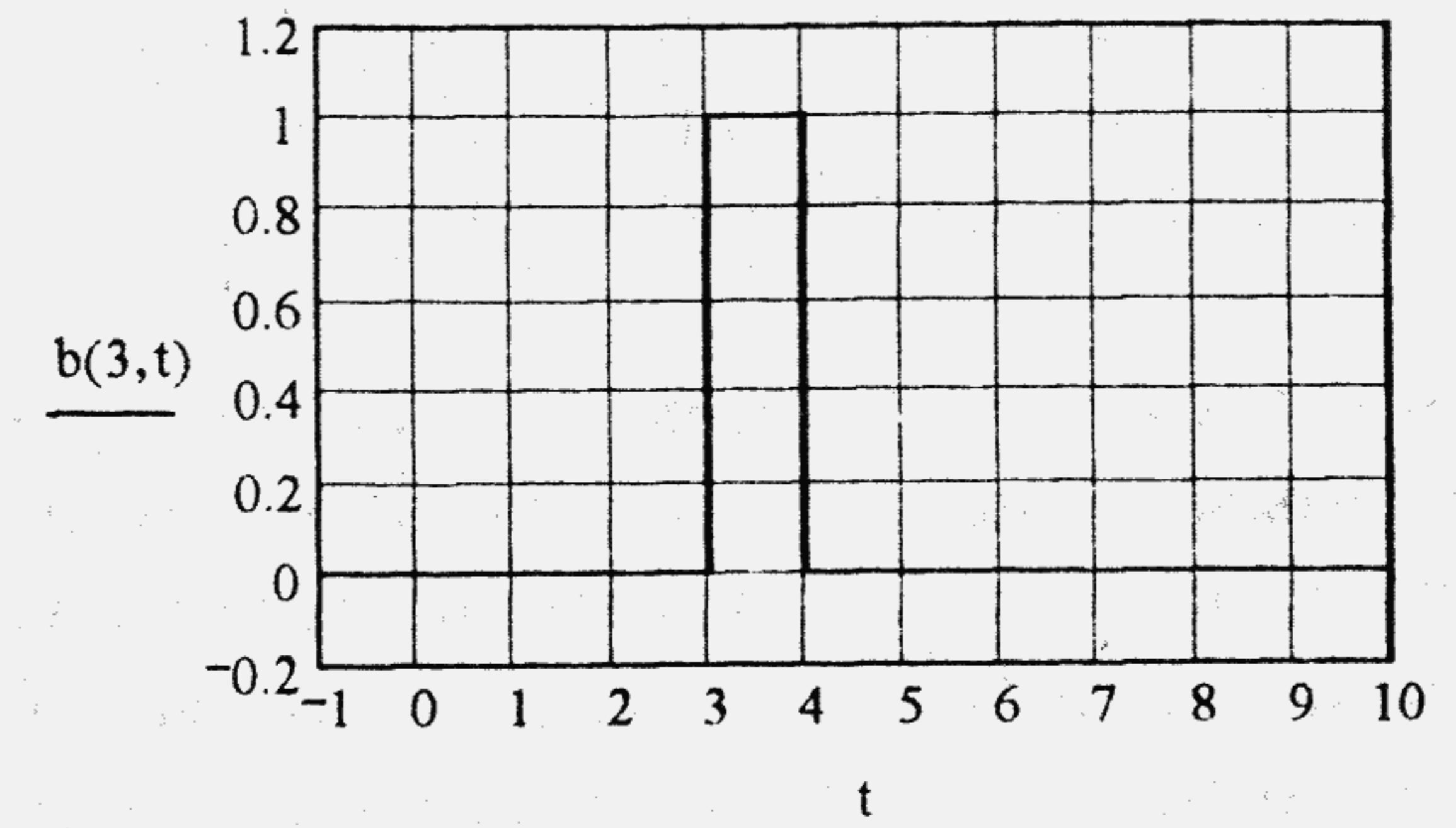


Рис. 3.10 в. График временной функции:  $b(3, t)$

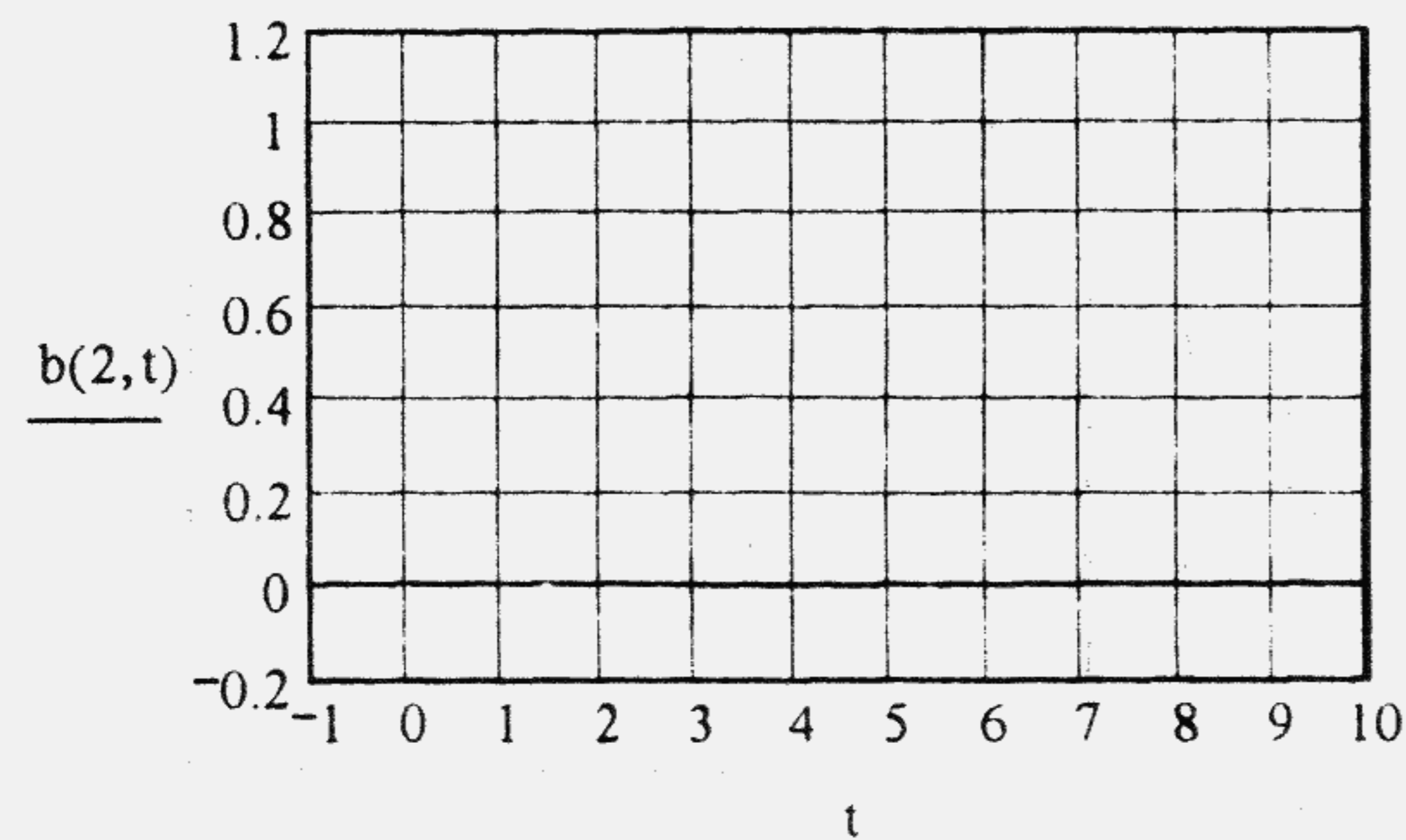


Рис. 3.10 а. График временной функции:  $b(2, t)$

Согласно (3-78)

$$b(t) = b_3\eta(t) + b_2\eta(t-1) + b_1\eta(t-2) + b_0\eta(t-3). \quad (3-84)$$

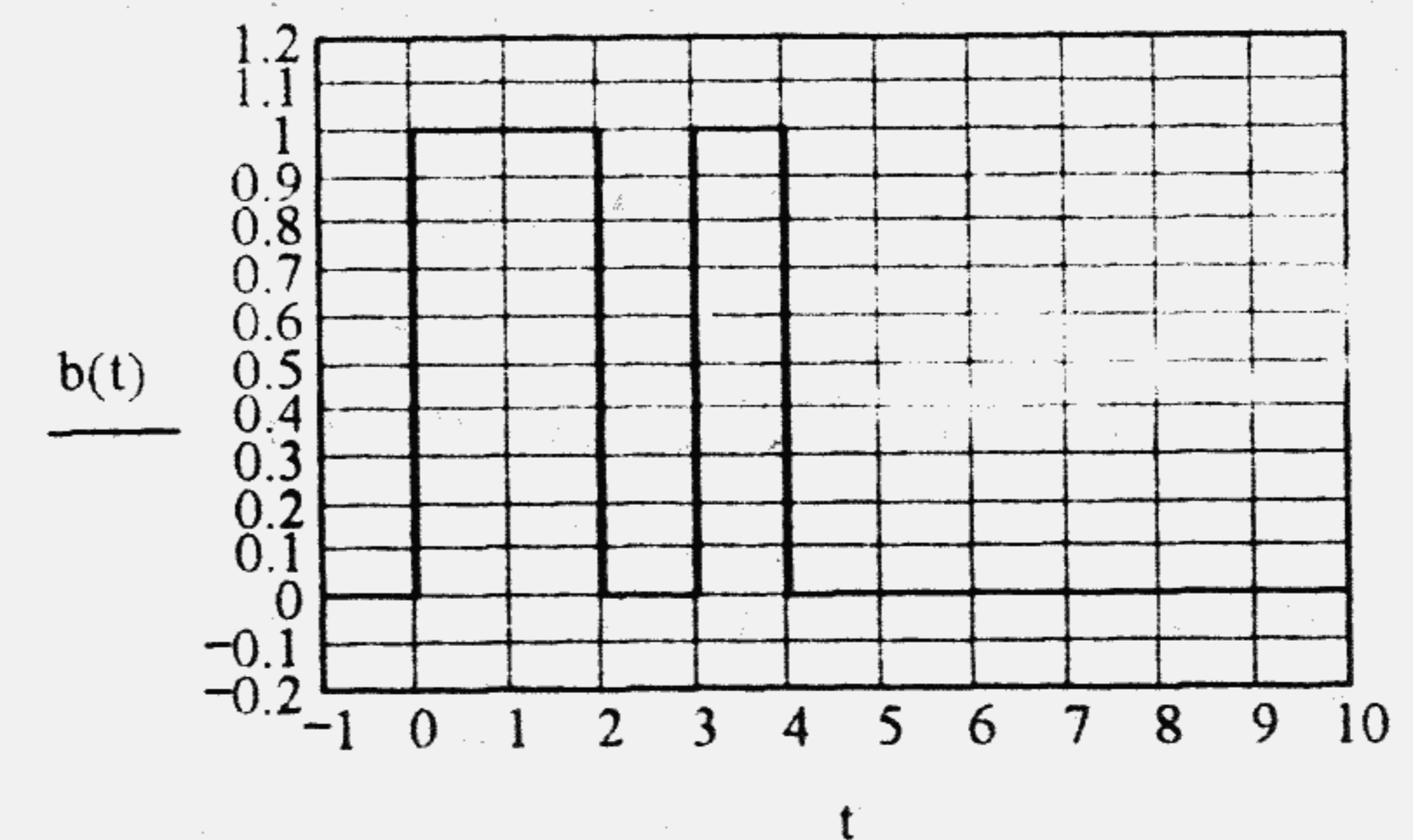


Рис. 3.11. График временной функции  $b(t)$



## ЛИНЕЙНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ЯЧЕЙКИ ПАМЯТИ И СДВИГОВОГО РЕГИСТРА И ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Строго говоря, ячейка памяти сдвигового регистра является нелинейным элементом. Однако при исходном содержимом ячейки, равном нулю (нулевые начальные условия), и входных сигналах типа  $b(t)$  (3-78) мысленно мы можем заменить эту ячейку звеном чистого запаздывания с передаточной функцией

$$W_0(1, p) = e^{-\tau_0 p}, \quad (3-85)$$

так как при этом выходные сигналы ячейки памяти и звена чистого запаздывания совпадают.

Передаточная функция сдвигового регистра (см. рис. 3.5), образованного  $n$  ячейками памяти, выражается соотношением

$$W_0(n, p) = (e^{-\tau_0 p})^n = e^{-n\tau_0 p}. \quad (3-86)$$

Входному сигналу  $b(t)$  такого сдвигового регистра соответствует его выходной сигнал  $a(t) = b(t - n\tau_0)$ ; при этом выполняется соотношение

$$A(p) = B(p)W_0(n, p) = B(p)e^{-n\tau_0 p}. \quad (3-87)$$

### УМНОЖИТЕЛИ МНОГОЧЛЕНОВ

Определим передаточную функцию первой схемы умножителя многочленов, приведенной на рис. 3.6.

Предполагая нулевые начальные условия и рассуждая индуктивным методом, найдём

$$W_y(r, p) = A(p)B(p)$$

$$= (((\dots((g_r) + g_{r-1}e^{-\tau_0 p}) + g_{r-2}e^{-2\tau_0 p}) + \dots +$$

$$+ g_1 e^{-(r-1)\tau_0 p} + g_0 e^{-r\tau_0 p}) = \sum_{i=0}^r g_{r-i} e^{-i\tau_0 p}, \quad (3-88)$$

при этом скобки в предпоследнем выражении в (3-88) указывают последовательные шаги рассуждения по индукции.

**ПРИМЕР 3.26.** Рассмотрим умножитель произвольного входного многочлена  $b(X)$  на многочлен  $g(X)$ , выполненный в соответствии с первой общей схемой, представленной на рис. 3.6.

Пусть  $\tau_0 = 1$ ,  $g(X) = (1 \cdot X + 1) = (g_1 X + g_0)$ ;  $b(X) = (1 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + 1) = (b_3 X^3 + b_2 X^2 + b_1 X + b_0)$ ; определим выходной сигнал рассматриваемого умножителя многочленов, используя аппарат передаточных функций для линейных стационарных систем.

Используя соотношения (3-79) и (3-88), найдём

$$B(p) = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 0 \cdot e^{-\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-2\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-3\tau_0 p}). \quad (3-89)$$

$$W_y(p) = (1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p}). \quad (3-90)$$

Преобразование Лапласа  $A(p)$  выходного сигнала умножителя  $a(t)$ :

$$A(p) = B(p)W_y(p) = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-2\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-3\tau_0 p}).$$

$$(3-91)$$

Обратное преобразование Лапласа  $B(p)$  и  $A(p)$  даёт входной и выходной сигналы умножителя

$$b(t) = 1 \cdot \eta(t) + 0 \cdot \eta(t-1) + 1 \cdot \eta(t-2) + 1 \cdot \eta(t-3), \quad (3-92)$$

$$a(t) = 1 \cdot \eta(t) + 1 \cdot \eta(t-1) + 1 \cdot \eta(t-2) + 0 \cdot \eta(t-3) + 1 \cdot \eta(t-4), \quad (3-93)$$

где



$$\eta(t) = \Phi(t) - \Phi(t-1). \quad (3-94)$$

На рис. 3.12 приведен график зависимости  $b = b(t)$ .

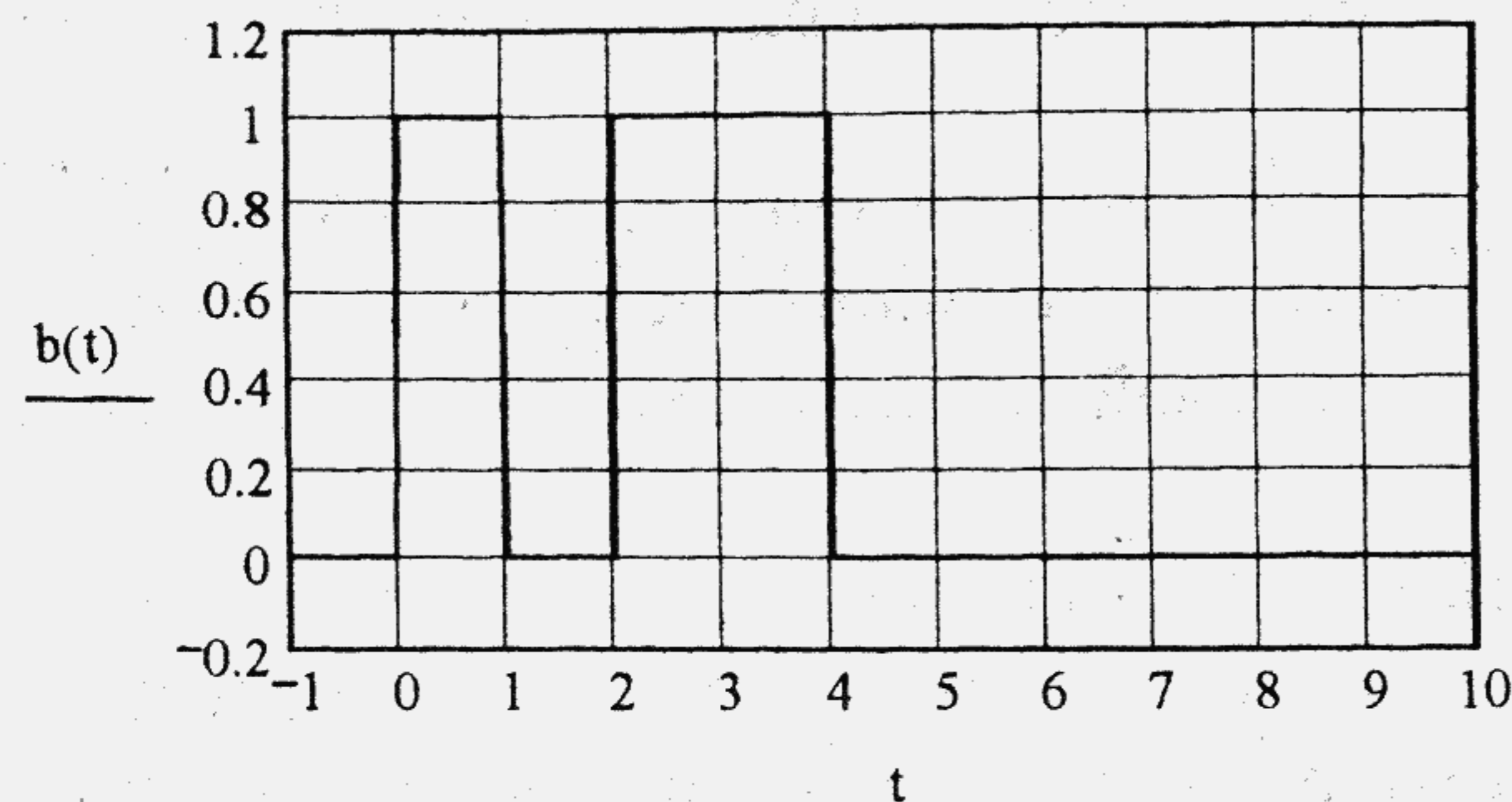


Рис. 3.12. Входной сигнал первой и второй схем умножителя

На рис. 3.13 приведен график зависимости  $a = a(t)$ .

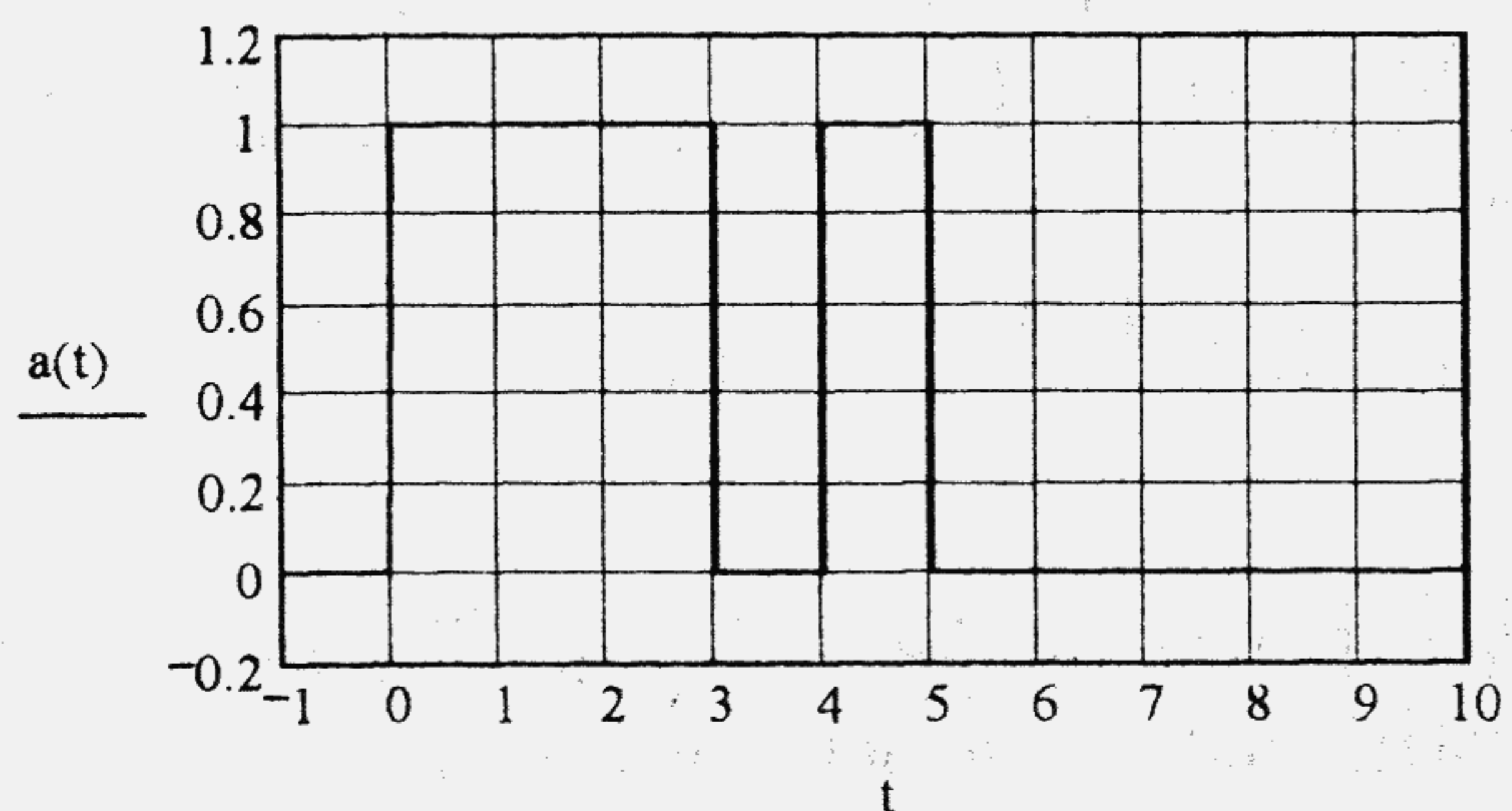


Рис. 3.13. Выходной сигнал первой и второй схем умножителя

END

Определим теперь передаточную функцию второй схемы умножителя полиномов, приведенной на рис. 3.7.

Предполагая нулевые начальные условия и рассуждая индуктивным методом, найдём

$$\begin{aligned} W_y(r, p) &= A(p)/B(p) = \\ &= (((\dots(((g_r) + g_{r-1}e^{-\tau_0 p}) + g_{r-2}e^{-2\tau_0 p}) + \dots + \\ &+ g_1e^{-(r-1)\tau_0 p}) + g_0e^{-r\tau_0 p}) = \sum_{i=0}^r g_{r-i}e^{-i\tau_0 p}; \quad (3-95) \end{aligned}$$

при этом скобки в предпоследнем выражении в равенствах (3-95) указывают последовательные шаги рассуждения по индукции. Несмотря на то, что результирующее выражение в (3-95) совпадает с результирующим выражением в (3-88), оно, тем не менее, указывает иной путь применения индуктивного метода к *другой* схеме декодера. Очевидно, что результаты примера 3.26 могут быть распространены и на вторую схему умножителя полиномов.

При выводе соотношений (3-87), (3-88) и (3-95) были использованы основные правила преобразования структурных схем (последовательное и параллельное соединение звеньев) [3.17].

### ДЕЛИТЕЛЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Определим теперь  $W_d(p)$  – передаточную функцию схемы, приведенной на рис. 1.12.

Пусть

$$W_1(p) = \frac{g_r e^{-\tau_0 p}}{1 + g_{r-1} g_r e^{-\tau_0 p}}, \quad (3-96)$$

тогда



$$W_2(p) = \frac{W_1(p)e^{-\tau_0 p}}{1 + g_{r-2}W_1(p)e^{-\tau_0 p}}, \quad (3-97)$$

$$W_{j+1}(p) = \frac{W_j(p)e^{-\tau_0 p}}{1 + g_{r-j-1}W_j(p)e^{-\tau_0 p}}, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \quad (3-98)$$

Пусть

$$Q_j(p) = \frac{1}{W_j(p)}, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3-99)$$

Из соотношений (3-96), ..., (3-99) следует

$$Q_1(p) = g_r e^{\tau_0 p} + g_{r-1}, \quad (3-100)$$

$$Q_2(p) = Q_1(p)e^{\tau_0 p} + g_{r-2}, \quad (3-101)$$

$$Q_3(p) = Q_1(p)e^{2\tau_0 p} + g_{r-2}e^{\tau_0 p} + g_{r-3}, \quad (3-102)$$

$$Q_r(p) = Q_1(p)e^{(r-1)\tau_0 p} + g_{r-2}e^{(r-2)\tau_0 p} + g_{r-3}e^{(r-3)\tau_0 p} + \dots + g_1 e^{\tau_0 p} + g_0 =$$

$$= g_r e^{r\tau_0 p} + g_{r-1}e^{(r-1)\tau_0 p} + g_{r-2}e^{(r-2)\tau_0 p} + g_{r-3}e^{(r-3)\tau_0 p} + \dots + g_1 e^{\tau_0 p} +$$

$$+ g_0 = \sum_{j=0}^r g_{r-j} e^{(r-j)\tau_0 p}. \quad (3-103)$$

Из последнего выражения найдём

$$W_r(p) = W_r(p) = \frac{1}{Q_r(p)} =$$

$$= \frac{1 \cdot e^{-r\tau_0 p}}{g_r + g_{r-1}e^{-\tau_0 p} + g_{r-2}e^{-2\tau_0 p} + g_{r-3}e^{-3\tau_0 p} + \dots + g_1 e^{-(r-1)\tau_0 p} + g_0 e^{-r\tau_0 p}}. \quad (3-104)$$

и, следовательно, эта схема является делителем произвольного входного многочлена  $b(X)$  на многочлен

$$g(X) = g_r X^r + g_{r-1} X^{r-1} + g_{r-2} X^{r-2} + \dots + g_1 X + g_0 \quad (3-105)$$

и введения запаздывания  $r\tau_0$ .

**ПРИМЕР 3.27.** Пусть схема делителя произвольного входного многочлена  $b(X)$  на многочлен  $g(X) = 1 \cdot X - 1$  имеет передаточную функцию

$$W_d(p) = W_1(p) = \frac{1}{1 \cdot e^{\tau_0 p} + 1} = \frac{1 \cdot e^{-\tau_0 p}}{1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p}} \quad (3-106)$$

(т.е.  $g_1 = 1, g_0 = 1$ ).

Предположим, что входной многочлен схемы  $b(X) = X - 1$  (т.е.  $b_1 = 1, b_0 = 1$ ), а  $\tau_0 = 1$ .

Очевидно, что выходным многочленом рассматриваемого делителя будет задержанный на  $r\tau_0 = \tau_0 = 1$  относительно нулевого момента времени многочлен

$$a(X) = b(X)g(X) = (X - 1)(X - 1) = 1. \quad (3-107)$$

В этом случае изображение Лапласа входного сигнала делителя  $b(t)$

$$B(p) = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p}). \quad (3-108)$$

Изображение Лапласа выходного сигнала  $a(t)$  делителя

$$A(p) = B(p)W_d(p) = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} e^{-\tau_0 p}. \quad (3-109)$$



На рис. 3.14 изображены графики сигналов  $b(t)$  и  $a(t)$ , соответствующих приведенным изображениям Лапласа  $B(p)$  и  $A(p)$ :

$$b(t) = 1 \cdot \eta(t) + 1 \cdot \eta(t-1);$$

$$a(t) = 0 \cdot \eta(t) + 1 \cdot \eta(t-1).$$

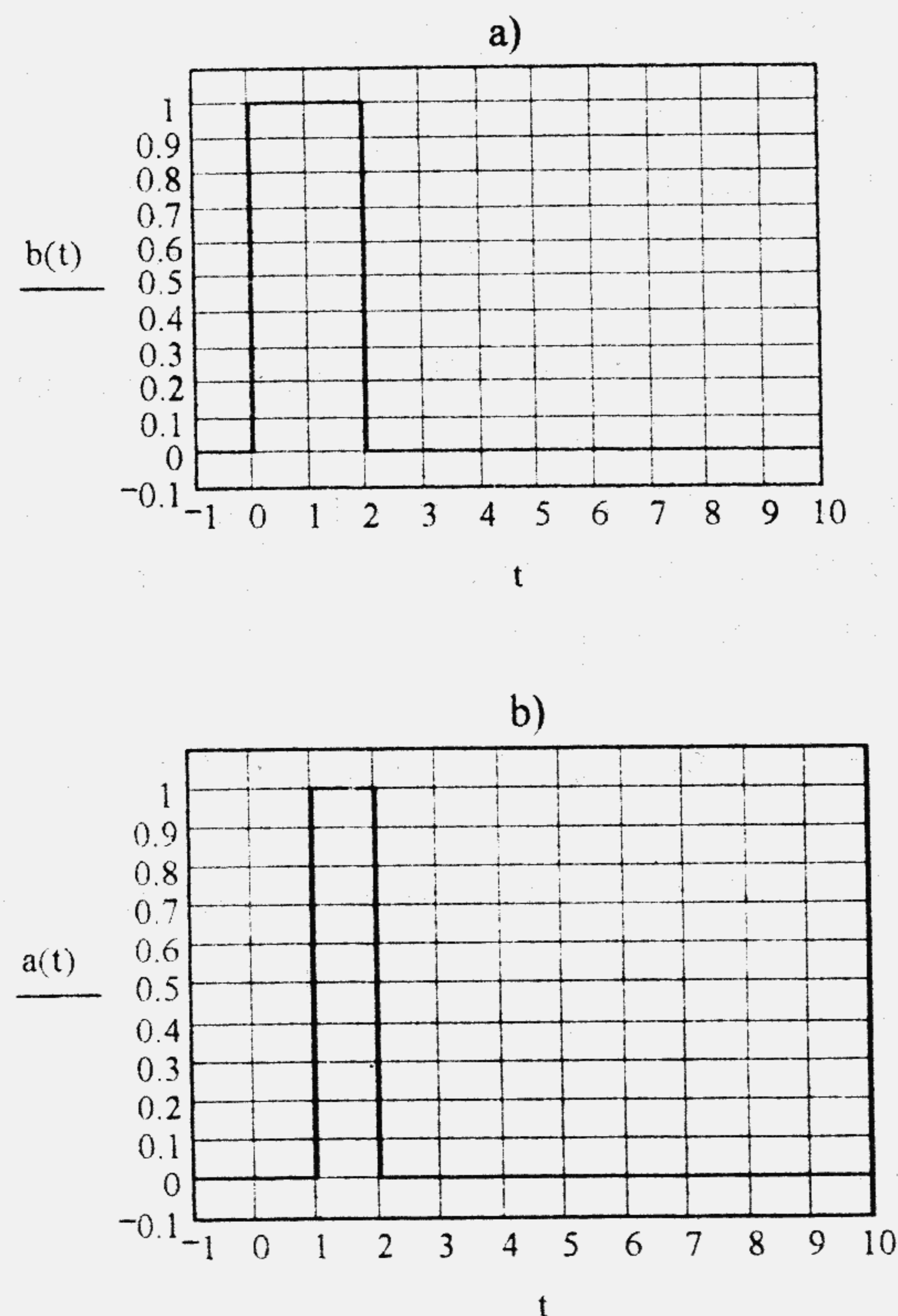


Рис. 3.14. Входной сигнал делителя (а);  
выходной сигнал делителя (б)

**ПРИМЕР 3.28.** Пусть схема делителя имеет передаточную функцию, приведенную в (3-106), входной многочлен схемы  $b(X) = X^2 + X + 1$  (т.е.  $b_2 = 1, b_1 = 1, b_0 = 1$ ), а  $\tau_0 = 1$ .

В этом случае изображение Лапласа входного сигнала делителя  $b(t)$  согласно (3-79)

$$B(p) = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} (1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-2\tau_0 p}). \quad (3-110)$$

Заметим, что

$$b(X)/g(X) = (1 \cdot X^2 + 1 \cdot X + 1)/(1 \cdot X + 1) = 1 \cdot X + r(X)/(1 \cdot X + 1), \quad (3-111)$$

где  $r(X)$  – многочлен от  $X$ , степень которого меньше степени многочлена-делителя  $g(X)$ ; в частности, в рассматриваемом случае  $r(X) = 1$ .

Изображение Лапласа выходного сигнала  $a(t)$  делителя

$$\begin{aligned} A(p) &= B(p)W_d(p) = \\ &= \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p} + 1 \cdot e^{-2\tau_0 p})}{p} 1 \cdot e^{-\tau_0 p} = \frac{(1 + 1 \cdot e^{-\tau_0 p})}{p} 1 \cdot e^{-\tau_0 p} + \frac{1 \cdot e^{-3\tau_0 p}}{p}. \end{aligned} \quad (3-112)$$

На рис. 3.15 изображены графики сигналов  $b(t)$  и  $a(t)$ , соответствующие приведенным изображениям Лапласа  $B(p)$  и  $A(p)$ :

$$b(t) = 1 \cdot \eta(t) + 1 \cdot \eta(t-1) + 1 \cdot \eta(t-2); \quad (3-113)$$

$$a(t) = 1 \cdot \eta(t-1) + \Phi(t-3). \quad (3-114)$$

Рассмотренный пример 3.28 свидетельствует о том, что, вообще говоря, является актуальным вопрос наличия устойчивости делителя, имеющего передаточную функцию типа  $W_d(p)$  (3-104) [3.17].

END



НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

*Натуральные числа* – это числа, используемые для счёта некоторых однородных объектов (например, числа единиц в последовательности из единиц и нулей):

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (3-115)$$

Множество всех натуральных чисел обозначается символом  $N$ :

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}. \quad (3-116)$$

Множество всех натуральных чисел является *упорядоченным* множеством: для любых двух натуральных чисел  $n$  и  $m$  имеет место одно (и только одно) из *следующих соотношений*:

$$n = m, \quad n < m, \quad n > m;$$

наименьшим натуральным числом является 1 (единица).

В множестве натуральных чисел вводятся две основные арифметические операции: *сложение* и *умножение*, которые обозначаются соответственно символами  $+$  и  $\cdot$  (последний символ может опускаться; см. (3-118)).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Сложение натуральных чисел.** *Каждой паре натуральных чисел  $\{n, m\}$  ставится в соответствие натуральное число  $q$ , называемое их **суммой**. Сумма  $q$  содержит столько единиц, сколько их содержится в числах  $n$  и  $m$ . О натуральном числе  $q$  говорят, что оно является результатом сложения натуральных чисел  $n$  и  $m$ , и пишут:*

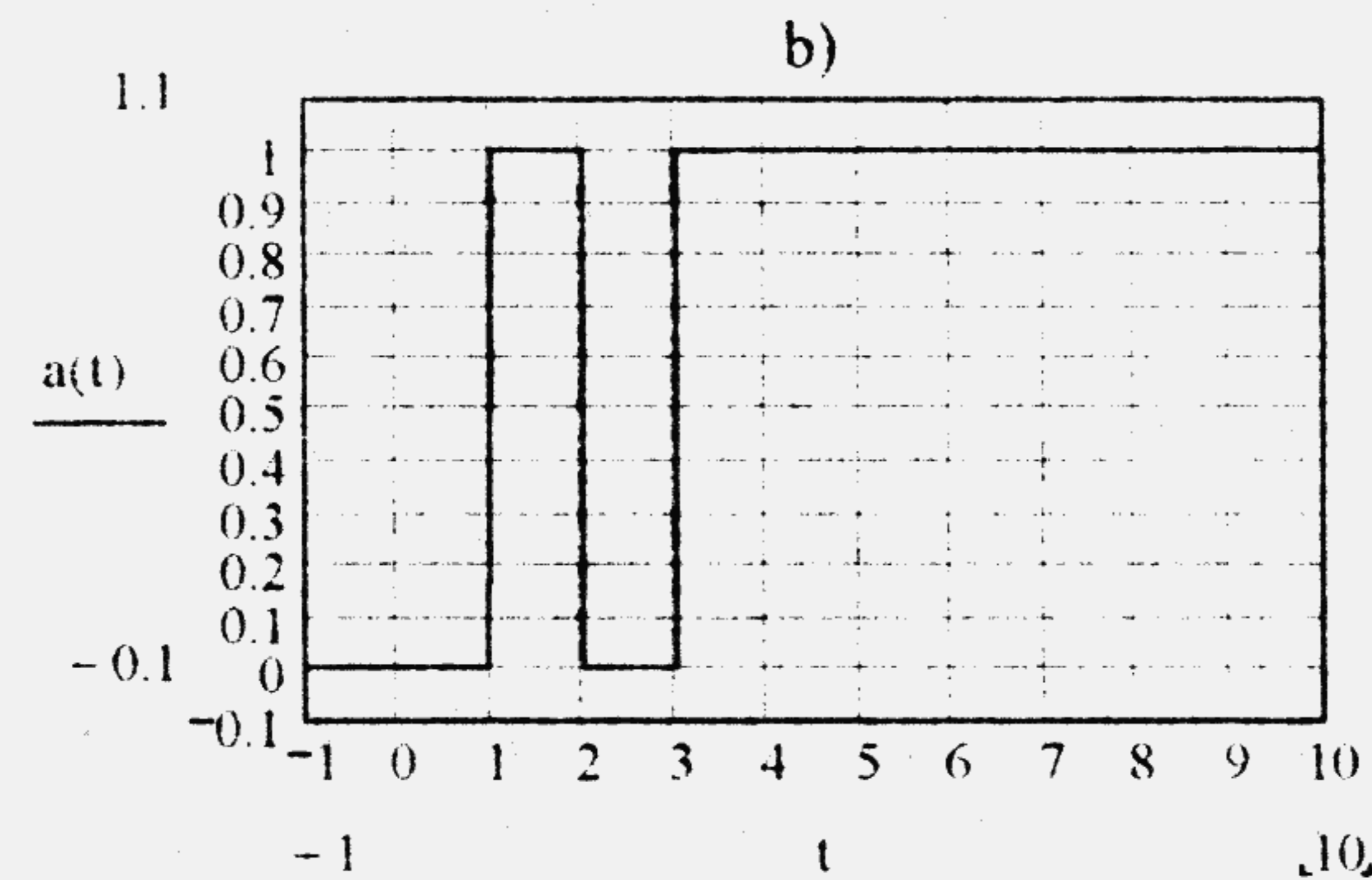
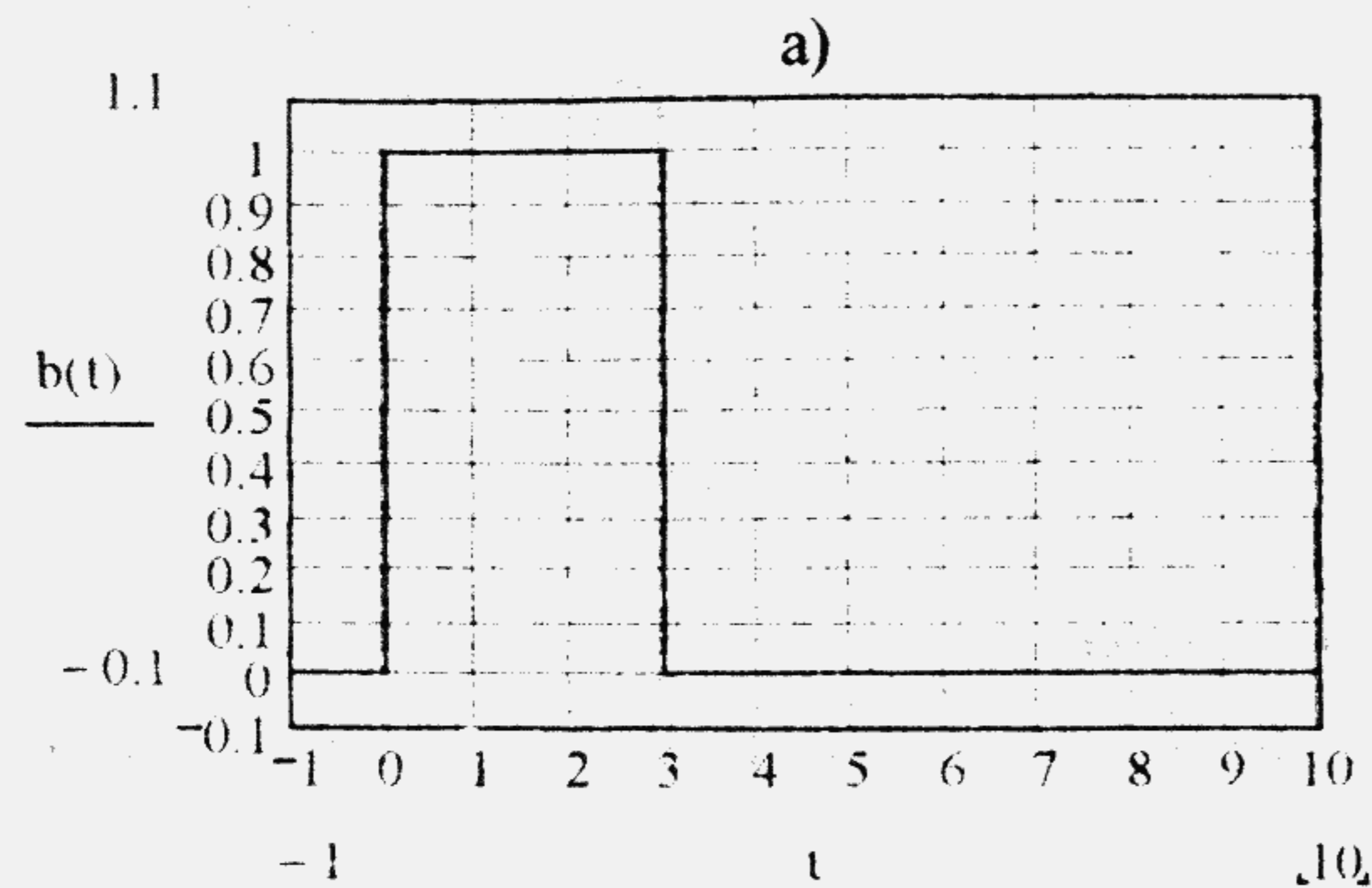


Рис. 3.15. Входной сигнал делителя (a); выходной сигнал делителя (b)

END

Читателю предоставляется возможность ответить на вопрос: существует ли связь между результатом, приведенным на рис. 3.15, b и устойчивостью рассмотренного делителя как системы с обратными связями?

Для исследования свойств умножителей и делителей многочленов широко применяется «Z-преобразование» [3.26].



$$q = n + m. \quad (3-117)$$

END

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Умножение натуральных чисел.** Каждой паре натуральных чисел  $\{n, m\}$  ставится в соответствие натуральное число  $q$ , называемое их **произведением**. Произведение  $q$  содержит столько единиц, сколько их содержится в числе  $n$ , взятых столько раз, сколько единиц содержится в натуральном числе  $m$ . О натуральном числе  $q$  говорят, что оно является результатом умножения натуральных чисел  $n$  и  $m$ , и пишут:

$$q = n \cdot m \text{ или } q = nm. \quad (3-118)$$

END

Множество всех натуральных чисел **замкнуто** относительно операций сложения и умножения, так как сумма и произведение любых двух натуральных чисел являются также натуральными числами.

Вводится также операция вычитания натуральных чисел как операция, обратная сложению, и операция деления натуральных чисел как операция, обратная умножению.

Множество всех натуральных чисел **не замкнуто** относительно операций вычитания и деления, так как эти две операции не всегда имеют результат в множестве натуральных чисел.

С операциями сложения и вычитания связаны понятия: сумма чисел, слагаемое, разность чисел, уменьшаемое, вычитаемое.

С операциями умножения и деления связаны понятия: произведение чисел, сомножитель, частное (натуральных чисел), делимое, делитель, натуральная степень числа.

Операция сложения подчинена правилам коммутативности и ассоциативности.

Операция умножения подчинена правилам коммутативности и ассоциативности.

Правило ассоциативности, которому подчинена операция умножения, позволяет ввести понятие **натуральной степени натурального числа**:  $n$ -й степенью натурального числа  $q$  называется натуральное число  $m$ , полученное в результате умножения числа  $q$  самого на себя  $n$  раз:

$$m = \underbrace{q \cdot q \cdot q \dots q}_n = q^n, \quad (3-119)$$

при этом  $q$  называется **основанием степени**, а  $n$  – **показателем степени**.

Операции сложения и умножения натуральных чисел связаны законом **дистрибутивности умножения относительно сложения** (см. табл. 2.1).

Если для заданных натуральных чисел  $n$  и  $m$  найдётся такое натуральное число  $q$ , что

$$n = mq, \quad (3-120)$$

то говорят, что  $n$  делится **нацело** на число  $m$ . Число  $m$  в этом случае называется **делителем** числа  $n$ , а о числе  $n$  говорят, что оно **кратно**  $m$ ; при этом  $q$  также является делителем  $n$ , а  $n$  является числом, кратным числу  $q$ .

Как уже отмечалось, не для каждой пары натуральных чисел  $n$  и  $m$  найдётся такое натуральное  $q$ , что будет выполняться (3-120). Например, при  $n = 7$ , и  $m = 2$ , такое натуральное  $q$  не существует.

Натуральное число большее единицы имеет число делителей – натуральных чисел **не менее двух**: единица, оно само и возможно ещё другие натуральные числа.

Натуральное число большее единицы, делителями которого являются **только** оно само и единица, называется **про-**



стым числом; все остальные натуральные числа (кроме единицы) называются *составными числами*.

Натуральное число единица, имеющее только один делитель – натуральное число единица, *простым числом не считается*.

Представление натурального числа  $n$  в виде произведения двух натуральных чисел  $p \cdot q$  называется *разложением  $n$  в произведение сомножителей (множителей)  $p$  и  $q$* .

Если же  $n$  является простым числом, то считается, что его *разложение* в произведение сомножителей состоит из *единственного множителя  $n$* .

Предположим, что  $n = pq$ , где  $p \neq 1$  и  $q \neq 1$ . Если при этом  $p$  и  $q$  – простые числа, то говорят о *разложении  $n$  в произведение простых сомножителей*. Если же это не так и среди чисел  $p$  и  $q$  имеются составные числа, то разложим их в произведение сомножителей; если среди этих сомножителей вновь имеются составные числа, то опять разложим их в произведение сомножителей; поступая аналогичным образом и далее, получим, в конце концов, разложение числа  $n$  в произведение *простых сомножителей* (это следует из того, что имеется лишь конечное число натуральных чисел, меньших  $n$ ). Оказывается, что разложение числа  $n$  в произведение простых сомножителей является *единственным*, если не учитывать в разложении порядка следования простых сомножителей (*основная теорема арифметики*).

**ТЕОРЕМА 3.30.** *Каждое натуральное число, большее единицы, разлагается в произведение простых сомножителей и притом единственным способом, если не учитывать порядок следования этих сомножителей в произведении.*

**END**

Объединяя в разложении числа  $n$  одинаковые простые сомножители, получим так называемое *каноническое разложение числа  $n$* :

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}, \quad (3-121)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_s$  – *различные простые числа*;  $k_1, k_2, \dots, k_s$  – *натуральные числа*.

Натуральное число  $n > 1$  называется *чётным*, если среди простых сомножителей его разложения в произведение простых сомножителей есть число 2, и называется *нечётным*, в противном случае.

Натуральное число называется *общим кратным* нескольких натуральных чисел, если оно является кратным для каждого из них. Наименьшее из общих кратных называется *наименьшим общим кратным* и сокращённо обозначается НОК. НОК натуральных чисел  $m$  и  $n$  обозначим через  $\langle m, n \rangle$ .

Натуральное число называется *общим делителем* нескольких натуральных чисел, если оно является делителем каждого из них. *Наибольший общий делитель* сокращённо обозначается НОД. НОД натуральных чисел  $m$  и  $n$  обозначим через  $\langle m, n \rangle$ .

Если НОД нескольких натуральных чисел равен единице, то эти числа называются *взаимно простыми*.

Для НОК  $\langle m, n \rangle$  и НОД  $\langle m, n \rangle$  двух чисел  $m$  и  $n$  справедливы соотношения

$$mn = \langle m, n \rangle \langle m, n \rangle, \quad (3-122)$$

$$\langle m, n \rangle \leq \min\{m, n\} \leq \max\{m, n\} \leq \langle m, n \rangle \leq mn. \quad (3-123)$$

Существуют алгоритмы нахождения НОК и НОД двух натуральных чисел, если известны их канонические разложения [3.5, 3.6, 3.14]. Однако определение канонических разложений больших натуральных чисел само по себе уже является трудной задачей. В то же время известен алгоритм нахождения НОД двух натуральных чисел, не основанный на знании их канонических разложений – *алгоритм деления Евклида*, для изложения которого введём *операцию деления с остатком*.