ПРИЛОЖЕНИЕ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Общие соотношения. Многочлены $P_n(x)$ называются ортогональными с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$, если они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) \rho(x)\, dx = N_n \delta_{nm}, \quad \rho(x) > 0;$$

по традиции наиболее употребительные многочлены нормируют не на единицу. Все корни ортогональных многочленов вещественные, простые и расположены на интервале (a, b); между каждой парой соседних корней многочлена $P_n(x)$ расположен один и только один корень многочлена $P_{n-1}(x)$.

Дальше ограничимся только так называемыми классическими ортогональными многочленами Якоби (и их частными случаями — многочленами Лежандра и Чебышева), Лагерра и Эрмита. Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x) \rho(x) \frac{dP_n}{dx}\right] + A_n \rho(x) P_n(x) = 0, \qquad a < x < b.$$

Их удобно вычислять либо по обобщенной формуле Родрига

$$P_n(x) = [B_n/\rho(x)] \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x) \rho(x)],$$

либо, зная два первых многочлена, при помощи рекуррентных соотношений

$$a_n P_{n+1}(x) = (b_n x - c_n) P_n(x) - d_n P_{n-1}(x).$$

Конкретный вид всех встречающихся в этих формулах функций и значения констант приведены в таблице 26.

Далее приведены некоторые многочлены с небольшими индексами n, их корни $\xi_i^{(n)}$ и соответствующие им веса $\gamma_i^{(n)}$ формулы Гаусса — Кристоффеля.

Многочлены Лежандра. $L_0(x) = 1$; $L_1(x) = x$; $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$;

$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$; $L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$; $L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

$n = 1$; $\xi_1 = 0$; $\gamma_1 = 2$.

$n = 2$; $-\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1/3}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

$n = 3$; $-\xi_1 = \xi_3 = \sqrt{3/5}$, $\xi_2 = 0$; $\gamma_1 = \gamma_3 = 5/9$, $\gamma_2 = 8/9$.

Таблица 26

Ортогональные многочлены

Многочлен	Якоби	Лежандра	Чебышева первого рода	Чебышева второго рода	Лагерра	Эрмита
Обозначение	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	$L_n(x)$	$T_n(x)$	$U_n(x)$	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$H_n(x)$
$a,\ b$	$-1,\ +1$	$-1,\ +1$	$-1,\ +1$	$-1,\ +1$	$0,\ +\infty$	$-\infty,\ +\infty$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta;\ \alpha,\ \beta>-1$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$x^\alpha e^{-x}$; $\alpha>-1$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$	x	1
N_n	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$	$\frac{2}{2n+1}$	$\frac{\pi}{2}$ при $n\neq 0$; π при $n=0$		$n!\times$ $\times\Gamma(\alpha+n+1)$	$\sqrt{\pi}\,2^n n!$
A_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	$n(n+1)$	n^2	$n(n+2)$	n	$2n$
B_n	$(-1)^n/(2^n\cdot n!)$	$(-1)^n/(2^n\cdot n!)$			$(-1)^n$	$(-1)^n$
a_n	$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)$	$n+1$	1	1	1	1
b_n	$(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)\times$ $\times(2n+\alpha+\beta+2)$	$2n+1$	2	2	1	2
c_n	$(\beta^2-\alpha^2)(2n+\alpha+\beta+1)$	0	0	0	$2n+\alpha+1$	0
d_n	$2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)$	n	1	1	$n(n+\alpha)$	$2n$

$n=4;\quad -\xi_1=\xi_4=\sqrt{(15+2\sqrt{30})/35},\quad -\xi_2=\xi_3=\sqrt{(15-2\sqrt{30})/35};$
$-\gamma_1=\gamma_4=(18-\sqrt{30})/36,\quad \gamma_2=\gamma_3=(18+\sqrt{30})/36.$

$n=5;\quad -\xi_1=\xi_5=\sqrt{(35+2\sqrt{70})/63},\quad -\xi_2=\xi_4=\sqrt{(35-2\sqrt{70})/63},\quad \xi_3=0;$
$\gamma_1=\gamma_5=(322-13\sqrt{70})/900,\quad \gamma_2=\gamma_4=(322+13\sqrt{70})/900,$
$\gamma_3=(128/225).$

Многочлены Лагерра ($\alpha=0$). $L_0^{(0)}(x)=1;\quad L_1^{(0)}(x)=x-1;$
$L_2^{(0)}(x)=x^2-4x+2;\quad L_3^{(0)}(x)=x^3-9x^2+18x-6;$
$L_4^{(0)}(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.$
$n=1;\quad \xi_1=1;\quad \gamma_1=1$
$n=2;\quad \xi_1=2-\sqrt{2},\ \xi_2=2+\sqrt{2};\ \gamma_1=(2+\sqrt{2})/4,\ \gamma_2=(2-\sqrt{2})/4.$

Многочлены Эрмита. $H_0(x)=1;\quad H_1(x)=2x;\quad H_2(x)=4x^2-2;$
$H_3(x)=8x^3-12x;\quad H_4(x)=16x^4-48x^2+12;$
$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x.$
$n=1;\quad \xi_1=0;\quad \gamma_1=\sqrt{\pi}.$
$n=2;\quad -\xi_1=\xi_2=1/\sqrt{2};\quad \gamma_1=\gamma_2=\sqrt{\pi}/2.$
$n=3;\quad -\xi_1=\xi_3=\sqrt{3/2},\quad \xi_2=0;\ \gamma_1=\gamma_3=\sqrt{\pi}/6,\ \gamma_2=2\sqrt{\pi}/3.$
$n=4;\quad -\xi_1=\xi_4=\sqrt{(3+\sqrt{6})/2},\quad -\xi_2=\xi_3=\sqrt{(3-\sqrt{6})/2};$
$\gamma_1=\gamma_4=\sqrt{\pi}\,(3-\sqrt{6})/12,\quad \gamma_2=\gamma_3=\sqrt{\pi}\,(3+\sqrt{6})/12.$
$n=5;\quad -\xi_1=\xi_5=\sqrt{(5+\sqrt{10})/2},\quad -\xi_2=\xi_4=\sqrt{(5-\sqrt{10})/2},\quad \xi_3=0;$
$\gamma_1=\gamma_5=\sqrt{\pi}\,(7-2\sqrt{10})/60,\ \gamma_2=\gamma_4=\sqrt{\pi}\,(7+2\sqrt{10})/60,\quad \gamma_3=(8\sqrt{\pi}/15).$

Многочлены Чебышева первого рода.
$T_0(x)=1;\quad T_1(x)=x;\quad T_2(x)=2x^2-1;$
$T_3(x)=4x^3-3x;\quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1;\quad T_5(x)=16x^5-20x^3+5x;$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1;$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x.$
$\xi_i^{(n)}=\cos[\pi(i-1/2)/n],\quad \gamma_i^{(n)}=\pi/n,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$

Многочлены Чебышева второго рода.
$U_0(x)=1;\quad U_1(x)=2x;\quad U_2(x)=4x^2-1;\quad U_3(x)=8x^3-4x;$
$U_4(x)=16x^4-12x^2+1;\quad U_5(x)=32x^5-32x^3+6x.$
$$\xi_m^{(n)}=\cos\frac{\pi m}{n+1},\qquad 1\leqslant m\leqslant n;$$
$n=1;\quad \gamma_1=\pi/2.$
$n=2;\quad \gamma_1=\gamma_2=\pi/4.$
$n=3;\quad \gamma_1=\gamma_3=\pi/8,\quad \gamma_2=\pi/4.$
$n=4;\quad \gamma_1=\gamma_4=\pi(5-\sqrt{5})/40,\quad \gamma_2=\gamma_3=\pi(5+\sqrt{5})/40.$
$n=5;\quad \gamma_1=\gamma_5=\pi/24,\quad \gamma_2=\gamma_4=\pi/8,\quad \gamma_3=\pi/6.$

Многочлены на системе точек. Многочлены $P_n(x)$ называют ортонормированными на системе точек x_i с весами ρ_i ($1\leqslant i\leqslant N$), если они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i P_n(x_i) P_m(x_i) = \delta_{nm}.$$

Систему таких многочленов можно построить, пользуясь рекуррентным соотношением

$$\lambda_n P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) + b_n P_{n-1}(x),$$

где

$$a_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i P_n^2(x_i), \qquad b_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i P_n(x_i) P_{n-1}(x_i),$$

а λ_n определяется из условия нормировки. Для начала расчета по этим формулам надо положить

$$P_{-1}(x) \equiv 0, \qquad P_0(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i\right)^{-1/2}.$$