

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В главе XIV рассмотрены простейшие методы решения интегральных уравнений. Корректно поставленным задачам посвящен § 1. В нем изложены некоторые типичные постановки задач и даны методы их решения: разностный метод и некоторые приближенные методы.

В § 2 рассмотрены некорректно поставленные задачи для линейных интегральных уравнений первого рода. Изложена теория построения регуляризирующих алгоритмов по А. Н. Тихонову. Для некоторых некорректных задач, возникших в предыдущих главах, даны алгоритмы решения, доведенные до схем численного расчета.

## § 1. Корректно поставленные задачи

**1. Постановки задач.** Интегральным называют уравнение, в котором неизвестная функция  $u(x)$  стоит под знаком интеграла. Одномерное нелинейное интегральное уравнение имеет вид

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi)) d\xi = F(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

где ядро  $K(x, \xi, u)$  и правая часть  $F(x, u)$  — заданные функции.

К интегральным уравнениям приводят многие физические задачи. Так, задача восстановления переданного радиосигнала  $u(t)$  по принятому сигналу  $f(t)$  сводится к решению интегрального уравнения типа свертки:

$$\int_0^t K(t - \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad (2)$$

где ядро  $K(\xi)$  зависит от свойств приемной аппаратуры и среды, через которую проходит сигнал.

Заметим, что даже для задач, записанных в терминах уравнений в частных производных, первичной обычно является формулировка в виде интегральных законов сохранения, т. е. интегральных уравнений. В предыдущих главах такие формулировки использовались, например, для построения консервативных разностных схем.

Интегральные уравнения в некоторых отношениях удобнее дифференциальных. Во-первых, интегральное уравнение содержит в себе полную постановку задачи. Например, интегральное уравнение

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (3)$$

эквивалентно задаче Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0. \quad (4)$$

Тем самым, для уравнения (3) не требуется задавать никаких дополнительных условий, начальных или граничных (см. также задачу 1).

Во-вторых, в интегральных уравнениях переход от одной переменной ко многим является естественным. Так, многомерным аналогом (1) является уравнение

$$\int_G K(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) d\xi = F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})), \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in G(\mathbf{x}),$$

отличающееся от (1) только тем, что интегрирование проводится по многомерной области  $G$ . Поскольку оба уравнения не требуют дополнительных условий и полностью определяют задачу, аналогия является полной. Тем самым, теоретическое обоснование постановок и методов решения одномерных задач непосредственно обобщается на случай многих измерений.

Наоборот, в дифференциальных уравнениях переход от одной переменной к нескольким, т. е. от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям в частных производных, является принципиальным усложнением, приводит к новым постановкам задач и требует новых методов для их обоснования.

Далее мы ограничимся рассмотрением одномерного уравнения (1) и некоторых его частных случаев.

Линейные задачи. Лучше всего изучены уравнения, в которые неизвестная функция  $u(x)$  входит линейно (см. [23]). Их можно записать в виде

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6)$$

Это уравнение называют *уравнением Фредгольма второго рода*: ядро  $K(x, \xi)$  этого уравнения определено на квадрате  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$ .

Если ядро  $K(x, \xi)$  отлично от нуля только на треугольнике  $a \leq \xi \leq x \leq b$  (т. е.  $K(x, \xi) = 0$  при  $x < \xi$ ), то уравнение (6)

переходит в уравнение Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (7)$$

Это уравнение теоретически исследовать или численно решить много проще, чем уравнение Фредгольма.

Если в уравнениях (6) и (7) отбросить член  $u(x)$ , оставив только  $u(\xi)$  под знаком интеграла, то получим уравнения Фредгольма и Вольтерра *первого рода*. Задачи для уравнений первого рода являются некорректно поставленными и будут рассмотрены в § 2. Для уравнений второго рода задачи корректно поставлены; остановимся на этих задачах.

Для однородного уравнения Фредгольма второго рода (6) ставится задача на собственные значения:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad a \leq x \leq b. \quad (8)$$

Требуется найти такие значения параметра  $\lambda = \lambda_i$ , при которых уравнение (8) имеет нетривиальные решения  $u = \varphi_i(x)$ ;  $\lambda_i$  называют собственными значениями ядра  $K(x, \xi)$ , а  $\varphi_i(x)$  — собственными функциями.

Если ядро вещественное и симметричное,  $K(x, \xi) = K(\xi, x) = K^*(x, \xi)$ , то оно имеет по меньшей мере одно собственное значение. Все собственные значения такого ядра вещественны, а его собственные функции ортогональны друг другу. Заметим, однако, что система собственных функций  $\varphi_i(x)$  может быть неполной и даже конечной.

Неоднородное уравнение Фредгольма (6) при значении параметра  $\lambda$ , не равном ни одному из собственных значений  $\lambda_i$  ядра, имеет решение  $u(x)$ , притом единственное.

Если ядро  $K(x, \xi)$  и правая часть  $f(x)$  непрерывны вместе со своими  $p$ -ми производными, то решение также  $p$  раз непрерывно дифференцируемо. В этом легко убедиться, продифференцировав (6)  $p$  раз:

$$u^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} u(\xi) d\xi.$$

При сделанных предположениях правая часть этого равенства непрерывно зависит от  $x$ , что доказывает наше утверждение.

Для симметричного ядра решение неоднородного уравнения (6) представляется в виде разложения Шмидта:

$$u(x) = f(x) + \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) \int_a^b f(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi; \quad (9)$$

если ядро  $K(x, \xi)$  и правая часть  $f(x)$  интегрируемы с квадратом, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно. В данном случае из формулы (9) непосредственно видно, что при  $\lambda \neq \lambda_i$  решение  $u(x)$  существует, единственно и непрерывно зависит от  $f(x)$ , что означает корректность задачи (6).

Пусть параметр  $\lambda$  равен одному из собственных значений  $\lambda_i$  ядра  $K(x, \xi)$ . Тогда неоднородное уравнение Фредгольма (6) при произвольной правой части  $f(x)$ , вообще говоря, не имеет решения. Однако при некоторых правых частях  $f(x)$  оно может иметь решение, притом не единственное (соответствующие примеры будут рассмотрены в п. 4). Таким образом, при  $\lambda = \lambda_i$  в классе непрерывных или даже достаточно гладких правых частей  $f(x)$  задача (6) является некорректно поставленной.

Уравнение Вольтерра не имеет собственных значений: если в уравнении (7) положить  $f(x) = 0$ , то оно будет иметь только тривиальное решение  $u(x) = 0$ . Поэтому неоднородное уравнение (7) всегда имеет решение, притом единственное.

**2. Разностный метод.** Это простейший численный метод, позволяющий получать решение одномерных задач с хорошей точностью, а двумерных — с удовлетворительной. Он рассчитан на применение ЭВМ, хотя оценки с небольшим числом узлов сетки можно производить вручную.

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение (1). Возьмем на  $[a, b]$  какую-нибудь квадратную формулу, например линейную формулу с узлами  $x_n$  и весами  $c_n$ :

$$\int_a^b \Phi(\xi) d\xi \approx \sum_{n=1}^N c_n \Phi(x_n) \quad (10)$$

(нелинейные квадратурные формулы почти никогда не используются). Введем в квадрате  $[a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b]$  сетку  $x_n, \xi_m$ , где  $x_n$  и  $\xi_m$  являются узлами формулы (10). Заменяя интеграл в уравнении (1) суммой (10), получим систему алгебраических уравнений для определения приближенных значений в узлах  $y_n \approx u(x_n)$ :

$$\sum_{m=1}^N c_m K(x_n, x_m, y_m) = F(x_n, y_n), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (11)$$

Эту систему целесообразно решать методом Ньютона. На вопрос о сходимости  $y_n$  к  $u(x_n)$  при заданном типе квадратурной формулы и  $N \rightarrow \infty$  в настолько общей постановке трудно ответить.

Рассмотрим линейные задачи. Для них обоснование сходимости (при использовании линейных квадратурных формул) фактически содержится в теории Фредгольма. Это обоснование громоздко и здесь не приводится (см., например, [23]).

Однородное уравнение Фредгольма (8) линейно, поэтому для него система (11) также линейна. Запишем ее в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^N c_m K_{nm} y_m = \frac{1}{\lambda} y_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad K_{nm} = K(x_n, x_m). \quad (12)$$

Система (12) представляет собой задачу на определение собственных значений матрицы  $K'$  порядка  $N$  с элементами  $K'_{nm} = K_{nm} c_m$ . Эта матрица имеет  $N$  собственных значений  $\lambda_i^{(N)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , которые являются приближением к первым собственным значениям  $\lambda_i$  ядра  $K(x, \xi)$ .

Разностное решение (12) вычисляют методами, описанными в главе VI. Матрица  $K'$  является, вообще говоря, плотно заполненной и неэрмитовой; поэтому фактически вычислить разностное решение удастся только при небольших  $N \lesssim 50$ . Получить в этом случае хорошую точность можно лишь для нескольких первых собственных значений, причем ядро и правая часть должны быть достаточно гладкими и не быстропеременными.

Замечание 1. Пусть ядро, правая часть и искомое решение достаточно гладки и квадратурная формула (10) имеет на них аппроксимацию  $O(h^p)$ . Поскольку алгоритм сходится, то он устойчив. Задача (8) — линейная, поэтому из аппроксимации и устойчивости следует сходимость со скоростью  $O(h^p)$ .

Сходимость можно исследовать численно, проводя расчеты на последовательности сгущающихся сеток и устанавливая стремление  $y_n$  и некоторой предельной функции при  $h \rightarrow 0$ .

Неоднородное уравнение Фредгольма (6) приводит к линейной неоднородной алгебраической системе

$$y_n - \lambda \sum_{m=1}^N c_m K_{nm} y_m = f_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad f_n = f(x_n). \quad (13)$$

Разностное решение легко вычисляется методом исключения Гаусса; на ЭВМ типа БЭСМ-6 скорость и оперативная память позволяют использовать в расчете до  $N \approx 150$  узлов. Таким образом, в этой задаче нетрудно получить более высокую точность расчета, чем в задаче на собственные значения.

Линейная система (13) имеет единственное решение, если  $\lambda \neq \lambda_i^{(N)}$ . Но  $\lambda_i^{(N)} \approx \lambda_i$ , причем при большом  $N$  разница между ними невелика. Следовательно, описанный алгоритм хорошо обусловлен, если параметр  $\lambda$  не лежит в малой окрестности одного из собственных значений  $\lambda_i$  ядра.

Если  $\lambda \approx \lambda_i$ , то система (13) становится плохо обусловленной. При некоторых числах узлов  $N$  возможен сбой алгоритма: если слу-

чайно значение  $\lambda_i^{(N)}$  близко подходит к  $\lambda$ , то разностное решение  $y_n$  на этой сетке может сильно отличаться от  $u(x)$ .

Обычно нам неизвестны собственные значения ядра. Поэтому для обнаружения и исключения последнего случая все расчеты надо проводить на последовательности сгущающихся сеток. Если при сгущении сетки  $y_n$  сходится к некоторой предельной функции  $u(x)$ , то эта функция есть искомое решение (см. замечание 1). Если расчет на одной из сеток выпадает из общей закономерности, то имело место случайное совпадение  $\lambda \approx \lambda_i^{(N)}$ . Если на всех сетках  $y_n$  не стремится к пределу при  $h \rightarrow 0$ , то  $\lambda \approx \lambda_i$ .

Уравнение Вольтерра (7) получают из уравнения Фредгольма (6), полагая  $K(x, \xi) = 0$  при  $x < \xi$ . Алгебраическая система (13) становится при этом треугольной:

$$y_n - \lambda \sum_{m=1}^n c_m K_{nm} y_m = f_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (14)$$

и решается обратным ходом метода Гаусса всего за  $3/2 N^2$  действий. Поэтому здесь объем вычислений остается умеренным даже при  $N \approx 1000$ , что позволяет проводить расчеты с очень высокой точностью.

Выбор квадратурной формулы. Большинство задач приходится решать, используя сравнительно небольшое число узлов  $N$ . Поэтому для получения хорошей точности целесообразно выбирать квадратурные формулы высокого порядка точности, разумеется, если  $K(x, \xi)$  и  $f(x)$  имеют достаточное число непрерывных производных.

Обычно наилучшие результаты для достаточно гладких решений дают квадратурные формулы Гаусса или Гаусса — Кристоффеля; при числе узлов  $k$  их порядок точности  $p = 2k$ . Можно также использовать простейшую формулу трапеций, последовательно сгущая сетки вдвое от  $N_1 = 2$  до  $N_k = 2^k$  и уточняя решение способом Рунге; это также дает результат с порядком точности  $p = 2k$  \*), но требует использования существенно большего числа узлов, чем в формулах Гаусса.

Нередко ядро  $K(x, \xi)$  или правая часть  $f(x)$  недостаточно гладки и даже имеют разрывы. Наиболее типичен разрыв ядра или его производных при  $x = \xi$  (на диагонали квадрата  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$ ); встречаются особенности и на других линиях в плоскости  $(x, \xi)$ . В этих случаях использовать формулы Гаусса нецелесообразно. Удобнее построить специальную сетку  $x_n$  так, чтобы особые линии пересекали линии сетки  $x = x_n$  только в узлах

\*) Каждая лишняя сетка позволяет повысить порядок точности на 2, поскольку погрешность формулы трапеций разлагается по четным степеням шага  $h$ .

$\xi = x_m$  (рис. 102). Затем в качестве (10) выбирают обобщенную формулу трапеций (4.7), причем в интервалах, примыкающих к особой линии, используют соответствующие односторонние пределы функций.

Если вне особых линий все функции непрерывны вместе с достаточным числом своих производных, то при сгущении специальной сетки можно уточнять решение способом Рунге.

Полезно предварительно так преобразовать исходное уравнение, чтобы гладкость решения повысилась. Например, если ядро непрерывно, а  $f(x)$  разрывна, то  $u(x)$  тоже разрывна. Полагая  $z(x) = u(x) - f(x)$ , получим вместо (6) уравнение

$$z(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) z(\xi) d\xi = \varphi(x), \quad (15)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

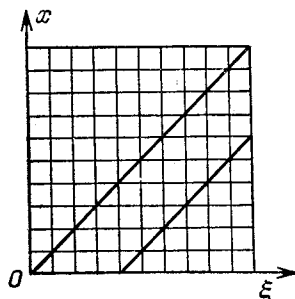


Рис. 102.

В уравнении (15) правая часть уже непрерывно зависит от  $x$ , так что его решение  $z(x)$  непрерывно. Поэтому численно решать уравнение (15) проще, чем исходное уравнение (6).

**Замечание 2.** Уравнение Вольтерра (7) формально сводится к уравнению Фредгольма (6), но ядро при этом имеет особенность (обычно разрыв) на диагонали  $x = \xi$ . Поэтому для уравнения Вольтерра следует выбирать обобщенную формулу трапеций и проводить уточнение способом Рунге.

Многомерные задачи допускают, в принципе, применение описанного метода; надо только в (10) и других формулах под  $x_n$  подразумевать узлы многомерной кубатурной формулы  $x_n$ . Однако получить удовлетворительную точность при умеренном объеме расчетов удастся лишь для достаточно гладких  $K(x, \xi)$  и  $f(x)$ , когда можно использовать кубатурные формулы высокого порядка точности (например, произведение одномерных формул Гаусса с небольшим числом узлов  $k$  по каждой переменной).

В более сложных случаях развивают специальные методы; многие из них используют симметрию задачи и слабую зависимость решения от части переменных.

**3. Метод последовательных приближений.** Это простейший приближенный метод. Запишем для неоднородного уравнения Фредгольма (6) итерационный процесс:

$$u_0(x) = 0, \quad u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) u_n(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что при ограниченном ядре и достаточно малом значении  $|\lambda|$  этот процесс сходится к решению уравнения (6).

**Доказательство.** Обозначим погрешность  $n$ -й итерации через  $z_n(x) = u_n(x) - u(x)$ . Вычитая (6) из (16), получим

$$z_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) z_n(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Отсюда следует неравенство

$$\|z_{n+1}\|_C \leq |\lambda| (b-a) \|K(x, \xi)\|_C \|z_n(x)\|_C. \quad (18)$$

Тем самым, если выполнено условие

$$q = |\lambda| (b-a) \|K(x, \xi)\|_C < 1, \quad (19)$$

то итерации (16) сходятся равномерно по  $x$ , причем сходимость линейная. При достаточно малом  $|\lambda|$  условие (19) выполняется.

В практических вычислениях квадратуры, возникающие в этом методе, редко удается выразить через элементарные функции. Поэтому обычно ограничиваются нахождением первых приближений.

**Замечание 1.** Для уравнения Вольтерра (7) метод последовательных приближений сходится равномерно по  $x$  при любых значениях  $\lambda$ . Действительно, в этом случае вместо (17) справедливо соотношение

$$z_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi) z_n(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Выкладки, полностью аналогичные доказательству сходимости метода Пикара (гл. VIII, § 1, п. 3), приводят к оценке

$$\|z_n(x)\|_C \leq \frac{1}{n!} \{|\lambda| (b-a) \|K(x, \xi)\|_C\}^n \|z_0(x)\|_C. \quad (21)$$

При  $n \rightarrow \infty$  правая часть этого неравенства стремится к нулю при любых значениях  $\lambda$ , что доказывает наше утверждение.

**Замечание 2.** Оценку (18) можно переписать в следующем виде:

$$\|z_n(x)\|_C \leq q^n \|z_0(x)\|_C, \quad q^n \sim \lambda^n. \quad (22)$$

Отсюда видно, что метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма эквивалентен разложению в ряд по степеням параметра  $\lambda$ . Это можно строго показать, выражая  $u_n(x)$  через  $u_1(x) = f(x)$  при помощи рекуррентного соотношения (16).



Пример. Рассмотрим уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-(x+\xi)} u(\xi) d\xi = x. \quad (23)$$

Применяя процесс (16), получим

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x + \lambda e^{-x}, \\ u_3(x) = x + \lambda e^{-x} + \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-2x}, \quad u_4(x) = x + \left( \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^3 \right) e^{-x}$$

и т. д. В этом случае удается найти точное решение

$$u(x) = x + \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{4} + \dots \right) e^{-x} = x + \frac{2\lambda}{2-\lambda} e^{-x}. \quad (24)$$

Нетрудно заметить, что последовательные приближения здесь сходятся только при  $|\lambda| < 2$ .

**4. Замена ядра вырожденным.** Ядро уравнения Фредгольма называется *вырожденным*, если оно является суммой конечного числа членов вида

$$\bar{K}(x, \xi) = \sum_{n=1}^N A_n(x) B_n(\xi) \quad (25)$$

(для уравнения Вольтерра ядро не может быть вырожденным, иначе оно тождественно равнялось бы нулю). Решение уравнения с вырожденным ядром находится за конечное число действий.

В самом деле, подставляя ядро (25) в неоднородное уравнение (6), представим решение в виде суммы конечного числа членов:

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^N \alpha_n A_n(x), \quad (26a)$$

$$\alpha_n = \int_a^b B_n(\xi) u(\xi) d\xi. \quad (26b)$$

Подставляя (26a) в (26b), получим линейную систему для нахождения коэффициентов  $\alpha_n$ :

$$\sum_{m=1}^N \left[ \delta_{nm} - \lambda \int_a^b B_n(\xi) A_m(\xi) d\xi \right] \alpha_m = \int_a^b B_n(\xi) f(\xi) d\xi, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (27)$$

Решая эту систему и подставляя найденные значения  $\alpha_n$  в (26a), найдем искомого решение.

Для однородного уравнения Фредгольма (8) надо положить во всех формулах  $f(x) = 0$ . Тогда система (27) становится однородной и представляет собой задачу на нахождение собственных

значений матрицы  $N$ -го порядка. Отсюда видно, что вырожденное ядро (25) имеет ровно  $N$  собственных значений  $\lambda_i$ .

Произвольное ядро нередко удается хорошо аппроксимировать вырожденным ядром. Например, разложим  $K(x, \xi)$  в ряд Фурье по некоторой полной ортонормированной системе функций  $B_n(\xi)$ ; коэффициенты этого разложения будут функциями от  $x$ :

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) B_n(\xi), \quad A_n(x) = \int_a^b B_n^*(\xi) K(x, \xi) d\xi. \quad (28)$$

В качестве (25) можно взять отрезок разложения (28). Тогда формулы (25)—(27) позволяют найти приближенное решение. Оценки точности таких приближений мы не рассматриваем, поскольку они громоздки и неудобны в практических вычислениях.

**З а м е ч а н и е.** Пусть в неоднородном уравнении (6) с вырожденным ядром (25) правая часть  $f(x) \not\equiv 0$  и такова, что выполняется

$$\int_a^b f(\xi) B_n(\xi) d\xi = 0, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (29)$$

Тогда при  $\lambda$ , равном одному из собственных значений ядра  $\lambda_i$ , система (27) имеет нетривиальное решение, причем не единственное. Тем самым, в данном случае существует решение  $u(x)$  уравнения (6).

**П р и м е р.** Рассмотренное в п. 3 уравнение (23) имеет вырожденное ядро  $K(x, \xi) = e^{-x}e^{-\xi}$ . У него должно быть ровно одно собственное значение; определим его. Полагая в (27)  $N=1$  и  $f(x)=0$ , легко получим

$$\left(1 - \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-2\xi} d\xi\right) \alpha_1 = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = 2$ . Заметим, что точное решение (24) неоднородного уравнения (23) при  $\lambda = \lambda_1$  не существует.

**5. Метод Галеркина** (который для интегральных уравнений обычно называют *методом моментов*). Будем искать решение в виде разложения по полной системе функций  $\psi_k(x)$ :

$$u(x) \approx f(x) + \lambda \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(x); \quad (30)$$

поскольку от  $u(x)$  не надо специально требовать удовлетворения каким-либо краевым условиям, то от системы  $\psi_k(x)$  ничего, кроме полноты, требовать не надо.

Подставляя разложение (30) в неоднородное уравнение Фредгольма (6) и требуя ортогональности невязки ко всем функциям

$\psi_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$ , получим линейную алгебраическую систему уравнений для нахождения  $\alpha_k$ :

$$\sum_{k=1}^N a_{mk} \alpha_k = b_m, \quad 1 \leq m \leq N,$$

$$x_{mk} = \int_a^b \psi_m(x) \psi_k(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi_m(x) \psi_k(\xi) dx d\xi, \quad (31)$$

$$b_m = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi_m(x) f(\xi) dx d\xi.$$

В случае задачи на собственные значения (8) надо полагать в (30) и (31)  $f(x) = 0$ . Метод применим и к нелинейному уравнению (1), но тогда он приводит к нелинейной алгебраической системе.

Основной трудностью, препятствующей применению метода моментов, является сложность вычисления двукратных интегралов, входящих в (31). Поэтому обычно ограничиваются малым числом членов суммы (30).

**Замечание.** Если система  $\psi_k(x)$  ортогональна, то метод моментов эквивалентен приближенной замене ядра на специальное вырожденное ядро:

$$\bar{K}(x, \xi) = \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \Psi_k(\xi), \quad (32)$$

$$\Psi_k(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) \psi_k(x) dx.$$

## § 2. Некорректные задачи

**1. Регуляризация.** Если в интегральном уравнении (1) правая часть  $F(x, u(x))$  не зависит от решения, т. е.  $u(x)$  входит только под знак интеграла, то задача оказывается некорректно поставленной. Классическими примерами некорректных задач являются уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (33)$$

и уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (34)$$

В отличие от уравнений второго рода, ядро уравнения Фредгольма (33) задано на прямоугольнике  $[c \leq x \leq d, a \leq \xi \leq b]$ , а в урав-

нении Вольтерра (34) — на трапеции [ $c \leq x \leq d$ ,  $a \leq \xi \leq x$ ]\*), причем функции  $u(\xi)$  и  $f(x)$  определены на разных отрезках и принадлежат разным классам функций  $U$  и  $F$ .

Покажем, что задача (33) неустойчива по правой части и, тем самым, некорректна. Для этого рассмотрим высокочастотное возмущение с конечной амплитудой  $\delta u(\xi) = \exp(i\omega\xi)$ ,  $\omega \gg 1$ . Ему соответствует возмущение правой части

$$\delta f(x) = \int_a^b K(x, \xi) \delta u(\xi) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) e^{i\omega\xi} d\xi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\delta f(x) = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega\xi} K(x, \xi) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} e^{i\omega\xi} d\xi = O\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (35)$$

Это означает, что для достаточно больших частот величина  $\|\delta f\|_C = O(1/\omega)$  оказывается сколь угодно малой. Следовательно, существуют такие сколь угодно малые возмущения правой части  $\delta f(x)$ , которым соответствуют большие возмущения решения  $\delta u(\xi)$ , т. е. задача (33) неустойчива.

Для уравнения Вольтерра (34) справедливы те же рассуждения. Напомним, что в главе III мы уже сталкивались с некорректностью задачи численного дифференцирования функции  $f(x)$ ; эта задача сводится к решению уравнения

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = f(x), \quad (36)$$

т. е. является частным случаем уравнения Вольтерра первого рода, с ядром  $K(x, \xi) = 1$  (при  $\xi \leq x$ ).

Кроме того, задачи (33), (34) имеют решение не при любых непрерывных правых частях  $f(x)$ . Так, задача (36) имеет решение только для дифференцируемых  $\bar{f}(x)$ . Другим примером служит уравнение (33) с вырожденным ядром; подставляя в это уравнение выражение для ядра (25), получим

$$\sum_{n=1}^N \beta_n A_n(x) = f(x), \quad \beta_n = \int_a^b B_n(\xi) u(\xi) d\xi. \quad (37)$$

Это равенство выполнимо для таких  $\bar{f}(x)$ , которые представимы в виде линейной комбинации функций  $A_n(x)$ ; для других правых частей задача (33) не имеет решения.

В обоих этих примерах, даже если при некоторой  $f(x) = \bar{f}(x)$  существует решение, имеются такие малые изменения правой части  $\delta f(x)$ , при которых решение не существует.

\*) При  $c < a$  эта трапеция превращается в два треугольника.

Очевидно, непосредственно решать некорректные задачи при неточно заданной правой части бессмысленно. Если  $\bar{f}(x)$  задана с погрешностью  $\delta f(x)$ , то соответствующее решение  $u_3(\xi)$  или не существует, или отличается от искомого решения  $\bar{u}(\xi)$  на величину  $\delta u(\xi)$ , которая может быть большой.

Даже если  $f(x)$  задана точно, но отыскание решения выполняется численными методами, то неизбежно вносятся погрешности метода и округления. Это снова приводит к большой погрешности решения  $\delta u(\xi)$ .

**Регуляризирующий алгоритм.** Пусть требуется найти решение  $u(\xi)$  некорректно поставленной задачи:

$$A[x, u(\xi)] = f(x), \quad u(\xi) \in U, \quad f(x) \in F. \quad (38)$$

Здесь  $A$  — некоторый оператор, не обязательно интегральный, а  $U$  и  $F$  — нормированные пространства. Предполагается, что для произвольной  $f(x) \in F$  решение задачи (38) может не существовать; однако имеются некоторые  $\bar{f}(x) \in F$ , для которых существуют решения  $\bar{u}(\xi) \in U$ .

Ранее, изучая разрывные решения квазилинейных уравнений, мы вводили в исследуемое уравнение дополнительные члены, изменяющие свойства решений в нужную нам сторону. Попробуем и здесь изменить уравнение (38), введя в него дополнительные члены с малым положительным параметром регуляризации  $\alpha$ . Символически запишем измененную задачу:

$$A_\alpha[x, u_\alpha(\xi)] = f(x), \quad (39)$$

а ее решение обозначим через  $u_\alpha(\xi)$ .

**Определение.** Оператор  $A_\alpha$  называют регуляризирующим, если а) задача (39) является корректно поставленной в классе правых частей  $F$  при любом (не слишком большом)  $\alpha > 0$  и б) существуют такие функции  $\alpha(\delta)$  и  $\delta(\varepsilon)$ , что если  $\|f - \bar{f}\|_F \leq \delta(\varepsilon)$ , то  $\|u_{\alpha(\delta)} - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon$ .

**Замечание.** Функции  $\alpha(\delta)$  и  $\delta(\varepsilon)$  зависят также от  $\bar{f}(x)$ .

Таким образом, если найден регуляризирующий оператор  $A_\alpha$ , то задача (39) имеет решение при любых  $f(x) \in F$ , в том числе отличающихся от  $\bar{f}(x)$  на любого вида погрешность  $\delta f(x)$ ; эта задача устойчива, так что ее можно решать обычными численными методами. При правильно подобранном параметре  $\alpha$  ее решение  $u_\alpha(\xi)$  достаточно мало отличается от нужного нам решения  $\bar{u}(\xi)$  исходной задачи (38).

Для одной и той же задачи можно построить много различных регуляризирующих алгоритмов. Кроме того, при заданном пространстве  $F$  разные алгоритмы могут давать решения  $u_\alpha(\xi)$ , принадлежащим различным пространствам  $U$ . Различают регуля-

ризации *слабую* ( $U$  есть гильбертово пространство), *сильную* (чебышевское пространство) и  $p$ -го порядка гладкости (пространство  $C^{(p)}$  \*).

Можно формально превратить задачу (38) в корректно поставленную, если ограничиться рассмотрением правых частей  $f(x)$ , принадлежащих некоторому более узкому классу  $F_0$ . Например, для задачи численного дифференцирования (36) в качестве  $F_0$  возьмем пространство  $C^{(1)}$ . Малость  $\|\delta f\|_{C^{(1)}}$  означает, что  $\max |\delta f'(x)|$  невелик; поэтому такой вариации правой части соответствует малая вариация  $\|\delta u(\xi)\|_C$ .

Однако такой подход не конструктивен. Зачастую  $f(x)$  содержит заметную погрешность, например, она может быть экспериментально определяемой величиной. Поэтому постановки большинства прикладных задач таковы, что в качестве  $F$  приходится выбирать чебышевское или даже гильбертово пространство, причем решение  $u(\xi)$  необходимо получить в чебышевском пространстве.

**2. Вариационный метод регуляризации.** Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода (33). Будем считать, что его ядро непрерывно и таково, что в случае  $f(x) \equiv 0$  уравнение имеет только тривиальное решение  $u(\xi) \equiv 0$ . Тогда при любой правой части  $f(x) \in F$  решение либо единственное, либо не существует; тем самым, интегральный оператор

$$A[x, u(\xi)] = \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (40)$$

отображает  $U$  в  $F$  взаимно однозначно.

Исходную задачу (33) можно записать в вариационной форме:

$$\int_c^d \{A[x, u(\xi)] - f(x)\}^2 dx = \min, \quad (41)$$

где оператор  $A$  определен формулой (40). Рассмотрим измененную задачу:

$$M[\alpha, f(x), u(\xi)] \equiv \int_c^d \{A[x, u(\xi)] - f(x)\}^2 dx + \alpha \Omega_n[u(\xi)] = \min, \quad (42a)$$

где так называемый *тихоновский стабилизатор  $n$ -го порядка*  $\Omega_n$  равен

$$\Omega_n[u(\xi)] = \int_a^b d\xi \sum_{k=0}^n p_k(\xi) \left( \frac{d^k u(\xi)}{d\xi^k} \right)^2, \quad (42б)$$

а весовые функции  $p_k(\xi)$  непрерывны и неотрицательны, причем

\*) Это пространство функций  $u(\xi)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , непрерывных и ограниченных вместе со своими  $p$ -ми производными, причем  $\|u\|_{C^{(p)}} = \max \{ |u|, |u'|, \dots, |u^{(p)}| \}$ .

$p_n(\xi) > 0$  (если нет специальных оснований для их выбора, то обычно полагают  $p_k(\xi) \equiv 1$ ).

Введем в множестве функций  $U$  норму  $\|u\|_U^2 = \Omega_n[u]$ ; полученное пространство называют пространством Соболева  $W_2^n$ . Множество правых частей  $F$  будем считать гильбертовым пространством. Докажем методами функционального анализа, что алгоритм (42) является регуляризирующим (другое доказательство см. в п. 3).

**Теорема 1.** *Задача (42) имеет решение  $u_\alpha(\xi)$  при любых  $f(x) \in F$  и  $\alpha > 0$ .*

**Доказательство.** При  $\alpha > 0$  функционал  $M[\alpha, f, u]$  ограничен снизу. Тем самым, при данных  $\alpha$  и  $f(x)$  он имеет точную нижнюю грань. Выберем некоторую минимизирующую последовательность  $u_i(\xi)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , так, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \bar{M}, \quad M_i = M[\alpha, f, u_i], \quad \bar{M} = \inf_{u \in U} M[\alpha, f, u].$$

Упорядочим эту последовательность так, чтобы  $M_i$  не возрастали. Тогда

$$\Omega_n[u_i] \leq \frac{1}{\alpha} M_i \leq \frac{1}{\alpha} M_0 = \text{const.} \quad (43)$$

Таким образом, последовательность  $u_i(\xi)$  принадлежит множеству  $u(\xi)$ , для которых  $\Omega_n[u] \leq \text{const}$ . Такое множество является компактом в  $U$ . Поэтому из последовательности  $u_i(\xi)$  можно выделить подпоследовательность  $u_{i(k)}(\xi)$ , сходящуюся по норме к некоторой  $u_\alpha(\xi) \in U$ . В силу непрерывности функционал  $M[\alpha, f, u]$  на этой функции  $u_\alpha(\xi)$  достигает своей точной нижней грани. Тем самым,  $u_\alpha(\xi) \in U$  есть решение задачи (42), что доказывает теорему.

**Теорема 2.** *Алгоритм (42) является регуляризирующим для задачи (41).*

**Доказательство.** Используем следующие обозначения:  $\bar{u}(\xi)$  — решение исходной задачи (41) с правой частью  $\bar{f}(x)$ ;  $\tilde{u}_\alpha(\xi)$  — решение измененной задачи (42) с приближенной правой частью  $\tilde{f}(x)$ ; введем также функцию  $\tilde{f}_\alpha(x) = A[x, u_\alpha(\xi)]$ .

Поскольку функционал  $M[\alpha, \tilde{f}, u]$  достигает минимума на  $\tilde{u}_\alpha$ , то  $M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{u}_\alpha] \leq M[\alpha, \tilde{f}, \bar{u}]$ . Отсюда, используя определение функционала (42а), получим

$$\begin{aligned} \alpha \Omega_n[\tilde{u}_\alpha] &\leq M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{u}_\alpha] \leq M[\alpha, \tilde{f}, \bar{u}] = \\ &= \int_c^d \{A[x, \bar{u}] - \tilde{f}(x)\}^2 dx + \alpha \Omega_n[\bar{u}] = \int_c^d \{\bar{f}(x) - \tilde{f}(x)\}^2 dx + \\ &+ \alpha \Omega_n[\bar{u}] = \|\bar{f} - \tilde{f}\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega_n[\bar{u}]. \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть приближенные правые части удовлетворяют условию

$$\|\bar{f} - \tilde{f}\|_{L_2} \leq C \sqrt{\alpha}, \quad C = \text{const}. \quad (45)$$

Тогда из (44) следует

$$\Omega_n[\tilde{u}_\alpha] \leq C^2 + \bar{\Omega}_n = \text{const}, \quad \bar{\Omega}_n = \Omega_n[\bar{u}]. \quad (46)$$

Значит, решения  $\tilde{u}_\alpha$  принадлежат компактному множеству  $U_0$  функций из  $U$ . Заметим, что  $\bar{u}$  также принадлежит  $U_0$ .

Множество  $F_0$  функций  $f_\alpha(x)$  есть образ множества  $U_0$  при отображении  $A$ . Интегральный оператор  $A$  непрерывен и таков (по предположению), что обратное отображение единственно. Поэтому обратное отображение  $F_0$  в компактное множество  $U_0$  при помощи нерегуляризованного оператора  $A^{-1}$  непрерывно в  $\|\cdot\|_U$ . Следовательно, по заданному  $\varepsilon > 0$  всегда найдется такое  $\beta(\varepsilon)$ , что если  $\|f_\alpha - f\| \leq \beta(\varepsilon)$ , то  $\|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}\| \leq \varepsilon$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - \tilde{f}\|^2 &= \int_c^d (f_\alpha - \tilde{f})^2 dx = \int_c^d \{A[x, \tilde{u}_\alpha] - \tilde{f}\}^2 dx \leq \\ &\leq M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{u}_\alpha] \leq \alpha(C^2 + \bar{\Omega}_n). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (45) следует

$$\|f_\alpha - \bar{f}\| \leq \|f_\alpha - \tilde{f}\| + \|\tilde{f} - \bar{f}\| \leq \sqrt{\alpha}(C + \sqrt{C^2 + \bar{\Omega}_n}). \quad (47)$$

Выберем  $\alpha$  так, чтобы выполнялось

$$\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon), \quad \alpha_0(\varepsilon) \equiv [\beta(\varepsilon)/(C + \sqrt{C^2 + \bar{\Omega}_n})]^2. \quad (48)$$

Тогда правая часть неравенства (47) будет меньше  $\beta(\varepsilon)$ , откуда следует  $\|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}\| \leq \varepsilon$ .

Таким образом, по заданному  $\varepsilon$  нашлись такое  $\alpha_0(\varepsilon)$  и такое  $\delta(\alpha) = C\sqrt{\alpha}$ , что если  $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$  и  $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta(\alpha)$ , то  $\|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}\| \leq \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Следствие. Задача (42) корректно поставлена.

В самом деле, подставим в теорему 2 всюду вместо  $A$  регуляризирующий алгоритм (42). Тогда малость  $\|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}\|$  означает, что регуляризованное решение  $\tilde{u}_\alpha$  непрерывно зависит от  $\tilde{f}$ .

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 справедливы не только для линейных интегральных операторов (40), но вообще для непрерывного оператора  $A$ , при котором решение задачи  $A[u] = f$  единственно (если существует). Соответственно от стабилизатора  $\Omega$  достаточно требовать, чтобы множество функций  $u$ , для которых  $\Omega[u] \leq \text{const}$ , было компактно в  $U$ .

Замечание 2. Сходимость в пространстве  $W_2^n$  означает, что  $n$ -я производная сходится среднеквадратично, а сама функция



и ее производные вплоть до  $(n - 1)$ -й — равномерно. Таким образом, использование стабилизатора (42б) обеспечивает слабую регуляризацию при  $n = 0$ , сильную при  $n = 1$  и  $(n - 1)$ -го порядка гладкости при  $n > 1$ .

Выбор  $\alpha$ . В ряде прикладных задач известно, что правая часть имеет характерную погрешность  $\|\tilde{f} - \bar{f}\| \approx \delta$ . Если при этом выбрать  $\alpha$  настолько малым, что нарушится критерий (45), то устойчивость расчета станет недостаточной, так что регуляризованное решение  $\tilde{u}_\alpha$  будет заметно «разболтанным». Если  $\alpha$  настолько велико, что не соблюден критерий (48), то регуляризованное решение  $\tilde{u}_\alpha$  чрезмерно сглажено, что также нежелательно; например, если точное решение  $\bar{u}$  имеет узкие максимумы (типа резонансных пиков в физических задачах), то у  $\tilde{u}_\alpha$  они могут отсутствовать или иметь существенно меньшую высоту.

Вдобавок непосредственно проверить выполнение критериев (45) и (48) не удастся, поскольку функция  $\beta(\epsilon)$  неизвестна (и, вообще говоря, зависит от  $C$  и  $\bar{f}$ ). Поэтому оптимальный выбор параметра регуляризации  $\alpha$  является сложной проблемой.

Обычно на практике проводят расчеты с несколькими значениями параметра, составляющими геометрическую прогрессию (например,  $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ ). Из полученных результатов выбирают наилучший либо визуальным контролем, либо по какому-нибудь правдоподобному критерию.

Примером такого критерия является требование, чтобы невязка, полученная при подстановке найденного  $\tilde{u}_\alpha$  в исходное уравнение, была сравнима с погрешностью правой части:

$$r \approx \delta, \quad r = \left( \int_c^d \{A[x, \tilde{u}_\alpha(\xi)] - \tilde{f}(x)\}^2 dx \right)^{1/2}. \quad (49)$$

Очевидно, воспроизводить правую часть с точностью много выше  $\delta$  бессмысленно; поэтому, если в расчете получено  $r \ll \delta$ , то следует увеличить  $\alpha$ . Наоборот, погрешность много больше  $\delta$  недопустима, так что если  $r \gg \delta$ , то надо уменьшить  $\alpha$ .

Визуальный контроль заключается в том, что выбирают наименьшее значение  $\alpha$ , при котором еще не наблюдается заметной «разболтки» регуляризованного решения  $\tilde{u}_\alpha$ .

Выбор  $n$ . При чрезмерно большом  $n$  регуляризованное решение сильно сглаживается. Значение  $n = 0$  обеспечивает лишь среднеквадратичную сходимость  $\tilde{u}_\alpha(\xi)$  к  $\bar{u}(\xi)$ . Поэтому наиболее часто используют  $n = 1$ .

Помимо вариационного способа регуляризации существует ряд других: метод подбора, метод квазиобращения, методы с использованием преобразований Лапласа и Меллина и т. д. Они рассмотрены в [39] и цитированных там работах.

3. Уравнение Эйлера. Учитывая явный вид (40) оператора  $A$ , перепишем задачу (42) следующим образом:

$$\alpha \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(\xi) [u^{(k)}(\xi)]^2 d\xi + \int_c^d dx \left\{ \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi - f(x) \right\}^2 = \min. \quad (50)$$

Составим для этой вариационной задачи уравнение Эйлера. Для этого приравняем нулю вариацию левой части по  $u(\xi)$ :

$$\alpha \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(\xi) u^{(k)}(\xi) \delta u^{(k)}(\xi) d\xi + \int_c^d dx \left\{ \int_a^b K(x, \eta) u(\eta) d\eta - f(x) \right\} \int_a^b K(x, \xi) \delta u(\xi) d\xi = 0. \quad (51)$$

Интегралы, стоящие под знаком суммы, вычислим последовательным интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} & \int_a^b p_k(\xi) u^{(k)}(\xi) \delta u^{(k)}(\xi) d\xi = \\ & = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \delta u^{(k-1-r)}(\xi) \frac{d^r}{d\xi^r} [p_k(\xi) u^{(k)}(\xi)] \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} + \\ & \quad + (-1)^k \int_a^b \delta u(\xi) \frac{d^k}{d\xi^k} [p_k(\xi) u^{(k)}(\xi)] d\xi. \quad (52) \end{aligned}$$

Подставляя (52) в (51) и меняя порядок суммирования в двойной сумме по краевым вариациям, найдем

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{r=1}^n \delta u^{(r)}(\xi) \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \frac{d^{k-r}}{d\xi^{k-r}} [p_k(\xi) u^{(k)}(\xi)] \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} + \\ + \alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_a^b \delta u(\xi) \frac{d^k}{d\xi^k} [p_k(\xi) u^{(k)}(\xi)] d\xi + \\ + \int_c^d dx \int_a^b K(x, \eta) u(\eta) d\eta \int_a^b K(x, \xi) \delta u(\xi) d\xi = \\ = \int_c^d f(x) dx \int_a^b K(x, \xi) \delta u(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Полагая в этом выражении  $\delta$ -функцию в качестве вариации  $\delta u(\xi)$ , получим искомое уравнение Эйлера; оно будет интегро-дифференциальным:

$$\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{d\xi^k} [p_k(\xi) u^{(k)}(\xi)] + \int_a^b Q(\xi, \eta) u(\eta) d\eta = \Phi(\xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (53a)$$

с ядром и правой частью

$$Q(\xi, \eta) = \int_c^d K(x, \xi) K(x, \eta) dx, \quad \Phi(\xi) = \int_c^d K(x, \xi) f(x) dx \quad (53б)$$

и краевыми условиями

$$q_r[u(a)] = q_r[u(b)] = 0, \quad 1 \leq r \leq n; \quad q_r[u] = \sum_{k=r}^n (-1)^k \frac{d^{k-r}}{d\xi^{k-r}} (p_k u^{(k)}). \quad (53в)$$

Заметим, что ядро  $Q(\xi, \eta)$  определено на квадрате  $[a, b; a, b]$ , симметрично и непрерывно, а правая часть  $\Phi(\xi)$  непрерывна.

Формулировка задачи (42) в виде уравнения Эйлера (53) позволяет доказать, не пользуясь аппаратом функционального анализа, что построенный алгоритм является регуляризирующим; при этом для простоты будем полагать  $p_k(\xi) \equiv 1$ .

**Теорема 1.** *Задача (53) корректно поставлена при любом  $\alpha > 0$ .*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим простейший случай  $n=0$ . При этом исчезают все краевые условия (53в) и производные в уравнении (53а), и задача (53) превращается в интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\alpha u(\xi) + \int_a^b Q(\xi, \eta) u(\eta) d\eta = \Phi(\xi) \quad (54)$$

с ядром и правой частью (53б).

Пусть  $\lambda_i, u_i(\xi)$  — собственные значения и собственные функции ядра  $Q(\xi, \eta)$ . Поскольку ядро имеет вид (53б), то они удовлетворяют уравнению

$$u_i(\xi) = \lambda_i \int_a^b u_i(\eta) d\eta \int_c^d K(x, \xi) K(x, \eta) dx.$$

Умножая обе части уравнения на  $u_i(\xi)$  и интегрируя, получим

$$0 < \int_a^b u_i^2(\xi) d\xi = \lambda_i \int_c^d dx \left\{ \int_a^b K(x, \xi) u_i(\xi) d\xi \right\}^2.$$

Отсюда видно, что все собственные значения ядра  $Q(\xi, \eta)$  положительны.

Поэтому, согласно теории интегральных уравнений Фредгольма (см. § 1, п. 1), при любом  $\alpha > 0$  уравнение (54) имеет решение  $u_\alpha(\xi)$ , причем это решение единственно и непрерывно зависит от правой части  $\Phi(\xi)$  и, тем самым, от  $f(x)$ . Таким образом, при  $n=0$  задача (53) и эквивалентная ей задача (42) корректны.

При  $n > 0$  задачу (53) также можно свести к интегральному уравнению. Построим функцию Грина  $G(\xi, \tau)$  для дифференциального оператора, стоящего в левой части (53а), при краевых условиях (53в). Рассматривая все интегральные члены в (53а) как правую часть дифференциального уравнения, выразим через них решение при помощи функции Грина:

$$\text{сш}(\xi) + \int_a^b u(\eta) d\eta \int_a^b G(\xi, \tau) Q(\tau, \eta) d\tau = \int_a^b G(\xi, \tau) \Phi(\tau) d\tau. \quad (55)$$

Таким образом,  $u(\xi)$  удовлетворяет уравнению Фредгольма второго рода, причем его ядро имеет только положительные собственные значения. Следовательно, задача (53) корректна при любом  $n$ , если  $\alpha > 0$ , что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Интегро-дифференциальное уравнение (53а) содержит производные решения вплоть до порядка  $2n$ . Поэтому  $u_\alpha(\xi)$  имеет  $2n$  непрерывных производных.

**Теорема 2.** Пусть  $A[x, \bar{u}] = \bar{f}$ ; тогда при  $n=1$  и положительном  $\alpha \rightarrow 0$  решение  $\bar{u}_\alpha(\xi)$  задачи (53), соответствующее правой части  $\bar{f}(x)$ , равномерно сходится к  $\bar{u}(\xi)$ .

**Доказательство.** При  $n=1$  решения  $u_\alpha(\xi)$  задачи (53) с любой правой частью являются дважды непрерывно дифференцируемыми. Применяя неравенство Коши — Буняковского, найдем

$$\begin{aligned} \left( \int_{\xi}^{\xi+\delta} |u'_\alpha(\tau)| d\tau \right)^2 &\leq \int_{\xi}^{\xi+\delta} d\tau \cdot \int_{\xi}^{\xi+\delta} |u'_\alpha(\tau)|^2 d\tau \leq \\ &\leq \delta \cdot \int_a^b [u'_\alpha(\tau)]^2 d\tau \leq \delta \cdot \Omega_1[u_\alpha]. \end{aligned} \quad (56)$$

Рассмотрим множество решений  $\bar{u}_\alpha(\xi)$ , соответствующих одной и той же правой части  $\bar{f}(x)$ , но разным значениям параметра  $\alpha > 0$ . Полагая  $\bar{f} = \bar{f}$  в неравенстве (44), получим

$$\Omega_1[\bar{u}_\alpha] \leq \bar{\Omega}_1, \quad \bar{\Omega}_1 = \Omega_1[\bar{u}]. \quad (57)$$

Из неравенств (56) и (57) следует

$$|\bar{u}_\alpha(\xi + \delta) - \bar{u}_\alpha(\xi)| \leq \int_{\xi}^{\xi+\delta} |u'_\alpha(\tau)| d\tau \leq \sqrt{\delta \bar{\Omega}_1}, \quad (58)$$

что означает равностепенную непрерывность множества функций  $\bar{u}_\alpha(\xi)$ . Кроме того, согласно определению функционала  $\Omega_1$  при  $p_k(\xi) \equiv 1$ ,

$$(b-a) \min |\bar{u}_\alpha(\xi)|^2 \leq \Omega_1[\bar{u}_\alpha] \leq \bar{\Omega}_1. \quad (59)$$

Из (59), (57) и (426) вытекает, что

$$\max |\bar{u}_\alpha(\xi)| \leq \min |\bar{u}_\alpha(\xi)| + \int_a^b |\bar{u}'_\alpha(\xi)| d\xi \leq \left( \sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right) \sqrt{\Omega_1}, \quad (60)$$

т. е. функции  $\bar{u}_\alpha(\xi)$  равномерно ограничены.

Теперь предположим, что функции  $\bar{u}_\alpha(\xi)$  не сходятся равномерно к  $\bar{u}(\xi)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , т. е. для некоторого  $\varepsilon > 0$  найдется такая последовательность  $\alpha_k \rightarrow 0$ , что  $\|\bar{u}_{\alpha_k}(\xi) - \bar{u}(\xi)\|_C \geq \varepsilon$ .

Построим на отрезке  $a \leq \xi \leq b$  последовательность сгущающихся вдвое сеток. Узлы этих сеток образуют счетное множество точек. Перенумеруем эти узлы, как указано на рис. 103. Тогда для отрезка этого множества, состоящего из первых  $N$  узлов, длина интервала между соседними узлами не превышает

$$\delta = 2(b-a)/N.$$

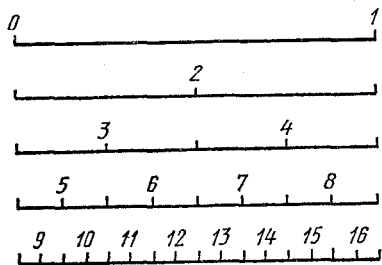


Рис. 103.

Из последовательности ограниченных в совокупности функций  $\bar{u}_{\alpha_k}(\xi)$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в узле  $\xi_1$ . Из этой подпоследовательности

выберем подпоследовательность, сходящуюся в узле  $\xi_2$ , и т. д. В итоге построим подпоследовательность  $\hat{u}_{\alpha_k}(\xi)$ , сходящуюся в каждом узле  $\xi_i$  к некоторому пределу  $\hat{u}(\xi_i)$ .

Выберем сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$  и положим  $N = 18(b-a) \times \sqrt{\Omega_1} \varepsilon^{-2}$ . Возьмем настолько малое  $\alpha_0(\varepsilon)$ , чтобы при  $\alpha < \alpha_0(\varepsilon)$  во всех узлах  $\xi_i$  с номерами  $i \leq N$  выполнялось неравенство  $|\hat{u}_{\alpha_k}(\xi_i) - \hat{u}(\xi_i)| \leq \varepsilon/3$ . Интервал между соседними узлами настолько мал, что в силу (58) значения  $\hat{u}_{\alpha_k}(\xi_i)$  в соседних узлах будут различаться меньше, чем на  $\varepsilon/3$ . Тогда значения  $\hat{u}(\xi_i)$  в соседних узлах с номерами  $i \leq N$  будут различаться меньше чем на  $\varepsilon$ .

Отсюда, во-первых, следует, что функцию  $\hat{u}(\xi)$  можно доопределить во всех точках отрезка  $a \leq \xi \leq b$  так, что она будет непрерывной. Во-вторых, подпоследовательность  $\hat{u}_{\alpha_k}(\xi)$  равномерно сходится к доопределенной функции  $\hat{u}(\xi)$ .

Функции  $\hat{u}_{\alpha_k}(\xi)$  являются решением задачи (42) с правой частью  $\bar{f}(x)$ . Подставляя их в эту задачу и переходя к пределу при  $\alpha_k \rightarrow 0$ , мы убеждаемся, что  $\hat{u}(\xi)$  является решением этой задачи при  $\alpha = 0$ , т. е. решением задачи (41). Поскольку реше-

ние последней задачи единственно, то  $\hat{u}(\xi) = \bar{u}(\xi)$ , что противоречит сделанному в ходе доказательства предположению. Это противоречие доказывает теорему.

**Теорема 3.** Алгоритм (42) при  $n=1$  обеспечивает сильную регуляризацию.

**Доказательство.** Пусть точной правой части  $\bar{f}(x)$  соответствуют точное решение  $\bar{u}(\xi)$  и регуляризованное решение  $\bar{u}_\alpha(\xi)$ , а приближенной правой части  $\tilde{f}(x)$  соответствует регуляризованное решение  $\tilde{u}_\alpha(\xi)$ .

Зададим сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$ . По теореме 2 найдется такое  $\alpha_0(\varepsilon)$ , что  $\|\bar{u}_\alpha - \bar{u}\|_C \leq \varepsilon/2$  при  $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ .

Согласно теореме 1 задача (42) корректна, так что при любом заданном  $\alpha > 0$  найдется такое  $\delta(\alpha)$ , что если  $\|\bar{f} - \tilde{f}\| \leq \delta(\alpha)$ , то  $\|\bar{u}_\alpha - \tilde{u}_\alpha\|_C \leq \varepsilon/2$ .

Следовательно, если  $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$  и  $\|\bar{f} - \tilde{f}\| \leq \delta(\alpha)$ , то

$$\|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}\|_C \leq \|\tilde{u}_\alpha - \bar{u}_\alpha\|_C + \|\bar{u}_\alpha - \bar{u}\|_C \leq \varepsilon.$$

Это соответствует определению сильной регуляризации (см. п. 1); теорема доказана.

**Замечание 2.** Поясним действие регуляризации простыми рассуждениями. Пусть правая часть  $\Phi(\xi)$  получила возмущение  $\beta e^{i\omega\xi}$ ; тогда решение получит возмущение  $\gamma e^{i\omega\xi}$ . Прибавляя эти возмущения в (53а) и оценивая каждое слагаемое по порядку величины, получим

$$\gamma \left( \alpha \sum_{k=0}^n \omega^{2k} + \frac{1}{\omega} \right) \sim \beta.$$

Рассмотрим поведение возмущений при больших частотах. Если  $\alpha = 0$ , то  $\gamma \sim \omega\beta$ , т. е. возмущения решения велики, и расчет неустойчив. Регуляризации нет.

Если  $\alpha \neq 0$ , но  $n = 0$ , то  $\gamma \sim \beta/\alpha$ , т. е. возмущения решения по порядку величины равны возмущениям правой части, и расчет становится устойчивым. Чем больше  $\alpha$ , тем меньше возмущения решения и «разболтка» в численном расчете. Но сдвиги фаз отдельных гармоник приводят к тому, что сходимость будет только среднеквадратичной (слабая регуляризация).

Если  $n = 1$ , то  $\gamma \sim \beta/\alpha\omega^2$  и возмущения решения для высоких частот малы. Значит, расчет хорошо устойчив и  $\bar{u}_\alpha(\xi)$  равномерно сходится к  $\bar{u}(\xi)$  (сильная регуляризация). При  $n > 1$  амплитуды  $\gamma_\omega$  настолько быстро убывают при  $\omega \rightarrow \infty$ , что обеспечивается равномерная сходимость не только регуляризованного решения, но и его  $(n-1)$ -й производной.

**4. Некоторые приложения.** Некорректные задачи встречаются в практике вычислений довольно часто. К ним относятся, напри-

мер, сглаживание и дифференцирование экспериментально измеренных функций, суммирование рядов Фурье с неточно заданными коэффициентами, решение плохо обусловленных линейных систем, задачи оптимального управления, аналитическое продолжение функций, линейное программирование (оптимальное планирование), обратные задачи теплопроводности и геологической разведки, восстановление переданного сигнала по принятому при наличии искажений аппаратуры и многие другие.

Некоторые из этих задач встречались в предыдущих главах. Покажем, как они регуляризуются вариационным методом. Для определенности ограничимся сильной регуляризацией, полагая  $n=1$  в формулах (42) или (53).

Сглаживание функции. Пусть функция  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , измерена экспериментально и содержит заметную случайную погрешность. Тогда математическая задача имеет вид  $u(x) = f(x)$ ; ее можно записать в каноническом виде  $A[x, u(\xi)] = f(x)$ , полагая  $A[x, u(\xi)] \equiv u(x)$ . Подставляя последнее выражение в измененную задачу (42), составим уравнение Эйлера (53):

$$\alpha \left[ \frac{d}{dx} \left( p_1 \frac{du}{dx} \right) - p_0 u(x) \right] - u(x) + f(x) = 0, \quad u'(a) = u'(b) = 0. \quad (61)$$

Таким образом, сглаженная функция  $u(x)$  удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, для которого поставлена вторая краевая задача. Методы численного решения этой задачи подробно разобраны в главе VIII.

Замечание 1. Весовые функции  $p_0(x)$  и  $p_1(x)$  выбирают, исходя из дополнительных сведений о виде функции  $f(x)$  и величине погрешности  $\delta f(x)$ . Например,  $p_k(x)$  целесообразно брать большими в тех диапазонах значений  $x$ , где погрешность  $\delta f(x)$  особенно велика. Если подобных сведений нет, то обычно полагают  $p_0(x) = p_1(x) = 1$ .

Замечание 2. На концах отрезка  $[a, b]$  погрешность сглаживания может быть значительна, поскольку краевые условия второго рода в (61) не соответствуют, вообще говоря, истинному поведению функции.

Замечание 3. Можно уменьшить погрешность сглаживания вблизи концов отрезка  $[a, b]$ , если воспользоваться регуляризацией более высокого порядка (см. задачу 10). Однако, как отмечалось в п. 2, при этом могут исказиться качественные особенности решения (типа, например, узких экстремумов).

Дифференцирование. Задачу дифференцирования  $u(x) = f'(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , можно записать в виде уравнения Вольтерра первого рода (36):

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = f(x) - f(a),$$

или, формально, в виде уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром:

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x) - f(a), \quad a \leq x \leq b; \quad (62a)$$

$$K(x, \xi) = 1 \text{ при } a \leq \xi \leq x \leq b, \quad (62b)$$

$$K(x, \xi) = 0 \text{ при } \xi > x.$$

Поскольку требование непрерывности ядра не является существенным, применим к этой задаче алгоритм (53). Легко получим

$$Q(\xi, \eta) = \int_a^b K(x, \xi) K(x, \eta) dx = b - \max(\xi, \eta),$$

$$\Phi(\xi) = \int_a^b [f(x) - f(a)] K(x, \xi) dx = \int_a^b [f(x) - f(a)] dx.$$

Отсюда вытекает, что регуляризованное решение удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению и краевым условиям:

$$\begin{aligned} -\alpha \left[ \frac{d}{d\xi} \left( p_1(\xi) \frac{du}{d\xi} \right) - p_0(\xi) u(\xi) \right] + \\ + \int_a^\xi (b - \xi) u(\eta) d\eta + \int_\xi^b (b - \eta) u(\eta) d\eta = \int_a^b [f(x) - f(a)] dx, \quad (63) \\ u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \end{aligned}$$

К этой задаче также относятся сделанные выше замечания о выборе весовых функций, о значительной погрешности на концах отрезка  $[a, b]$  и возможностях ее уменьшения.

Суммирование ряда Фурье. Пусть задана полная ортонормированная система функций  $\varphi_s(x)$ , которую можно рассматривать как систему собственных функций некоторой задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p_1(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - [p_0(x) + \lambda] \varphi(x) = 0, \quad (64) \\ \varphi'(a) = 0, \quad \varphi'(b) = 0. \end{aligned}$$

Требуется просуммировать ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \varphi_s(x), \quad (65)$$

коэффициенты которого  $\beta_s$  заданы приближенно.

Эту задачу можно рассматривать как сглаживание неточно заданной функции  $f(x)$ . Воспользуемся для ее решения уравнением (61), где в качестве  $p_0(x)$  и  $p_1(x)$  выбраны веса, входящие



в задачу Штурма — Лиувилля (64). Будем искать регуляризованное решение также в виде ряда Фурье:

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s \varphi_s(x). \quad (66)$$

Подставляя (66) и (65) в (61) и учитывая (64), получим

$$\gamma_s = \frac{\beta_s}{1 + \alpha \lambda_s}, \quad (67)$$

где  $\lambda_s > 0$  — собственные значения задачи Штурма — Лиувилля (64). Этот способ регуляризации приводился без доказательства в гл. II, § 2, п. 3.

Плохо обусловленные линейные системы  $Au = f$ , где  $u$  и  $f$  — конечномерные векторы, можно регуляризовать, записывая их непосредственно в вариационной форме (42) и выбирая  $n = 0$ :

$$\|Au - f\|^2 + \alpha \|u\|^2 = \min, \quad \|a\|^2 = (a, a). \quad (68)$$

Формально  $n = 0$  соответствует слабой регуляризации. Но в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому сходимость регуляризованного решения к точному при  $\alpha \rightarrow 0$  является равномерной.

Уравнение (68) означает, что среди решений, приближенно удовлетворяющих исходной задаче, ищут вектор наименьшей длины. Часто рассматривают более общую постановку:

$$\|Au - f\|^2 + \alpha \|u - u_0\|^2 = \min, \quad (69)$$

которая определяет *нормальное* решение — приближенное решение, наименее отличающееся от заданного вектора  $u_0$ . Ее используют, например, в задачах линейного программирования (см. гл. VII, § 3).

Поскольку (69) является квадратичной формой относительно  $u$ , то нахождение ее минимума сводится к решению линейной алгебраической системы

$$(A^H A + \alpha E) u = A^H f + \alpha u_0. \quad (70)$$

Благодаря слагаемому  $\alpha E$  эта система хорошо обусловлена, по крайней мере, при не слишком малых  $\alpha > 0$ . Поэтому ее нетрудно решить методом исключения Гаусса.

Описанный алгоритм применяют также для решения систем с вырожденной матрицей  $A$ .

**5. Разностные схемы.** При вариационном методе регуляризации численно решать приходится либо задачу на минимум функционала (42), либо краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Эйлера (53). К этим задачам целесообразно применять разностные методы.

Дадим пример построения разностной схемы, исходя из вариационной формулировки (42). Введем на прямоугольнике  $[c \leq x \leq d, a \leq \xi \leq b]$  сетку  $\{x_n, \xi_m, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$  так, что  $x_0 = c, x_N = d, \xi_0 = a, \xi_M = b$ . Для простоты ограничимся случаем равномерных сеток  $x_n = c + nh_x, \xi_m = a + mh_\xi$ , сильной регуляризации и единичных весовых функций  $p_0(\xi) = p_1(\xi) = 1$ .

Задача (42) при указанных ограничениях принимает вид

$$\int_c^d [\delta(x)]^2 dx + \alpha \int_a^b \left[ u^2(\xi) + \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi = \min, \quad (71a)$$

$$\delta(x) = \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi - f(x), \quad (71b)$$

где величина, обозначенная через  $\delta(x)$ , имеет смысл невязки исходной нерегуляризованной системы при подстановке в нее регуляризованного решения. Аппроксимируем входящие в (71) интегралы квадратурными формулами, использующими значения функций в узлах сетки. Для этого  $\int (u')^2 d\xi$  вычислим по формуле средних (4.17), одновременно заменяя производную разностью:

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi \approx h_\xi \left( \frac{du}{d\xi} \right)_{m+1/2}^2 \approx h_\xi \left( \frac{u_{m+1} - u_m}{h_\xi} \right)^2. \quad (72)$$

Остальные интегралы вычислим по формуле трапеций (4.8):

$$\int_a^b u^2(\xi) d\xi \approx h_\xi \sum_{m=0}^M c_m u_m^2, \quad u_m = u(\xi_m); \quad (73)$$

$$\int_a^b K(x_n, \xi) u(\xi) d\xi \approx h_\xi \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} u_m, \quad K_{nm} = K(x_n, \xi_m); \quad (74)$$

$$\int_c^d [\delta(x)]^2 dx \approx h_x \sum_{n=0}^N b_n [\delta(x_n)]^2, \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned} c_m &= 1 \text{ при } 1 \leq m \leq M-1, & c_0 &= c_M = 1/2, \\ b_n &= 1 \text{ при } 1 \leq n \leq N-1, & b_0 &= b_N = 1/2. \end{aligned} \quad (76)$$

Подставляя (72) — (76) в (71) и обозначая разностное решение через  $y_m$ , получим вместо (71) алгебраическую задачу

$$\begin{aligned} h_x \sum_{n=0}^N b_n \left\{ h_\xi \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} y_m - f_n \right\}^2 + \\ + \alpha h_\xi \sum_{m=0}^M c_m y_m^2 + \frac{\alpha}{h_\xi} \sum_{m=0}^{M-1} (y_{m+1} - y_m)^2 = \min \end{aligned} \quad (77)$$

на минимизацию квадратичной формы.

Для решения этой задачи приравняем нулю производные от левой части (77) по  $y_m$ . Получим систему уравнений, линейных относительно  $y_m$ :

$$\alpha y_m - \frac{\alpha}{c_m} \Lambda(y_m) + h_x \sum_{l=0}^M c_l Q_{ml} y_l = \Phi_m, \quad 0 \leq m \leq M; \quad (78a)$$

$$\Lambda(y_m) = \frac{1}{h_x^2} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) \quad \text{при } 1 \leq m \leq M-1, \quad (78б)$$

$$\Lambda(y_0) = \frac{1}{h_x^2} (y_1 - y_0), \quad \Lambda(y_M) = \frac{1}{h_x^2} (y_{M-1} - y_M);$$

где

$$Q_{ml} = h_x \sum_{n=0}^N b_n K_{nm} K_{nl}, \quad \Phi_m = h_x \sum_{n=0}^N b_n K_{nm} f_n. \quad (78в)$$

Матрица системы (78) является, вообще говоря, плотно заполненной; поэтому обычно эту систему решают методом исключения Гаусса.

На исследовании полученной разностной схемы не будем останавливаться, поскольку сходные вопросы были рассмотрены в главе VII, § 4. Отметим только, что схема (77) или (78) имеет аппроксимацию  $O(h_x^2 + h_x^2)$ , если ядро и правая часть непрерывны со своими вторыми производными.

**Замечание 1.** Если умножить уравнение (78a) на  $c_m$ , то матрица этой линейной системы станет симметричной. Тогда для решения этой системы можно будет применить метод квадратного корня (который вдвое быстрее метода Гаусса).

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что  $Q_{ml}$  и  $\Phi_m$  являются разностными аналогами ядра и правой части (53б) интегродифференциального уравнения Эйлера. Выражение  $\Lambda(y_m)$ , возникшее при дифференцировании последней суммы в (77), есть разностный аналог дифференциального оператора в уравнении (53a). Поэтому система (78) аппроксимирует также задачу регуляризации в форме уравнения Эйлера (53), причем выражения  $\Lambda(y_0)$  и  $\Lambda(y_M)$  учитывают краевые условия (53в).

## ЗАДАЧИ

1. Показать, что интегральное уравнение

$$(\beta - \alpha)x + (b\alpha - a\beta) - (b - a)u(x) = \\ = (x - a) \int_x^b (b - \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + (b - x) \int_a^x (\xi - a) f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (79)$$

эквивалентно краевой задаче для дифференциального уравнения

$$u''(x) = f(x, u), \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

2. Записать уравнение (79) в каноническом виде (1); найти выражение для ядра  $K(x, \xi, u)$ .

3. Для уравнения Вольтерра (7) составить разностную схему и полный алгоритм вычисления разностного решения, используя формулу трапеций с равномерным шагом.

4. Для двумерного уравнения Фредгольма (6) составить разностную схему, используя в качестве кубатурной формулы произведение одномерных формул Гаусса.

5. В методе последовательных приближений для уравнения (6) выразить  $u_n(x)$  через  $u_1(x)$  при помощи рекуррентного соотношения (16).

6. Доказать, что из соотношения (20) следует оценка (21).

7. Учитывая, что уравнение (23) имеет вырожденное ядро, а) найти его точное решение; б) сделать то же для  $f(x) = \sin x$ .

8. В уравнении (23) так подобрать правую часть  $f(x)$ , чтобы при  $\lambda = 2$  существовало решение.

9. Доказать утверждение, сформулированное в § 1, п. 5, замечании 1.

10. Для задачи сглаживания функции  $u(x) = f(x)$  написать уравнение и краевые условия вариационной регуляризации с  $n = 2$ . Обсудить влияние  $n$  на погрешность сглаживания вблизи границ, для простоты полагая  $p_n(x) = 1$  и  $p_k(x) = 0$  при  $k < n$ .

11. Регуляризовать задачу  $p$ -кратного дифференцирования  $u(x) = f^{(p)}(x)$ , используя запись этой задачи в виде интегрального уравнения

$$\frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{p-1} u(\xi) d\xi = f(x). \quad (80)$$

12. Аппроксимировать разностной схемой краевую задачу для уравнения Эйлера (53); сравнить ее с разностной схемой (78).

13. Составить разностную схему для регуляризации однократного дифференцирования, если  $f(x)$  задана а) на равномерной сетке, б) на неравномерной сетке.