

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Глава XIII посвящена разностным схемам для уравнений в частных производных гиперболического типа. В § 1 рассмотрено гиперболическое уравнение второго порядка — волновое уравнение, которое можно заменить эквивалентной системой двух уравнений первого порядка. На примере одномерной задачи подробно разобраны явные и неявные разностные схемы решения этих уравнений. Дано обобщение этих схем на случай любого числа измерений.

В § 2 рассмотрены одномерные уравнения газодинамики, являющиеся гиперболической системой квазилинейных уравнений первого порядка. Построены две однородные разностные схемы («крест» и неявная консервативная схема), дающие хорошие результаты при решении многих прикладных задач. Приведен вид псевдовязкости, используемый в этих схемах.

## § 1. Волновое уравнение

**1. Схема «крест».** К гиперболическим уравнениям приводят задачи колебания струны, движения сжимаемого газа, распространения возмущений электромагнитных полей и многие другие.

Типичным примером одномерной задачи является задача малых колебаний натянутой струны с распределенной по длине нагрузкой  $f(x, t)$ :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T; \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad u_t(x, 0) = \mu_2(x), \quad 0 < x < a; \quad (1б)$$

$$u(0, t) = \mu_3(t), \quad u(a, t) = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1в)$$

(это же уравнение описывает плоские акустические волны в газе при наличии внешнего силового поля  $f$ ). Краевые условия первого рода (1в) соответствуют заданному закону движения концов струны; возможны и другие типы краевых условий.

Заметим, что, в отличие от параболической задачи (11.1), гиперболическая задача (1) требует постановки двух начальных условий: не только начального смещения от положения равновесия  $u$ , но и начальной скорости вещества  $u_t$ .

Составим несложную и эффективную разностную схему для задачи (1). Выберем по  $x, t$  прямоугольную сетку, для простоты

равномерную, и возьмем изображенный на рис. 91 шаблон. Аппроксимируя прозводные разностями, получим трехслойную схему

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y}_n - 2y_n + \check{y}_n) = \frac{c^2}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + f_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (2a)$$

с граничными условиями

$$y_0 = \mu_3(t), \quad y_N = \mu_4(t). \quad (2б)$$

По форме шаблона эту схему называют «крест». Исследуем ее.

Вычисление решения. На нулевом слое решение известно из начального условия

$$y_n^0 = \mu_1(x_n), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3)$$

На первом слое решение также можно вычислить по начальным данным. Простейший способ состоит в том, что полагают

$$\frac{1}{\tau} (y_n^1 - y_n^0) \approx u_t(x_n, 0) = \mu_2(x_n), \quad (4a)$$

$$1 \leq n \leq N-1.$$

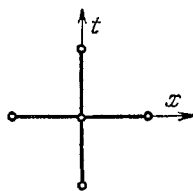


Рис. 91.

Более хорошие результаты дает использование следующего члена разложения:

$$\frac{1}{\tau} (y_n^1 - y_n^0) \approx u_t(x_n, 0) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_n, 0);$$

выражение для  $u_{tt}$  в это соотношение надо подставить из уравнения (1a). Окончательно получим

$$y_n^1 = y_n^0 + \tau \mu_2(x_n) + \frac{\tau^2}{2} \left[ c^2 \frac{d^2 \mu_1(x_n)}{dx^2} + f(x_n, 0) \right], \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (4б)$$

где  $\mu_{1xx}$  можно заменить второй разностью.

Схема (2a) явная и позволяет выразить  $\hat{y}_n$  через значения  $y$  с двух предыдущих слоев. Поэтому, начиная со второго слоя, разностное решение вычисляется по этой схеме.

Описанный алгоритм показывает, что, после того как выбрана одна из начальных формул (4a, б), разностное решение существует и единственно.

Аппроксимация. Разложим точное решение по формуле Тейлора с центром в узле  $(x_n, t_m)$ , предполагая наличие непрерывных четвертых производных:

$$u_{n \pm 1}^m = u \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx},$$

$$u_n^{m \pm 1} = u \pm \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} \pm \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + \frac{\tau^4}{24} u_{tttt}.$$

Используя эти разложения, легко найдем невязку схемы (2а):

$$\psi = u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{1}{\tau^2} (u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}) + \\ + \frac{c^2}{h^2} (u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) = -\frac{\tau^2}{12} u_{tttt} + \frac{c^2 h^2}{12} u_{xxxx} = O(\tau^2 + h^2), \quad (5)$$

и невязку начального условия (4а):

$$\psi = \mu_1(x_n) - \frac{1}{\tau} (u_n^1 - u_n^0) = -\frac{\tau}{2} u_{tt} = O(\tau), \quad (6a)$$

или начального условия (4б):

$$\psi = \mu_2(x_n) + \frac{\tau}{2} \left( c^2 \frac{\partial^2 \mu_1(x_n)}{\partial x^2} + f_n \right) - \frac{1}{\tau} (u_n^1 - u_n^0) = -\frac{1}{6} \tau^2 u_{ttt} = O(\tau^2). \quad (6b)$$

Начальное условие (3) и краевые условия (2б) аппроксимируются точно.

Таким образом, схема (2) — (3) с начальным условием (4б) имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ . Использование начального условия (4а) ухудшает аппроксимацию до  $O(\tau + h^2)$ .

Устойчивость исследуем методом разделения переменных, полагая в схеме (2а)

$$f = 0, \quad y_n = e^{iqx_n}, \quad \hat{y} = \rho_q y, \quad y = \rho_q \hat{y}. \quad (7)$$

Для множителя роста гармоники получим квадратное уравнение

$$\rho_q^2 - 2\rho_q \left( 1 - 2 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2} \right) + 1 = 0. \quad (8)$$

По теореме Виета произведение его корней  $\rho_q' \rho_q'' = 1$ . Значит, условие устойчивости  $|\rho_q| \leq 1$  может быть выполнено, если  $|\rho_q'| = |\rho_q''| = 1$ . Для уравнения с действительными коэффициентами (8) это означает, что корни образуют комплексно сопряженную пару; для этого дискриминант уравнения не должен быть положительным:

$$\left| 1 - 2 \left( \frac{c\tau}{h} \sin \frac{qh}{2} \right)^2 \right| \leq 1.$$

Чтобы это неравенство выполнялось для любых гармоник, необходимо и достаточно соблюдение условия Куранта:

$$c\tau < h. \quad (9)$$

Таким образом, схема «крест» условно устойчива.

Замечание 1. Если  $c\tau = h$ , то для некоторых гармоник  $\lambda_q$  становится кратным корнем уравнения (8). Это приводит к слабой неустойчивости счета: амплитуда этих гармоник при  $\tau \rightarrow 0$

растет, как  $m = (t/\tau)$ . Поэтому в условии Куранта (9) стоит строгое неравенство.

**Сходимость.** Из сказанного выше следует, что схема (2) с начальными условиями (3), (4б) при выполнении условия Куранта (9) сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Из наших рассуждений вытекает сходимость схемы в  $\|\cdot\|_{L_2}$ ; но методом энергетических неравенств можно доказать, что сходимость равномерная.

Схема (2) обеспечивает хорошую точность расчета решений  $u(x, t)$ , имеющих непрерывные четвертые производные. Она позволяет рассчитывать менее гладкие и даже разрывные решения, хотя в последнем случае точность расчетов невелика и обычно возникает легкая «разболтка», связанная с немонотонностью схемы. Условие устойчивости (9) естественное, поскольку для получения хорошей точности тоже надо полагать  $\sigma\tau \sim h$ . Поэтому схему «крест» часто используют для практических расчетов.

**Замечание 2.** Схема (2) написана для случая постоянных шагов  $h$  и  $\tau$ . Если шаги переменные, то надо заменить производные по пространству и времени соответствующими выражениями (3.2), которые обеспечивают локальную аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$  только в случае квазиравномерных сеток по  $x$  и  $t$ .

Поэтому для трехслойных схем, в отличие от двуслойных, резкие смены шага  $\tau_m$  в ходе расчета опасны: это может привести к ухудшению точности.

**Замечание 3.** Для задач с краевыми условиями первого рода  $u_\Gamma = \mu(t)$  удобно выбирать сетку так, чтобы узлы  $x_0$  и  $x_N$  были концами отрезка  $[0, a]$ . Если же на одном из концов задано краевое условие второго рода

$$u_x(a, t) = \mu(t), \quad (10)$$

то целесообразно полагать  $x_{N-1} = a - 1/2h$ ,  $x_N = a + 1/2h$ , чтобы граница была полуцелой точкой. Тогда естественное разностное краевое условие

$$\frac{1}{h}(y_N - y_{N-1}) = \mu(t) \quad (11)$$

обеспечивает аппроксимацию  $O(h^2)$ . Такой выбор сетки полезен и для других типов уравнений.

**2. Неявная схема.** Если схема условно устойчива, то случайное небольшое нарушение условия устойчивости может привести к быстрому нарастанию погрешностей, вплоть до «авостов» при расчетах на ЭВМ. Поэтому многие вычислители предпочитают использовать безусловно устойчивые неявные схемы.

Построим хорошую неявную схему для задачи (1). Возьмем изображенный на рис. 92 шаблон и составим схему с весами при

пространственных производных на разных слоях:

$$\frac{1}{\tau^2} (\dot{y} - 2y + \ddot{y}) = \Lambda [\sigma \dot{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \ddot{y}] + f, \quad (12)$$

$$\Lambda y_n = \frac{c^2}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1});$$

чтобы все веса были неотрицательны, следует брать  $0 \leq \sigma \leq 1/2$ . В граничных узлах решение определяется из краевых условий (26).

Исследуем построенную схему. Значения решения на нулевом и первом слоях вычисляются, как и в п. 1, по формулам (3) и (46). На остальных слоях схема (12) с краевыми условиями (26) образует относительно  $\dot{y}$  линейную систему уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой диагональные элементы преобладают; решение этой системы существует, единственно и вычисляется методом прогонки.

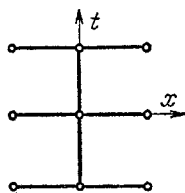


Рис. 92.

Разложением решения по формуле Тейлора нетрудно установить, что на решениях с непрерывными четвертыми производными схема (12) аппроксимирует уравнение (1а) с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$  при любом  $\sigma$ .

Устойчивость проверяется методом разделения переменных. Делая подстановку (7), получим для множителя роста квадратное уравнение

$$\rho_q^2 - 2\alpha_q \rho_q + 1 = 0, \quad \alpha_q = \frac{1 - 2(1 - 2\sigma)\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2}, \quad \beta_q = \frac{c\tau}{h} \sin \frac{qh}{2}. \quad (13)$$

На основании тех же рассуждений, что и в п. 1, можно сделать следующий вывод: устойчивость будет только при комплексно сопряженных корнях, т. е. при  $|\alpha_q| \leq 1$ . Отсюда вытекает условие устойчивости схемы:

$$\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 (1 - 4\sigma) \leq 1. \quad (14)$$

Из неравенства (14) видно, что при  $\sigma \geq 1/4$  схема (12) безусловно устойчива. Если  $\sigma < 1/4$ , то схема условно устойчива при  $c\tau \leq h(1 - 4\sigma)^{-1/2}$ .

Таким образом, при выборе веса  $1/4 \leq \sigma \leq 1/2$  неявная схема (12) безусловно сходится с точностью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Замечание 1. Схема (12) при  $\sigma = 0$  переходит в схему «крест», а условие устойчивости (14) — в условие Куранта (9).

Замечание 2. Обобщим неявную схему (12) на случай задачи с переменной скоростью звука:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad k(x, t) \equiv c^2(x, t) > 0, \quad (15)$$

где коэффициенты  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$  переменны и кусочно-непрерывны вместе со своими вторыми производными, причем разрывы неподвижны (т. е. лежат на линиях  $x = \text{const}$ ). Предполагается, что на этих разрывах выполняются условия сопряжения  $[u] = 0$ ,  $[ku_x] = 0$ .

Выберем по  $t$  равномерную сетку, а по  $x$  — специальную неравномерную сетку (у которой все точки разрыва коэффициентов являются узлами). Построим аналог наилучшей консервативной схемы (11.34), используя во всех пространственных операторах значения  $k(x, t)$  со среднего слоя:

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = \Lambda [\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}] + \varphi,$$

$$\Lambda y_n(t) = \frac{1}{\hbar_n} \left[ \kappa_{n+1/2}(t_m) \frac{y_{n+1}(t) - y_n(t)}{h_n} - \kappa_{n-1/2}(t_m) \frac{y_n(t) - y_{n-1}(t)}{h_{n-1}} \right],$$

$$t = t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \quad h_n = x_{n+1} - x_n, \quad \hbar_n = \frac{1}{2} (h_n + h_{n-1}),$$

$$\kappa_{n+1/2}(t_m) = \left[ \frac{1}{\hbar_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x, t_m)} \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2\tau \hbar_n} \int_{t_{m-1}}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx.$$

Известно, (см. [30]), что при сделанных предположениях (и достаточно гладких начальных и граничных данных) эта схема равномерно сходится со скоростью  $O(\tau^2 + \max h_n^2)$ , если выполнено условие устойчивости (14).

Из схемы (16) нетрудно получить схемы для гладких и для постоянных коэффициентов на произвольных неравномерных по  $x$  сетках. В случае  $k = \text{const}$  и равномерной сетки схема (16) совпадает со схемой (12).

3. Двуслойная акустическая схема. Уравнение второго порядка (1а) можно заменить эквивалентной ему парой уравнений первого порядка. Для этого введем потенциалы скоростей и правой части:

$$v(x, t) = \int_0^x u_t(\xi, t) d\xi, \quad F(x, t) = \int_0^x f(\xi, t) d\xi. \quad (17)$$

Функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  удовлетворяют системе уравнений акустики

$$u_t = v_x, \quad v_t = c^2 u_x + F(x, t). \quad (18a)$$

Начальные условия (16) с учетом (17) примут вид

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad v(x, 0) = \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi, \quad (18б)$$

а граничные условия (1в) останутся без изменения:

$$u(0, t) = \mu_3(t), \quad u(a, t) = \mu_4(t). \quad (18в)$$

Задача акустики (18) нередко оказывается более удобной для численного решения, чем волновое уравнение (1); в частности, она позволяет построить двухслойные разностные схемы, допускающие неравномерную сетку по  $t$ .

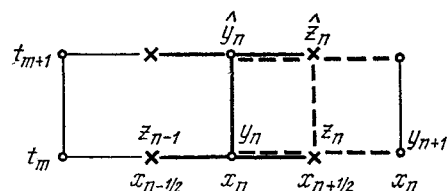


Рис. 93.

Неявная схема. Будем рассматривать в узлах неравномерной пространственной сетки величины  $y_n \approx u(x_n, t)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , а в серединах интервалов — величины  $z_n \approx v(x_{n+1/2}, t)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ . Возьмем шаблон, изображенный на рис. 93, и составим на нем схему с весами

$$\frac{1}{\tau} (\hat{z}_n - z_n) = \frac{c^2}{h_n} [\sigma_1 (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) + (1 - \sigma_1) (y_{n+1} - y_n)] + \varphi_n, \quad (19a)$$

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{h_n} [\sigma_2 (\hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}) + (1 - \sigma_2) (z_n - z_{n-1})], \quad (19б)$$

$$h_n = x_{n+1} - x_n, \quad \hat{h}_n = \frac{1}{2} (h_n + h_{n-1});$$

подразумевается, что  $0 \leq \sigma_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \sigma_2 \leq 1$ . Исследуем эту схему, подробно останавливаясь только на наиболее важных деталях и для простоты ограничиваясь равномерной по  $x$  сеткой.

Схема (19) составлена симметрично по переменной  $x$ , если положить  $\varphi_n = F(x_{n+1/2}, t)$ ; поэтому нетрудно сообразить, что она имеет аппроксимацию  $O(\tau + h^2)$ . Если взять  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$  и  $\varphi_n = F(x_{n+1/2}, t_m + \tau/2)$ , то схема становится вдобавок симметричной по времени и приобретает аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Устойчивость исследуем методом разделения переменных, рассматривая возмущения функций  $y$  и  $z$  в виде гармоник

$$y_n = \alpha e^{iqx_n}, \quad z_n = \beta e^{iqx_n}, \quad \hat{y}_n = \rho y_n, \quad \hat{z}_n = \rho z_n, \quad (20)$$

с одной и той же частотой и множителем роста, но с разными амплитудами  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставляя (20) в (19) и полагая  $\varphi_n = 0$ , получим для амплитуд систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\rho - 1)\alpha - \frac{1}{h}(\sigma_2\rho + 1 - \sigma_2)(1 - e^{-iqh})\beta &= 0, \\ \frac{c^2}{h}(\sigma_1\rho + 1 - \sigma_1)(e^{iqh} - 1)\alpha - \frac{1}{\tau}(\rho - 1)\beta &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы она имела нетривиальное решение, ее определитель должен обращаться в нуль. Это дает квадратное уравнение для нахождения множителей роста  $\rho$ :

$$\varepsilon\rho^2 - 2\mu\rho + \nu = 0; \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + 2\gamma_q\sigma_1\sigma_2 \geq 1, & \mu &= 1 - \gamma_q(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2), \\ \nu &= 1 + 2\gamma_q(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \geq 1, & \gamma_q &= 2\left(\frac{c\tau}{h}\sin\frac{qh}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (22b)$$

Оба корня уравнения (22a) меньше единицы по модулю тогда и только тогда, если

$$\nu \leq \varepsilon, \quad 2|\mu| \leq \varepsilon + \nu. \quad (23)$$

Первое из этих неравенств очевидно, поскольку по теореме Виета  $\rho_1'\rho_2'' = \nu/\varepsilon$ ; второе доказывается несложными, но громоздкими выкладками. Неравенства (23) выполняются для всех гармоник только в том случае, если

$$\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1, \quad \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2(2\sigma_1 - 1)(2\sigma_2 - 1) \geq -1, \quad (24)$$

что является условием устойчивости схемы (19). При выполнении этого условия схема сходится со скоростью, соответствующей порядку аппроксимации.

Из неравенств (24) вытекает, что если  $\sigma_1 \geq 1/2$  и  $\sigma_2 \geq 1/2$ , то схема (19) безусловно устойчива. Если  $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$ , но один из весов меньше  $1/2$ , то схема условно устойчива при

$$c\tau \leq h\sqrt{(2\sigma_1 - 1)(1 - 2\sigma_2)}. \quad (25)$$

Если  $\sigma_1 + \sigma_2 < 1$ , то схема безусловно неустойчива.

Рассмотрим два частных случая схемы (19).

Явная схема. Положим  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ ; тогда схема (19) принимает вид

$$\frac{1}{\tau}(\hat{z}_n - z_n) = \frac{c^2}{h}(y_{n+1} - y_n) + F_{n+1/4}^{m+1/2}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (26a)$$

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{h}(\hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (26b)$$

и становится явной. В самом деле, величины  $\hat{z}_n$  явно выражаются из уравнения (26a) через значения величин на исходном слое.



После того, как вычислены все значения  $\hat{z}_n$ , можно найти  $\hat{y}^n$  также по явным формулам (26б).

Из (25) следует, что схема (26) устойчива при выполнении условия Куранта  $\sigma\tau < h$ .

Заметим, что схема (26) является схемой типа «крест». В самом деле, будем считать, что величина  $z_n \approx v(x_{n+1/2}, t_m)$  сдвинута на полшага по  $x$ , а величина  $y_n \approx u(x_n, t_{m+1/2})$  — на полшага по  $t$  относительно узлов сетки (рис. 94). Тогда этой схеме соответствует шаблон из двух крестов, показанных на рисунке жирными линиями.

Зададим согласованные с этим шаблоном граничные данные:

$$y_0^m = \mu_3(t_{m+1/2}), \quad y_N^m = \mu_4(t_{m+1/2}), \quad (26в)$$

и начальные данные, уточненные аналогично (4б), где надо вместо  $\tau$  взять  $\tau/2$ :

$$y_n^0 = \mu_1(x_n) + \frac{\tau}{2} \mu_2(x_n) + \frac{\tau^2}{8} \left[ c^2 \frac{d^2 \mu_1(x_n)}{dx^2} + f(x_n, 0) \right],$$

$$z_n^0 = \int_{x_0}^{x_{n+1/2}} \mu_2(\xi) d\xi. \quad (26г)$$

Тогда схема (26) при выполнении условия Куранта  $\sigma\tau < h$  сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Симметричная схема. Положим  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$ ; тогда схема (19) является безусловно устойчивой и сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h^2)$ . Эта схема двуслойна, поэтому она позволяет произвольно менять шаг  $\tau$  в ходе расчета, обеспечивая при этом точность  $O(\max \tau_m^2)$ . Кроме того, поскольку значения  $y^0$  и  $z^0$  соответствуют моменту  $t=0$ , начальные данные для расчета берут непосредственно из постановки задачи (18):

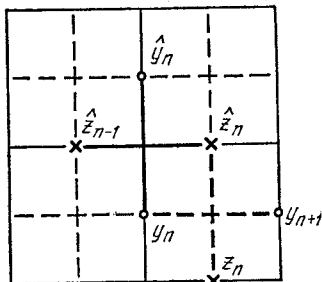


Рис. 94.

$$y_n^0 = \mu_1(x_n), \quad z_n^0 = \int_{x_0}^{x_{n+1/2}} \mu_2(\xi) d\xi, \quad (27)$$

без каких-либо сдвигов по времени; такая аппроксимация начальных условий является точной.

Однако при любых значениях весов  $\sigma_1, \sigma_2$  (если только один из них не равен нулю) схема (19) неявна. Рассмотрим, как целесообразно вычислять разностное решение в этом случае. Определим  $\hat{z}_n$  из уравнения (19а) и напишем аналогичное выражение для  $\hat{z}_{n-1}$ . Подставляя эти выражения в (19б) и полагая

для простоты  $h = \text{const}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = & \frac{\tau c^2}{h^2} \sigma_2 [\sigma_1 (\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}) + \\ & + (1 - \sigma_1) (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})] + \frac{1}{h} (z_n - z_{n-1}) + \\ & + \frac{\tau}{h} \sigma_2 (\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad 1 \leq n \leq N - 1 \quad (\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2). \end{aligned} \quad (28)$$

Это линейная система относительно неизвестных  $\hat{y}$ , имеющая трехдиагональную матрицу с преобладанием диагональных элементов; ее решение легко вычисляется прогонкой. Найдя  $\hat{y}$ , нетрудно определить  $\hat{z}$  по явным формулам (19а).

Таким образом, симметричная схема (19) приводит к несложному вычислительному алгоритму, безусловно устойчива и имеет хорошую точность. Она является одной из лучших схем для расчета задач акустики. По аналогии с ней строятся надежные однородные схемы расчета газодинамических и других сложных задач.

**З а м е ч а н и е 1.** Разностное решение схемы (19) можно, вообще говоря, вычислять методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \hat{z}_n^{(s)} = & z_n + \frac{c^2 \tau}{h} [\sigma_1 (\hat{y}_{n+1}^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)}) + (1 - \sigma_1) (y_{n+1} - y_n)] + \varphi_n, \\ \hat{y}_n^{(s+1)} = & y_n + \frac{\tau}{h} [\sigma_2 (\hat{z}_n^{(s)} - \hat{z}_{n-1}^{(s)}) + (1 - \sigma_2) (z_n - z_{n-1})]. \end{aligned} \quad (29)$$

Однако это эквивалентно применению последовательных приближений к решению системы (28), когда в левой ее части берется  $\hat{y}^{(s+1)}$ , а в правой —  $\hat{y}^{(s)}$ . Этот метод, записанный в форме  $\hat{y}^{(s+1)} = C \hat{y}^{(s)} + \psi$ , сходится при  $\|C\| < 1$ . Выбирая одну из норм:

$$\|C\| = \max_n \left( \sum_k |C_{nk}| \right) = 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sigma_1 \sigma_2,$$

получим для сходимости итераций условие типа Куранта:

$$c\tau \leq \frac{h}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}. \quad (30)$$

Поэтому метод последовательных приближений невыгодно применять к вычислению разностного решения безусловно устойчивых схем.

**З а м е ч а н и е 2.** Для задач с разрывными или недостаточно гладкими решениями нередко используют чисто неявную схему (19) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , поскольку она подавляет «разболтку» счета. Однако на достаточно гладких решениях эта схема существенно уступает по точности симметричной схеме.

**4. Инварианты.** Рассмотрим запись системы уравнений акустики через *инварианты*:

$$r(x, t) = v - cu, \quad s(x, t) = v + cu. \quad (31)$$

Умножая первое из уравнений (18а) на  $c$ , прибавим его ко второму уравнению (18а) и вычтем. Получим систему уравнений, которым удовлетворяют инварианты:

$$r_t + cr_x = F(x, t), \quad s_t - cs_x = F(x, t). \quad (32а)$$

Из соотношений (18б) нетрудно получить для инвариантов начальные условия:

$$r(x, 0) = \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi - c\mu_1(x), \quad s(x, 0) = \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi + c\mu_1(x), \quad (32б)$$

а из соотношений (18в) — краевые условия:

$$(s - r)_{x=0} = \frac{c}{2} \mu_3(t), \quad (s - r)_{x=a} = \frac{c}{2} \mu_4(t). \quad (32в)$$

Видно, что инвариант  $r(x, t)$  удовлетворяет уравнению переноса вправо (т. е. с положительной скоростью), а инвариант  $s(x, t)$  — уравнению переноса влево. В случае однородной задачи ( $F = \mu_3 = \mu_4 = 0$ ) величины  $r, s$  переносятся по соответствующим характеристикам без изменения, с чем и связано их название.

Для инвариантов можно составить разностные схемы, аналогичные схемам бегущего счета для уравнения переноса. Шаблон каждой схемы должен учитывать направление характеристики соответствующего уравнения. Простейшей будет явная схема:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{r}_n - r_n) + \frac{c}{h}(r_n - r_{n-1}) = F_n, \quad \frac{1}{\tau}(\hat{s}_n - s_n) - \frac{c}{h}(s_{n+1} - s_n) = F_n. \quad (33)$$

Она действительно является схемой бегущего счета, и организация вычислений здесь почти такая же, как для одномерного уравнения переноса. Нетрудно показать, что при выполнении условия  $c\tau \leq h$  эта схема устойчива, монотонна и равномерно сходится с порядком точности  $O(\tau + h)$  на дважды непрерывно дифференцируемых решениях.

Счет по неявным схемам типа (10.10)—(10.12) уже не будет бегущим: для развязки счета надо знать граничное значение инварианта на новом слое, а оно выражается через то значение другого инварианта, которое считается последним. Поэтому для определения инвариантов получается линейная система с матрицей специального вида, схематически изображенного на рис. 95. Такая система решается методом исключения; экономные формулы исключения для этого случая называются формулами циклической прогонки (см. [83] и дополнение к [30]).

Схемы для инвариантов можно переписать в терминах исходных переменных. Так, складывая и вычитая уравнения (33), получим для внутренних точек области

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) - \frac{1}{2h} (z_{n+1} - z_{n-1}) &= \frac{c}{2h} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}), \\ \frac{1}{\tau} (\hat{z}_n - z_n) - \frac{c^2}{2h} (y_{n+1} - y_{n-1}) &= \frac{c}{2h} (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) + F_n. \end{aligned} \quad (34)$$

Каждое из уравнений (34) содержит члены, соответствующие явной схеме (6) для уравнения теплопроводности с коэффициентом  $k = ch/2$ . Отсюда понятно, что исходная схема (33) будет хорошо сглаживать разрывы начальных данных, т. е. иметь аппроксимационную вязкость. Условие устойчивости явной схемы (6)  $2k\tau \leq h^2$  совпадает с условием устойчивости исходной схемы.

Схемы в инвариантах обладают многими достоинствами. Однако широкого распространения они не получили, потому что их нелегко обобщить на нелинейные задачи.

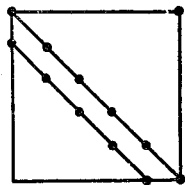


Рис. 95.

**5. Явная многомерная схема.** Волновое уравнение в  $p$ -мерной изотропной среде (либо в неизотропной среде, если у тензора упругости отличны от нуля только диагональные компоненты) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha} u + f(\mathbf{x}, t), \\ A_{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in G. \end{aligned} \quad (35a)$$

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения (35a) с начальными условиями и с краевыми условиями первого рода:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, 0) &= \mu_1(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \mu_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \\ u(\mathbf{x}, t)_{\Gamma(G)} &= \mu_3(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (35b)$$

Обычно многомерные разностные схемы составляют непосредственно для задачи (35). В принципе, можно заменить уравнение (35a) системой уравнений первого порядка; однако это менее выгодно, чем в одномерном случае.

Схема «крест» строится аналогично одномерной схеме (2) на шаблоне, вид которого для двух измерений показан на рис. 96. При произвольном числе измерений эта схема для уравнения (35a) имеет вид

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y + f; \quad (36)$$

в случае переменных коэффициентов операторы  $\Lambda_\alpha$  выбираются аналогично наилучшей консервативной схеме (16).

Схема (36) — явная трехслойная; организация вычислений по ней одинаково проста при любом числе измерений. Нетрудно проверить, что она имеет аппроксимацию  $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2\right)$ . Ее устойчивость можно исследовать методом разделения переменных, подставляя в (36) многомерную гармонику:

$$y = \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^p q_\alpha x_\alpha\right), \quad \hat{y} = \rho y, \quad y = \rho \hat{y}. \quad (37)$$

Учитывая, что

$$\Lambda_\alpha y \rightarrow -4 \frac{k_\alpha}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{q_\alpha h_\alpha}{2}, \quad (38)$$

получим для множителя роста квадратное уравнение

$$\rho^2 - 2(1 - 2\gamma)\rho + 1 = 0, \quad \gamma = \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{k_\alpha}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{q_\alpha h_\alpha}{2}.$$

Это уравнение аналогично одномерному уравнению (8); анализ его корней показывает, что схема (36) устойчива при выполнении условия

$$\tau < \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{k_\alpha}{h_\alpha^2}\right)^{-1/2} \sim \frac{h}{\sqrt{pk(x, t)}}, \quad (39)$$

являющегося обобщением условия Куранта (9). Это естественное условие, а точность схемы неплохая. Поэтому схему «крест» используют в расчетах, если не требуется особенно высокой надежности («безавостности») вычислений.

Таким образом, численный расчет многомерных задач акустики не вызывает принципиальных затруднений.

**6. Факторизованные схемы.** В «больших задачах», где небольшое нарушение условия устойчивости любого из разностных уравнений в ходе расчета легко приводит к «авостам»

ЭВМ, целесообразно использовать безусловно устойчивые многомерные экономичные схемы, несмотря на то что они сложнее явных схем.

Для гиперболических уравнений локально-одномерные схемы имеют сравнительно громоздкий и искусственный вид. Более удобны в данном случае факторизованные схемы (схемы с расщеплением); рассмотрим их.

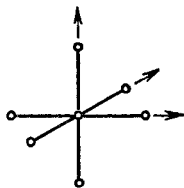


Рис. 96.

Исходная схема. Для многомерной задачи (35) рассмотрим аналог неявной схемы с весами (12), который будем называть *исходной* схемой:

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} [\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}] + f, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}; \quad (40)$$

операторы  $\Lambda_{\alpha}$  — трехточечные и вычисляются по формуле (16). Эта схема симметрична по пространству и времени, поэтому легко видеть, что она имеет аппроксимацию  $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2\right)$  при любых значениях веса  $\sigma$ . Методом разделения переменных можно показать, что при  $\sigma \geq 1/4$  схема (40) безусловно устойчива.

Однако исходная схема, которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right) \hat{y} = \\ = \left[2E + \tau^2 (1 - 2\sigma) \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right] y - \left(E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right) \check{y} + \tau^2 f, \end{aligned} \quad (41)$$

содержит на верхнем слое выражение

$$B \hat{y}, \quad \text{где } B = E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}. \quad (42)$$

Оператору  $B$ , встречающемуся (почти в той же форме) в схеме (11.68) для многомерного уравнения теплопроводности, соответствует ленточная матрица типа, изображенного на рис. 89 (гл. XII, § 2, п. 3). Решение линейной системы (41) не сводится к одномерным прогонкам, и оператор  $B$  оказывается труднообратимым. Поэтому исходная схема (40) неэкономична.

Факторизованная схема. Оператор (42) можно приближенно заменить факторизованным оператором

$$\begin{aligned} C \equiv \prod_{\alpha=1}^p (E - \tau^2 \sigma \Lambda_{\alpha}) = \\ = E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} + \tau^4 \sigma^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=1+\alpha}^p \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} + \dots = B + O(\tau^4), \end{aligned} \quad (43)$$

т. е. приближенно расщепить  $B$  на произведение одномерных операторов. Заметим, что перестановочности операторов  $\Lambda_{\alpha}$  для этого не требуется. Заменяя в исходной схеме (41) оператор  $B$

на  $C$ , получим факторизованную схему:

$$\prod_{\alpha=1}^p (E - \tau^2 \sigma \Lambda_{\alpha}) \hat{y} = \\ = \left[ 2E + \tau^2 (1 - 2\sigma) \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} \right] y - \left( E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} \right) \check{y} + \tau^2 f, \quad (44)$$

отличающуюся от исходной. Исследуем ее.

**Аппроксимация.** Преобразуя факторизованную схему (44) к форме типа (40) и учитывая соотношение (43), получим

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = \\ = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} [\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y}] + f - \tau^2 \sigma^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=1+\alpha}^p \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} \hat{y} + \dots,$$

что отличается от схемы (40) на члены  $O(\tau^2)$ . Поскольку исходная схема (40) имеет второй порядок аппроксимации, то факторизованная схема (44) также имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + \sum h_{\alpha}^2)$ .

**Устойчивость** исследуем методом разделения переменных, подставляя в (44) многомерную гармонику (37). С учетом соотношения (38) получим для множителя роста квадратное уравнение

$$\varepsilon \rho^2 - 2\mu \rho + \nu = 0; \quad (45a)$$

$$\varepsilon = \prod_{\alpha} (1 + 2\sigma \gamma_{\alpha}) \geq 1, \quad \mu = 1 - (1 - 2\sigma) \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}, \\ \nu = 1 + 2\sigma \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \geq 1, \quad \gamma_{\alpha} = 2 \frac{k_{\alpha} \tau^2}{h_{\alpha}^2} \left( \sin \frac{q_{\alpha} h_{\alpha}}{2} \right)^2 \geq 0. \quad (45b)$$

Уравнение (45a) аналогично уравнению (22a); поэтому оба его корня не превышают единицы по модулю только в том случае, если выполняются неравенства (23):

$$\nu \leq \varepsilon, \quad 2|\mu| \leq \varepsilon + \nu.$$

Первое из этих неравенств для коэффициентов (45b) всегда справедливо. Второе неравенство заменим несколько более жестким требованием  $|\mu| \leq \nu$ ; нетрудно проверить, что оно выполняется при

$$\tau^2 (1 - 4\sigma) \sum_{\alpha=1}^p \frac{k_{\alpha}}{h_{\alpha}^2} \leq 1. \quad (46)$$

Это и есть достаточное условие устойчивости схемы (44). В частности, если  $\sigma \geq 1/4$ , то условие (46) выполняется при любых шагах  $\tau$ ,  $h_{\alpha}$  и схема является безусловно устойчивой.

Безусловная сходимость факторизованной схемы (44) со скоростью  $O(\tau^2 + \sum h_{\alpha}^2)$  при  $1/4 \leq \sigma \leq 1/2$  следует из сказанного выше.

Вычисление разностного решения сводится к последовательности одномерных прогонок по всем направлениям  $x_{\alpha}$ . В самом деле, факторизованный оператор  $S$  есть произведение одномерных трехточечных операторов  $E - \tau^2 \sigma \Lambda_{\alpha}$ , а каждый такой оператор обращается одномерной прогонкой. Тем самым, схема (44) экономична.

Таким образом, для многомерных задач акустики факторизацией удается построить безусловно устойчивые экономичные схемы, сходящиеся со скоростью  $O(\tau^2 + \sum h_{\alpha}^2)$ .

## § 2. Одномерные уравнения газодинамики

**1. Лагранжева форма записи.** Одномерные уравнения газодинамики являются хорошим приближением для описания ряда интересных задач: плоского течения сжимаемого газа в трубе, взрыва сферического или длинного цилиндрического заряда в газе, кумулятивных эффектов в мишенях при управляемом термоядерном синтезе (в последней задаче существенна также теплопроводность и другие эффекты) и т. д. Мы рассмотрим простые, но эффективные разностные схемы решения уравнений газодинамики без теплопроводности \*).

Уравнения газодинамики могут записываться в различных формах — эйлеровой и лагранжевой. В эйлеровой форме производные по времени выражают изменение величин в данной точке пространства, а в лагранжевой — изменение характеристик данной материальной точки. Эти производные связаны соотношением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s + (v \nabla).$$

Если нас интересуют параметры потока в заданной пространственной области (течение газа в трубе), то естественно выбрать эйлеровы координаты. Если нам нужно исследовать поведение некоторой массы вещества, то целесообразно применение лагранжевых координат. Особенно выгодны лагранжевы координаты для задач в слоистых средах, потому что они позволяют легко следить за границами раздела различных сред.

Большинство одномерных задач относится ко второму типу (в многомерном случае это не так). Поэтому здесь мы рассмотрим только уравнения газодинамики в лагранжевых координатах.

\*) Уравнения газодинамики и исследование простейших газодинамических течений приведены, например, в [11, 19], а более подробное изложение методов решения — в [27, 28, 34].



Сначала запишем их в такой форме, когда производная по времени лагранжева, а пространственные координаты — обычные:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (47)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = 0, \quad (48)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (49)$$

здесь  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление и  $\varepsilon(p, \rho)$  — внутренняя энергия единицы массы, зависимость которой от давления и плотности считается известной.

Уравнение (48) выражает закон сохранения импульса и во всех численных расчетах используется именно в такой форме. Уравнение изменения энергии (49) обычно удобнее преобразовать. Если подставить в него  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ , определенную из уравнения (47), то получим особенно простую форму записи:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0. \quad (50a)$$

Если умножить уравнение (48) на  $\mathbf{v}$  и прибавить к уравнению (49), то получим другую форму — закон сохранения полной энергии:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \operatorname{div} (p\mathbf{v}) = 0. \quad (50b)$$

Уравнение неразрывности (47) выражает закон сохранения массы. Его тоже обычно преобразуют, но уже после приведения уравнений к одномерной записи.

В том, что указанные уравнения являются законами сохранения, нетрудно убедиться. Например, проинтегрируем (50b) по объему  $dV$ , занятому некоторой массой вещества, второй интеграл преобразуем к поверхностному, а в первом интеграле заменим  $\rho dV$  на  $dm$ , после чего производную по времени можно вынести за знак интеграла. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dm + \oint p\mathbf{v} dS = 0.$$

Здесь первый интеграл есть полная (внутренняя и кинетическая) энергия данной массы газа; второй равен работе в единицу времени сил давления на поверхности, ограничивающей данную массу газа. Действительно, это закон сохранения энергии.

Одномерные задачи бывают трех типов: с плоской, цилиндрической или сферической симметрией. Введем показатель симметрии  $\nu$ , равный для этих случаев соответственно 0, 1 или 2. Масса слоя толщиной  $dr$  в этих случаях равна (рис. 97)

$$dm = \rho r^\nu dr \quad (51)$$

с точностью до численного множителя, равного 1,  $2\pi$  или  $4\pi$ . При помощи соотношения (51) введем массовую координату данной материальной точки:

$$m(r) = \int_{r_0}^r \rho(\xi) \xi^v d\xi. \quad (52)$$

По закону сохранения вещества массовая координата материальной точки не меняется со временем; поэтому такая координата позволяет легко следить за каждой частицей вещества и, в частности, за границей раздела слоев.

Преобразуем уравнения газодинамики в одномерном случае к лагранжевой форме. В качестве первого уравнения возьмем определение скорости:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v. \quad (53)$$

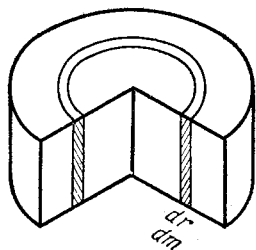


Рис. 97.

Уравнение неразрывности (47), выражающее закон сохранения массы, заменим имеющим тот же смысл соотношением (51), записывая следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial m} (r^{v+1}) = \frac{v+1}{\rho}. \quad (54)$$

В уравнениях импульса (48) и энергии (50б) перейдем к производной по массовой координате, то есть в одномерных выражениях

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\text{div} = r^{-v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v \dots)$$

заменяем  $\partial r$  на  $\partial m$  при помощи соотношения (51), и получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + r^v \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial m} (r^v v p) = 0. \quad (56a)$$

Уравнение энергии можно взять также в форме (50а):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0. \quad (56б)$$

Система (53)—(56) является лагранжевой формой записи уравнений одномерной газодинамики. В большинстве численных расчетов используется эта именно форма.

**2. Псевдовязкость.** Уравнения (53)—(56) составляют гиперболическую квазилинейную систему. Из курса газодинамики известно, что среди ее решений есть сильные разрывы — ударные волны. В главе IX мы видели, что для разностного расчета таких решений надо изменять уравнения, вводя в них специально подобранные диссипативные члены.

В газодинамике такие члены удается найти из физических соображений. Дело в том, что уравнение газодинамики сравнительно грубо описывают поведение газа. Эти уравнения выводятся из кинетического уравнения Больцмана для функции распределения молекул. Если при выводе учесть эффекты диффузии молекул, то в уравнениях газодинамики появятся так называемые вязкие члены. Например, уравнение импульса (48) примет вид (см. [19])

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \operatorname{grad} p + \eta \Delta v + \zeta \operatorname{grad} \operatorname{div} v, \quad \zeta > \frac{1}{3} \eta > 0, \quad (57)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  являются коэффициентами физической вязкости. Учет физической вязкости приводит к изменению качественного характера решения: плоские ударные волны превращаются в аналитические решения, в которых скачки сглажены и имеют эффективную ширину порядка длины свободного пробега молекул. Качественно это легко понять на примере плоского течения, где уравнение (57) принимает форму

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = (\eta + \zeta) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (58)$$

напоминающую уравнение теплопроводности; видно, что вязкий член должен сглаживать разрывы решения.

Обычно в численных расчетах довольствуются только вторым вязким членом в уравнении (57) и считают коэффициент  $\zeta$  слабо меняющимся. Тогда этот член можно объединить с давлением:

$$- \operatorname{grad} p + \zeta \operatorname{grad} \operatorname{div} v \approx - \operatorname{grad} (p - \zeta \operatorname{div} v), \quad (59)$$

и рассматривать величину

$$\omega_1 = - \zeta \operatorname{div} v \quad (60)$$

как вязкое давление. При этом в уравнение энергии вместо обычного давления также ставят величину  $p + \omega_1$ , называя ее полным давлением.

Вязкость  $\omega_1$  называется *линейной*. Она приводит к «размазыванию» ударной волны со скачком скорости  $\delta v$  на интервал

$$\delta r \approx \frac{8\zeta}{(\gamma + 1) \rho \delta v}, \quad (61)$$

где  $\gamma$  — показатель политропы вещества. Физический коэффициент вязкости очень мал и дает ничтожно малое сглаживание. Для расчетов по разностным схемам необходимо сглаживание на несколько интервалов сетки. Поэтому в численных расчетах величину  $\zeta$  приходится увеличивать на много порядков по сравнению с ее физическим значением.

Для численных расчетов необходимо введение вязкости лишь в окрестности ударных волн. Но вязкий член в (59) присутствует во всех точках пространства. Поскольку в численных расчетах коэффициент  $\zeta$  выбирается много больше физического коэффициента, то наличие псевдовязкости, помимо положительного эффекта — сглаживания разрывов, — приводит к отрицательному — внесению заметной погрешности.

Чтобы уменьшить эту погрешность, Нейман и Рихтмайер [72] предложили выбирать коэффициент псевдовязкости большим в окрестности скачков скорости  $\delta v$  и малым в зонах гладких течений, где скорости соседних точек близки. Для этого они положили

$$\zeta = \zeta_0 |\operatorname{div} \mathbf{v}|, \quad (62)$$

где  $\zeta_0$  — коэффициент, небольшой по величине. Такая псевдовязкость называется *квадратичной*, потому что она приводит к вязкому давлению:

$$\omega_2 = -\zeta_0 (\operatorname{sign} \operatorname{div} \mathbf{v}) \cdot (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (63)$$

Переписывая (62) в виде  $\zeta \approx \zeta_0 (\delta v / \delta r)$  и подставляя в (61), нетрудно убедиться, что квадратичная псевдовязкость сглаживает скачок  $\delta v$  любой интенсивности на один и тот же интервал:

$$\delta r \approx \sqrt{\frac{8\zeta_0}{(\gamma+1)\rho}}. \quad (64)$$

Обычно коэффициент псевдовязкости  $\zeta_0$  выбирают так, чтобы  $\delta r$  равнялось 2—3 шагам разностной сетки.

В главе X, § 2 было проведено строгое исследование квадратичной псевдовязкости на примере простейшего квазилинейного уравнения (10.44); при этом для зоны сглаживания сильного разрыва было получено выражение (10.51)—(10.52), сходное с (64).

Линейная вязкость приводит к монотонным (или почти монотонным) разностным решениям, так как ей соответствуют аналитические точные решения, которые хорошо аппроксимируются разностными схемами; зато фронты скачков при этом сильно сглажены. Квадратичная вязкость приводит к более крутым фронтам; но ей соответствуют точные решения с разрывами первой или второй производной, поэтому разностное решение немонотонно вблизи слабых и сильных разрывов. Нередко используют комби-

нацию линейной и квадратичной вязкости  $\omega = \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2$  с экспериментально подобранными коэффициентами.

Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\rho^{-1} (\partial \rho / \partial t)$ , то вязкое давление положительно при сжатии и отрицательно при разрежении вещества. Сильными разрывами являются только ударные волны, поэтому для сглаживания разрывов можно вводить вязкость только при сжатиях. При  $(\partial \rho / \partial t) < 0$  присутствие псевдовязкости не обязательно и даже уменьшает точность расчета. Поэтому обычно полагают

$$\omega = \begin{cases} -\zeta_1 \operatorname{div} \mathbf{v} + \zeta_0 (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 & \text{при } \operatorname{div} \mathbf{v} < 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{div} \mathbf{v} \geq 0. \end{cases} \quad (65)$$

Этот вид псевдовязкости независимо предложен рядом авторов (см. [27]).

**3. Схема «крест».** Это наиболее простая и довольно точная однородная разностная схема счета газодинамики. Ее шаблон приведен на рис. 98; значения радиусов приписываются узлам сетки, значения скорости — границам пространственных интервалов на полуцелых слоях, а значения плотности, давления и внутренней энергии — серединам интервалов на целых слоях.

Построение схемы напоминает акустический «крест». Для простоты записи выберем равномерные по массе и времени шаги  $m$  и  $\tau$  и аппроксимируем систему (53) — (56б) следующими разностными уравнениями:

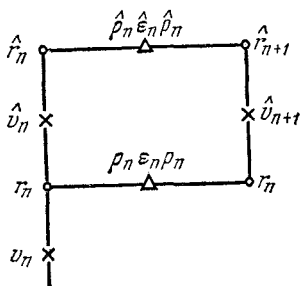


Рис. 98.

$$\hat{v}_n = v_n + \frac{\tau}{m} (g_{n-1} - g_n) r_n^v, \quad (66a)$$

$$g = p + \omega,$$

$$\hat{r}_n = r_n + \tau \hat{v}_n, \quad (66б)$$

$$\hat{\rho}_n = \frac{(v+1)m}{\hat{r}_{n+1}^v - \hat{r}_n^v}, \quad (66в)$$

$$\hat{\epsilon}_n = \epsilon_n + \frac{1}{2} (\hat{g}_n + g_n) \left( \frac{1}{\hat{\rho}_n} - \frac{1}{\rho_n} \right). \quad (66г)$$

Эти уравнения записаны в том порядке, который удобен для вычислений.

Обсудим разностное выражение для вязкого давления (65). Чтобы выполнить предельный переход от разностной схемы к уравнениям газодинамики, надо сначала устремить  $\tau$  и  $m$  к нулю при фиксированном коэффициенте вязкости, а затем построить серию таких предельных решений для неограниченно уменьшающихся значений  $\zeta$ . Но это очень трудоемко. Поэтому на практике объединяют эти предельные переходы в один общий, полагая  $\zeta_0 = \mu_0 \rho (\delta r)^2$  и  $\zeta_1 = \mu_1 \rho \delta r$ , хотя законность такой процедуры не

доказана (плотность введена в формулу для того, чтобы коэффициенты  $\mu_n$  были безразмерны). Таким образом, вязкое давление (65) принимает вид

$$\omega_n = \mu_0 \rho_n (v_{n+1} - v_n)^2 - \mu_1 c \rho_n (v_{n+1} - v_n) \quad \text{при } v_{n+1} - v_n < 0, \quad (67a)$$

$$\omega_n = 0 \quad \text{при } v_{n+1} - v_n \geq 0. \quad (67b)$$

где  $c \approx \sqrt{dp/d\rho}$  — скорость звука. Выражение (67) написано для плоского случая; но обычно им пользуются при любой симметрии задачи.

Аппроксимация. Из вида шаблона на рис. 98 и симметричного написания схемы (66) нетрудно заметить, что на течениях без сжатий, когда псевдовязкость (67) обращается в нуль, схема «крест» имеет локальную аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ .

На течениях со сжатиями (в том числе — с ударными волнами) псевдовязкость отлична от нуля. Правда, квадратичный член в (67a) имеет величину  $O(h^2)$ ; но линейный член имеет величину  $O(h)$  и, тем самым, ухудшает порядок аппроксимации. Кроме того, вязкие члены записываются не вполне симметрично по времени. В итоге аппроксимация ухудшается до  $O(\tau + h)$ .

Нахождение разностного решения. Схема (66) — явная; вычисления по ней проводятся следующим образом. Пусть все величины на исходном слое известны. Тогда из разностного уравнения импульса (66a) находим  $\hat{v}_n$  во всех интервалах; затем из второго уравнения (66б) определяем  $\hat{r}_n$ , а из уравнения (66в) —  $\hat{\rho}_n$ .

Последним решается уравнение энергии (66г). Формально оно является неявным алгебраическим уравнением для определения  $\hat{\varepsilon}_n(\hat{\rho}_n, \hat{r}_n)$  в данном интервале. Но при каждом значении индекса  $n$  уравнения (66г) решаются независимо, не образуя связанной системы уравнений, так что разностная схема, по существу, остается явной.

Замечание 1. Уравнение энергии в (66) можно сделать явным, используя в нем только значение  $g_n$  с исходного слоя:

$$\hat{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + g_n \left( \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\hat{\rho}_n} \right). \quad (68)$$

Это несколько упрощает расчет, не влияет на устойчивость, но заметно ухудшает точность, так как погрешность аппроксимации становится  $O(\tau + h^2)$  даже на гладких течениях. Такой вариант используется редко.

Устойчивость схемы можно исследовать методом разделения переменных, линеаризируя схему и замораживая коэффициенты. Громоздкие выкладки приводят к условию устойчивости типа Куранта. Например, на гладких течениях с нулевой вязко-

стью схема устойчива при

$$\frac{\tau}{\Delta r} \leq \rho \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\rho / \left[p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_p\right]}, \quad V = \frac{1}{\rho}. \quad (69)$$

Для идеального газа  $\varepsilon = pV/(\gamma - 1)$  и условие (69) принимает вид  $c\tau \leq \Delta r$ , где  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$  есть адиабатическая скорость звука. На течениях с ненулевой вязкостью ограничение на шаг несколько более сильное; при квадратичной вязкости условие устойчивости принимает вид

$$\frac{\tau}{\Delta r} \leq \rho \sqrt{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} / \left(p + \omega + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)} (V\sqrt{1+\theta} + V\sqrt{\theta})^{-1}, \quad (70)$$

$$\theta = 4(\mu_0 \rho \Delta v)^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right) / \left(p + \omega + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right) \approx (2\mu_0 \Delta v/c)^2,$$

где  $\Delta v$  — скачок скорости на ударной волне. Хотя это исследование не является строгим, тем не менее данное условие устойчивости хорошо подтверждается на практике.

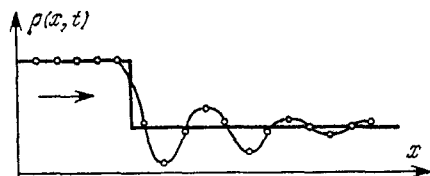


Рис. 99.

Таким образом, «крест» — условно устойчивая схема. Отметим любопытное обстоятельство. Для расчета гладких течений вязкость не нужна. А если рассчитать без вязкости ударную волну (выбирая небольшое  $\tau/\Delta r$ , удовлетворяющее условию

(70)), то получим «разболтку», изображенную на рис. 99. Этот расчет устойчив, поскольку амплитуда колебаний не возрастает со временем. Но сходимости к физически правильному решению при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  нет, так как на разрыве потеряна аппроксимация.

Сходимость газодинамической схемы «крест» не доказана. Однако эта схема успешно используется в расчетах примерно с 1950 г. и проверена на многих трудных задачах с известными точными решениями. При стремлении шагов к нулю наблюдалась сходимость к правильному решению, если шаги удовлетворяли условию устойчивости.

Замечание 2. Схема (66) неконсервативна; однако ее дисбаланс стремится к нулю при  $\tau = \text{const} \cdot h \rightarrow 0$ .

Замечание 3. Газодинамические задачи с очень тонкими слоями особенно трудны для расчета. В самом деле, если  $r_{n+1} \approx r_n$ , то для вычисления  $\rho_n$  с удовлетворительной точностью по формуле (66в) надо знать радиусы с очень высокой точностью, сравнимой с ошибками округления на ЭВМ. В подобных задачах иногда приходится вести расчет с двойным числом знаков или специально видоизменять разностную схему.

**4. Неявная консервативная схема.** Есть ряд задач, в которых локальная скорость звука в некоторых участках много больше скорости наиболее важных физических процессов. В таких задачах условие Куранта слишком сильно ограничивает шаг и выгоднее использовать абсолютно устойчивые схемы.

Составим неявную схему. Припишем все сеточные величины целым слоям по времени и выберем шаблон, изображенный на рис. 100. Аппроксимируем консервативную систему (53)—(56а) следующими разностными уравнениями:

$$\hat{v}_n = v_n + \frac{\tau}{m} \hat{r}_n^v (\hat{g}_{n-1} - \hat{g}_n), \quad g = p + w; \quad (71a)$$

$$\hat{r}_n = r_n + \tau \hat{v}_n; \quad (71b)$$

$$\hat{\rho}_n = (\nu + 1) m / (\hat{r}_{n+1}^{\nu+1} - \hat{r}_n^{\nu+1}); \quad (71b)$$

$$\hat{w}_n = \mu_0 \hat{\rho}_n (\hat{v}_{n+1} - \hat{v}_n)^2 \text{ при } \hat{v}_{n+1} < \hat{v}_n, \text{ иначе } \hat{w}_n = 0; \quad (71r)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_n + \frac{1}{4} (\hat{v}_{n+1}^2 + \hat{v}_n^2) &= \varepsilon_n + \frac{1}{4} (v_{n+1}^2 + v_n^2) + \\ &+ \frac{\tau}{2m} [\hat{r}_n^v \hat{v}_n (\hat{g}_{n-1} + \hat{g}_n) - \hat{r}_{n+1}^v \hat{v}_{n+1} (\hat{g}_n + \hat{g}_{n+1})]. \end{aligned} \quad (71d)$$

Это — консервативная схема. Первые два уравнения взяты чисто неявными для хорошего подавления «разболтки» счета. Уравнение энергии симметрично по времени; чисто неявным его брать невыгодно, поскольку при этом точность расчета заметно ухудшается.

Вычисление разностного решения здесь существенно сложнее, чем для явной схемы (66). Аналогично задачам акустики (§ 1, п. 3, замечание 1) можно показать, что применять метод последовательных приближений для решения всей цепочки уравнений (71a)—(71d) невыгодно: итерации сходятся при выполнении условия  $ct \lesssim \Delta r$ , что лишает неявную схему всех ее преимуществ.

Поэтому систему (71) линеаризируют и, как в задачах акустики, преобразуют к форме, решаемой прогонкой. Рассмотрим ход решения в случае разных режимов газодинамических течений, для простоты ограничиваясь плоским случаем ( $\nu = 0$ ).

**Изотермический случай.** Если температура вещества постоянна\*), то давление  $p = p(T, \rho)$  зависит только от плотности. При этом уравнение энергии (56) становится излишним,

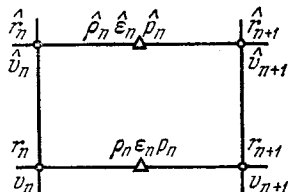


Рис. 100.

\*) Это приближение справедливо в случае очень высоких температур, когда тепловые потоки настолько велики, что практически мгновенно выравнивают температуру во всех точках пространства.



поскольку система (53)—(55) при заданной зависимости  $p(\rho)$  полностью определяет решение. Соответственно в численном расчете следует ограничиться уравнениями (71a)—(71г).

Положим  $\hat{v}_n = \hat{v}_n^{(s)} + \delta\hat{v}_n$ . Подставляя это выражение в уравнение (71a) и линеаризируя это уравнение относительно приращений всех величин на новом слое, получим

$$\hat{v}_n^{(s)} + \delta\hat{v}_n = v_n + \frac{\tau}{m} (\hat{g}_{n-1}^{(s)} - \hat{g}_n^{(s)}) + \frac{\tau}{m} \left[ \left( \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{\rho}} \right)_{n-1} \delta\hat{\rho}_{n-1} - \left( \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{\rho}} \right)_n \delta\hat{\rho}_n \right]. \quad (72)$$

Из уравнений (71в) и (71б) найдем вариации

$$\delta\hat{\rho}_n = -m (\delta\hat{r}_{n+1} - \delta\hat{r}_n) / (\hat{r}_{n+1} - \hat{r}_n)^2, \quad \delta\hat{r}_n = \tau \delta\hat{v}_n. \quad (73)$$

Подставляя их в (72), получим для определения  $\delta\hat{v}$  линейную систему с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} \kappa_{n-1} \delta\hat{v}_{n-1} - (1 + \kappa_{n-1} + \kappa_n) \delta\hat{v}_n + \kappa_n \delta\hat{v}_{n+1} = \\ = \hat{v}_n^{(s)} - v_n - \frac{\tau}{m} (\hat{g}_{n-1}^{(s)} - \hat{g}_n^{(s)}), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\kappa_n = \left( \frac{\tau}{\hat{r}_{n+1}^{(s)} - \hat{r}_n^{(s)}} \right)^2 \left( \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{\rho}} \right)_n^{(s)} > 0,$$

решаемую прогонкой.

Пренебрегая пока вязкостью (т. е. полагая  $g = p$ ), организуем вычисления следующим образом. Выберем в качестве нулевого приближения

$$\hat{r}_n^{(0)} = r_n, \quad \hat{v}_n^{(0)} = v_n, \quad \hat{\rho}_n^{(0)} = \rho_n, \quad \hat{g}_n^{(0)} = p_n. \quad (75)$$

Затем определим из уравнений (74) значения  $\delta\hat{v}$ , а по ним при помощи уравнений (71в), (71б) найдем

$$\hat{v}_n^{(s+1)} = \hat{v}_n^{(s)} + \delta\hat{v}_n, \quad \hat{r}_n^{(s+1)} = r_n + \tau \hat{v}_n^{(s+1)}, \quad \hat{\rho}_n^{(s+1)} = \frac{m}{\hat{r}_{n+1}^{(s+1)} - \hat{r}_n^{(s+1)}}. \quad (76)$$

Это позволяет вычислить  $\hat{g}_n^{(s+1)} = p(\hat{\rho}_n^{(s+1)})$  и выполнить следующую итерацию.

Сходимость итерационного процесса (74), (76) исследована в [34]. Этот процесс является ньютоновским; поэтому он сходится, если начальное приближение (75) недалеко отстоит от корня, т. е. если шаг  $\tau$  не слишком велик. Это приводит к некоторому ограничению на  $\tau$ ; однако, как показано в [34], такое ограничение несравненно слабее, чем условие Куранта. Имеются примеры успешных численных расчетов задач с тонкими слоями, в которых шаг  $\tau$  в  $10^5$  раз превышал значение, допускаемое локальным критерием Куранта (69).

Включение вязкости (71г) можно провести двумя способами. В первом способе линеаризация выполняется так, как описано выше, а к давлению добавляется вязкий член, взятый с предыдущей итерации:

$$\hat{g}_n^{(s)} = p(\hat{\rho}_n^{(s)}) + \mu_0 \hat{\rho}_n^{(s)} (\hat{v}_{n+1}^{(s)} - \hat{v}_n^{(s)})^2. \quad (77)$$

Это означает, что вязкость включена в итерационный процесс методом последовательных приближений. Такой способ прост, но ухудшает сходимость итераций: уменьшает скорость сходимости и усиливает ограничение на шаг  $\tau$ , хотя не слишком сильно.

Второй способ — полная линеаризация — сложнее, но надежнее. Линеаризируя уравнение (71а), учтем зависимость  $\hat{g}$  не только от  $\hat{\rho}$ , но и непосредственно от  $\hat{v}$  через вязкость (71г):

$$\delta \hat{g}_n = \frac{\partial (\hat{p}_n + \hat{w}_n)}{\partial \hat{\rho}_n} \delta \hat{\rho}_n + \frac{\partial \hat{w}_n}{\partial \hat{v}_{n+1}} \delta \hat{v}_{n+1} + \frac{\partial \hat{w}_n}{\partial \hat{v}_n} \delta \hat{v}_n. \quad (78)$$

При этом вместо (72) и (74) получаются более громоздкие выражения, которые мы не приводим. Однако такой процесс является чисто ньютоновским и хорошо сходится.

Неизотермический случай требует включения в итерационный процесс уравнения энергии (71д), что часто делают способом *двухкруговых итераций* (последовательных прогонок).

Сначала считаем энергию  $\hat{\epsilon}_n$  (или температуру) известной во всех точках нового слоя. Тогда в каждой точке  $p(\hat{\epsilon}_n, \hat{\rho}_n) = p_n(\hat{\rho}_n)$ , т. е. применимы формулы изотермического случая (74), (76); по ним проводят *первый малый круг* итераций.

Когда эти итерации сойдутся, полученные значения  $\hat{r}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{\rho}$  подставляют в уравнение энергии (71д). Неизвестными в нем остаются значения  $\hat{\epsilon}$ ; их можно определить, линеаризируя уравнение (71д) с учетом зависимости  $p(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} \hat{v}_{n+1} \theta_{n+1} \delta \hat{\epsilon}_{n+1} + (1 + \hat{v}_{n+1} \theta_n - \hat{v}_n \theta_n) \delta \hat{\epsilon}_n - \hat{v}_n \theta_{n-1} \delta \hat{\epsilon}_{n-1} = \\ = \epsilon_n - \hat{\epsilon}_n^{(s)} + \frac{1}{4} (v_{n+1}^2 - v_n^2) - \frac{1}{4} (\hat{v}_{n+1}^2 - \hat{v}_n^2) + \\ + \frac{\tau}{2m} [\hat{v}_n (\hat{g}_{n-1}^{(s)} + \hat{g}_n^{(s)}) - \hat{v}_{n+1} (\hat{g}_n^{(s)} + \hat{g}_{n+1}^{(s)})], \quad \theta_n = \frac{\tau}{2m} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\epsilon}} \right)_n^{(s)}. \end{aligned} \quad (79)$$

Итерации (79) образуют *второй малый круг*. На каждой итерации трехточечное уравнение (79) решается прогонкой.

Найденные значения  $\hat{\epsilon}_n$  передают в уравнения (74), (76) и снова проводят первый малый круг итераций и т. д. Это взаимное согласование уравнений импульса и энергии составляет *большой круг итераций*.

Обычно считают нормальным, если малые круги сходятся за 3—5 итераций, а большой круг — за 2—3. Большее число итераций указывает на целесообразность уменьшения шага  $\tau$ .

**Замечание.** Можно провести итерации в один круг, если полностью линеаризовать систему (71), считая  $\hat{p} = p(\hat{\epsilon}, \hat{\rho})$ . Однако при этом получаются существенно более громоздкие уравнения в вариациях, для решения которых надо применять матричную прогонку (см. дополнение к [30]).

**Устойчивость.** Методом разделения переменных в линейном приближении можно показать, что схема (71) безусловно устойчива. Таким образом, шаг  $\tau$  ограничивает только условие сходимости итераций при решении нелинейной системы (71).

**Аппроксимация и сходимость.** Схема (71) не симметрична по  $t$  и поэтому даже на гладких течениях имеет аппроксимацию  $O(\tau + h^2)$ . Тем самым, на гладких течениях схема «крест» может оказаться более точной.

Однако при расчете течений с ударными волнами и другими особенностями неявная схема дает существенно лучшие результаты, чем схема «крест». Поэтому она широко применяется в практике вычислений, особенно в «больших задачах».

Сходимость схемы (71) строго не доказана, но многократно проверена на сложных задачах-тестах с известными точными решениями.

**5. О других схемах.** Схемы (66) и (71) являются однородными. Имеется много близких к ним алгоритмов, отличающихся деталями написания отдельных членов разностных схем или другой организацией итерационных процессов решения нелинейных разностных уравнений. Из них следует отметить *полностью консервативные* схемы, в которых автоматически выполняются разностные законы сохранения не только массы, импульса и полной энергии, но также законы сохранения энтропии и внутренней энергии. В настоящее время построены полностью консервативные схемы для задач одномерной газодинамики в лагранжевых и эйлеровых переменных, задач магнитной газодинамики и двумерных газодинамических течений (подробнее см. в [34]).

Есть иначе построенные однородные схемы. Из них отметим схему *распада разрыва*. Она составлена так, что в акустическом приближении \*) переходит в явную схему бегущего счета для инвариантов (33), обладающую хорошей аппроксимационной вязкостью. Благодаря этому схема позволяет рассчитывать любые разрывы без введения псевдовязкости.

В акустическом приближении схема распада разрыва монотонна; в газодинамике на сильных ударных волнах возможна немонотонность, хотя фактически она невелика. Схема имеет аппроксимацию  $O(\tau + h)$ , поэтому для расчета гладких течений она невыгодна. Но фронты ударных волн она воспроизводит хорошо, с малым сглаживанием.

Схема распада разрыва — явная и имеет ограничение на шаг типа  $D\tau \leq \Delta r$ , где  $D$  — скорость ударной волны. Это ограничение, а также громоздкость схемы препятствуют широкому ее применению.

\*) Если  $p, \rho, \epsilon$  лишь слабо колеблются около равновесных значений, то уравнения газодинамики переходят в уравнения акустики (см., например, [40]).

Помимо однородных схем существуют схемы с явным выделением особенностей, в которых точно прослеживается движение всех сильных и слабых разрывов. Одна такая схема предложена и подробно описана в [87]. Но такие схемы очень сложны, и их применяют только в тех случаях, когда требуется особенно высокая точность расчета.

### ЗАДАЧИ

1. Составить схему «крест» для задачи (1) при неравномерных сетках по  $x$  и  $t$  и исследовать аппроксимацию схемы.
2. Найти невязку схемы (12).
3. Для волнового уравнения (1) составить схему с весом  $\sigma$  на шаблоне рис. 101 и провести исследование этой схемы; показать, что при  $\sigma < 1/2$  схема безусловно неустойчива, при  $\sigma \geq 1/2$  — безусловно устойчива и при  $\sigma > 1/2$  обладает аппроксимационной вязкостью.
4. Установить аппроксимацию схемы (19).
5. Проверить исследование устойчивости схемы (19), данное в § 1, п. 3.
6. Доказать, что схема (26) имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ .
7. Составить схему типа «крест» для задачи (18), приписывая значения  $y_n$  узлам сетки, а  $z_n$  — центрам ячеек  $x_{n+1/2}$ ,  $t_{m+1/2}$ ; написать для нее начальные данные точности  $O(\tau^2 + h^2)$ .
8. Провести полное исследование схемы (33).
9. Рассмотреть, как в схеме (33) вычисляется разностное решение в граничных узлах.
10. Вывести формулы циклической прогонки для случая матрицы, изображенной на рис. 95.
11. Исследовать устойчивость многомерной схемы с весами (40).
12. Провести полную линейризацию системы (71a) — (71г) для случая изотермической газодинамики с учетом вязкости и свести задачу к решению трехточечного уравнения относительно  $\delta \hat{v}$ .

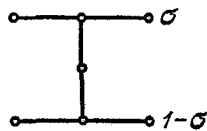


Рис. 101.