

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Глава XI посвящена численному решению уравнений параболического типа. В § 1 рассмотрены одномерные задачи, начиная от случая простейшего уравнения с постоянными коэффициентами и кончая квазилинейным уравнением с разрывными коэффициентами в криволинейных координатах. Разобраны основные разностные схемы, используемые для решения таких задач.

В § 2 обсуждены принципиальные трудности, возникающие при переходе к случаю многих измерений; изложены продольно-поперечная прогонка, дающая хорошие результаты при решении задач с двумя пространственными переменными, и локально-одномерный метод, пригодный при любом числе измерений.

§ 1. Одномерные уравнения

1. Постановки задач. К параболическим уравнениям приводят задачи теплопроводности, диффузии и ряд других. Типичной полной постановкой одномерной задачи является, например, первая краевая задача для случая линейной теплопроводности в однородной среде:

$$\left. \begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + f(x, t), \\ k = \text{const} > 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1б)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Она включает в себя задание самого уравнения, начальных данных на некотором отрезке и краевых условий на обоих концах этого отрезка.

Наиболее хорошо изучены линейные задачи, в которых и уравнение и краевые условия линейны. Для таких задач рассматривают три типа краевых условий. Условия первого рода (2) применительно к уравнению теплопроводности означают, что на границах задана зависимость температуры u от времени. Условия второго рода

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(a, t) = \mu_2(t) \quad (3)$$

соответствуют заданию тепловых потоков через границы. Условия третьего рода

$$u(0, t) + \alpha_1 u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) + \alpha_2 u_x(a, t) = \mu_2(t) \quad (4)$$

возникают, если на границах имеется линейный (ньютоновский) теплообмен с окружающей средой. Для задачи (1) с краевыми условиями (2), (3) или (4) корректность постановки доказана (см., например, [40]).

Часто встречаются и нелинейные задачи. Например, в главе IX было рассмотрено квазилинейное уравнение (9.9), связанное с задачами теплопроводности в плазме. Краевые условия также могут быть нелинейными; так, остывание черного тела за счет излучения с поверхности приводит к краевому условию

$$(u^4 + \alpha u_x)_{x=0} = 0.$$

В главе IX отмечалась важная качественная особенность решений параболических уравнений: разрывы начальных данных сглаживаются с течением времени.

Другое любопытное свойство следует из вида функции точечного источника на бесконечной прямой для линейного уравнения (1)*:

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4kt} \right]. \quad (5)$$

Если $t > 0$, то $G(x, \xi, t) > 0$ при сколь угодно больших x и ξ . Следовательно, при $t > 0$ температура в каждой точке x зависит от начальных данных во всех точках ξ бесконечной прямой, сколь угодно удаленных от x . Поэтому говорят, что в случае линейной теплопроводности скорость распространения тепла и область влияния бесконечны.

Строго говоря, параболическое уравнение лишь приближенно описывает процесс теплопроводности. На самом деле скорость распространения тепла конечна и не превышает (при молекулярной или электронной теплопроводности) тепловой скорости частиц. Влияние же удаленных точек, как видно из выражения для функции Грина (5), ослабевает очень быстро; отрезку времени Δt соответствует характерная зона влияния $\Delta x \sim \sqrt{k\Delta t}$.

Эти соображения надо учитывать при построении разностных схем, поскольку, как отмечалось в главе X, правильный учет зоны влияния необходим для устойчивости схемы.

2. Семейство неявных схем. Рассмотрим простейшие, но хорошие разностные схемы для уравнения теплопроводности (1)

*) Вывод этой формулы см., например, в [40].

с постоянным коэффициентом:

$$u_t = ku_{xx} + f, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T \quad (k = \text{const} > 0).$$

Возьмем в области $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$ прямоугольную сетку (рис. 76), для простоты равномерную, с шагами h и τ . Выберем шеститочечный шаблон, изображенный на рисунке жирными линиями, и составим на нем следующую двуслойную схему:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{k\sigma}{h^2} (\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + \frac{k(1-\sigma)}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \Phi_n, \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (\sigma = \text{const}). \quad (6a)$$

Здесь записано меньше уравнений, чем имеется неизвестных \hat{y}_n . Недостающие два уравнения находим из краевых условий; например, краевые условия первого рода (2) дают соотношения

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}). \quad (6б)$$

В качестве правой части Φ_n часто выбирают значение $\Phi_n = f(x_n, t_m + \tau/2)$.

Схема (6а, б) содержит параметр σ ; он является весовым множителем при пространственной производной с верхнего слоя. Поэтому (6а, б) есть однопараметрическое семейство схем. Меняя вес σ , можно добиться улучшения тех или иных свойств схемы.

Исследуем схему (6а, б).

Существование решения и его вычисление. Если $\sigma = 0$, то схема (6) переходит в рассмотренную ранее явную схему (9.18). Разностное решение при этом легко вычисляется, его существование и единственность очевидны.

Если $\sigma \neq 0$, то схема (6) существенно неявна. Перепишем ее в следующем виде:

$$\hat{y}_{n-1} - \left(2 + \frac{h^2}{k\tau\sigma}\right) \hat{y}_n + \hat{y}_{n+1} = \left(2 \frac{1-\sigma}{\sigma} - \frac{h^2}{k\tau\sigma}\right) y_n - \frac{1-\sigma}{\sigma} (y_{n-1} + y_{n+1}) - \frac{h^2}{k\sigma} \Phi_n, \quad 1 \leq n \leq N-1; \quad (7)$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t + \tau), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t + \tau).$$

На каждом слое уравнения (7) образуют линейную систему с неизвестными \hat{y}_n , $0 \leq n \leq N$. Система (7) имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки. При $\sigma > 0$ решение существует и единственно, а прогонка устойчива, ибо диагональный член матрицы (7) преобладает: его модуль больше суммы модулей недиагональных членов.

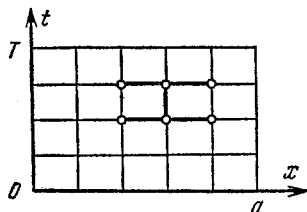


Рис. 76.

Таким образом, при $\sigma \geq 0$ решение разностной схемы (6) существует и единственно при любых ограниченных начальных и краевых данных и правой части. Это решение легко вычисляется, причем за небольшое число действий.

З а м е ч а н и е 1. При $\sigma = 1$ схема (6) использует только четыре точки шаблона и называется *чисто неявной*. При $\sigma = 1/2$ схему называют схемой с *полусуммой* или *симметричной* (имеется в виду симметрия по времени, ибо схема (6) симметрична по пространству при любом σ).

А п п р о к с и м а ц и я. Разложим решение в узлах шаблона рис. 76 по формуле Тейлора, выбирая за центр разложения точку $(x_n, t + \tau/2)^*$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n+1} = & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} + h \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u = \bar{u} + \frac{\tau}{2} u_t + h u_x + \\ & + \frac{\tau^2}{8} u_{tt} + \frac{\tau h}{2} u_{tx} + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^3}{48} u_{ttt} + \frac{\tau^2 h}{8} u_{ttx} + \\ & + \frac{\tau h^2}{4} u_{txx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{\tau^4}{384} u_{tttt} + \frac{\tau^3 h}{48} u_{tttx} + \\ & + \frac{\tau^2 h^2}{16} u_{ttxx} + \frac{\tau h^3}{12} u_{txxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где все производные отнесены к центру разложения. Разложение для \hat{u}_{n-1} получается из (8) изменением знака h , разложение для u_{n+1} — изменением знака τ ; для определения \hat{u}_n надо в (8) положить $h = 0$ и т. д. Подставляя эти разложения в выражение невязки схемы (6а), получим

$$\begin{aligned} \Psi_n = & (u_t - k u_{xx} - f)_{x=x_n}^{t+\tau/2} - \frac{1}{\tau} (\hat{u}_n - u_n) + \\ & + \frac{k\sigma}{h^2} (\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + \frac{k(1-\sigma)}{h^2} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + \varphi_n = \\ & = k\tau \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) u_{txx} + \frac{\tau^2}{8} \left(k u_{ttxx} - \frac{1}{3} u_{ttt} \right) + \\ & + \frac{kh^2}{12} u_{xxxx} + \varphi_n - \bar{f}_n + o(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда видно, что если положить $\varphi_n = \bar{f}_n \equiv f(x_n, t + \tau/2)$, то при $\sigma \neq 1/2$ схема (6) имеет аппроксимацию $O(\tau + h^2)$; симметричная схема с $\sigma = 1/2$ имеет более хорошую аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$.

* Для обозначения середины временного шага будем часто употреблять запись $F(x, t + \tau/2) = \bar{F}(x)$.

Надо проверить аппроксимацию не только уравнения, но и начальных и краевых условий. Начальное условие (16) и крайние условия первого рода (2) мы аппроксимировали точно, положив $y_n^0 = \mu(x_n)$, $y_0^m = \mu_1(t_m)$, $y_N^m = \mu_2(t_m)$. Аппроксимация краевых условий второго или третьего рода уже не была бы точной, а содержала бы некоторую погрешность, как это отмечалось в главе IX.

З а м е ч а н и е 2. Для $k = \text{const}$ за счет специального выбора веса и правой части можно построить схемы повышенной точности. Для решения $u(x, t)$ дифференциального уравнения (1а) справедливо соотношение

$$u_{txx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_t = k u_{xxxx} + f_{xx}.$$

Подставляя его в (9), преобразуем невязку:

$$\begin{aligned} \Psi_n = \frac{\tau^2}{8} \left(k u_{ttxx} - \frac{1}{3} u_{ttt} \right) + \left[\tau k^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) + \frac{k h^2}{12} \right] u_{xxxx} + \\ + \left[k \tau \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) f_{xx} + \Phi_n - \bar{f}_n \right] + o(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Если положить

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k\tau}, \quad \Phi_n = \left(\bar{f} + \frac{h^2}{12} \bar{f}_{xx} \right)_n, \quad (11)$$

то обе квадратные скобки в (10) обратятся в нуль и погрешность аппроксимации схемы (6), (11) будет равной $O(\tau^2) + o(h^2)$. Удерживая в формуле Тейлора (8) большее число членов, можно показать, что невязка (10) при этом равна $\Psi_n = O(\tau^2 + h^4)$.

З а м е ч а н и е 3. Можно заменить f_{xx} в (11) второй пространственной разностью, получая следующее выражение для правой части:

$$\Phi_n = \frac{1}{12} \bar{f}_{n-1} + \frac{5}{6} \bar{f}_n + \frac{1}{12} \bar{f}_{n+1}. \quad (12)$$

Этот вариант схемы повышенной точности имеет аппроксимацию также $O(\tau^2 + h^4)$.

З а м е ч а н и е 4. Приведенные оценки аппроксимации справедливы, если непрерывны те производные решения $u(x, t)$, которые входят в выражение главного члена невязки.

Устойчивость. Исследуем устойчивость по начальным данным методом разделения переменных. Поскольку схема (6) линейна, то для этого достаточно положить в ней $\Phi_n = 0$ и сделать стандартную подстановку $y_n = \exp(i\pi q x_n/a)$, $\hat{y}_n = \rho_q \times \exp(i\pi q x_n/a)$. Тогда легко получить множитель роста гармоник

$$\rho_q = \left[1 - \frac{4k\tau}{h^2} (1 - \sigma) \sin^2 \frac{\pi q h}{2a} \right] / \left(1 + \frac{4k\tau}{h^2} \sigma \sin^2 \frac{\pi q h}{2a} \right). \quad (13)$$

Он вещественный, причем при любом $\sigma \geq 0$ справедливо неравенство $\rho_q \leq 1$. Следовательно, схема (6) устойчива, если при любом q выполняется условие $-1 \leq \rho_q$. Нетрудно проверить, что это справедливо при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4k\tau}. \quad (14)$$

Последнее неравенство является условием равномерной устойчивости схемы (6) по начальным данным (в $\|\cdot\|_2$).

Примененный здесь простейший вариант метода разделения переменных не является строгим. Однако для схемы на равномерной сетке (6) нетрудно проверить, что функции

$$v_q(x_n) = \sin(\pi q x_n / a), \quad 1 \leq q \leq N-1, \quad x_n = nh, \quad (15)$$

являются собственными функциями разностной задачи Штурма — Лиувилля для (6). Соответствующие им собственные значения имеют вид (13), причем $q \leq N-1$. При их помощи можно получить строгое необходимое и достаточное условие устойчивости, практически не отличающееся от (14).

Дополнительное условие устойчивости по правой части (9.54), как легко видеть из (6), выполняется при любых τ и h . Следовательно, схема устойчива по правой части, если выполнено условие (14) равномерной устойчивости по начальным данным.

Для чисто неявной схемы, симметричной схемы и схемы повышенной точности условие (14) выполняется при любом соотношении шагов τ и h ; таким образом, эти схемы безусловно устойчивы. Для явной схемы условие (14) выполняется только при $\tau \leq h^2/(2k)$, т. е. схема условно устойчива, что мы уже установили в главе IX.

Замечание 5. Справедливо более сильное утверждение: все эти схемы устойчивы в $\|\cdot\|_c$. В общем случае для доказательства этого утверждения приходится применять более сложную технику. Однако из принципа максимума нетрудно получить достаточное условие устойчивости в норме $\|\cdot\|_c$:

$$\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2k\tau}. \quad (16)$$

Оно более жестко, чем условие (14), но в случае явной и чисто неявной схем из него следует сделанное выше утверждение.

Сходимость. Из сказанного выше следует, что на решениях $u(x, t)$, имеющих достаточное число непрерывных производных, семейство схем (6) с весом $0 \leq \sigma \leq 1$ обеспечивает равномерную сходимость при выполнении условия устойчивости (14).

Для схем с $\sigma \neq 1/2$ погрешность $\|y - u\|_c = O(\tau + h^2)$, т. е. схемы имеют первый порядок точности по времени и второй — по пространству. Для симметричной схемы ($\sigma = 1/2$) погрешность равна $O(\tau^2 + h^2)$, т. е. порядок точности по обоим переменным

второй. Схема повышенной точности с весом (11) и соответственно выбранной φ_n имеет погрешность $O(\tau^2 + h^4)$.

Замечание 6. Поскольку схема (6) двуслойная, то она без изменения переносится на неравномерную сетку по t (разумеется, при шаге по времени τ_m надо ставить его индекс). На неравномерную сетку по x эта схема легко обобщается. Достаточно соответствующим образом записать разностный аналог пространственной производной:

$$u_{xx} \approx \frac{2}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right).$$

В этом случае схема по-прежнему сходится в $\|\cdot\|_C$ с погрешностью $O(h^2)$; однако доказательство этого утверждения значительно сложнее и проводится методом энергетических неравенств (см. [30]).

Подведем итоги. Поскольку погрешность почти для всех значений σ есть $O(h^2)$, то для получения хорошей точности при расчете по схемам (6) надо брать довольно малый шаг h .

В этом случае явная схема устойчива при настолько малом $\tau \leq h^2/(2k)$, что для доведения расчета до заданного момента T требуется сделать очень много шагов по времени, т. е. выполнить большой объем вычислений. Поэтому явные схемы для решения параболических уравнений почти никогда не употребляются.

Обычно для расчетов берут двуслойные неявные безусловно устойчивые схемы. Чаще всего используют симметричную схему или схему повышенной точности, обеспечивающие хорошую точность расчета при не слишком малых шагах τ и h . Чисто неявная схема в случае $k = \text{const}$ редко употребляется из-за невысокой точности (хотя при $k = k(u)$ она часто выгодна благодаря своей монотонности).

3. Асимптотическая устойчивость неявной схемы. Исследуем, при каких условиях схема (6) позволяет рассчитывать задачи с нулевыми краевыми значениями для очень больших промежутков времени*), т. е. каковы условия асимптотической устойчивости схемы.

Выход решения параболического уравнения (1) на асимптотику при $t \rightarrow \infty$ определяется скоростью затухания начальных данных. Приведенное в главе IX разложение решения $u(x, t)$ в ряд Фурье (9.7):

$$u(x, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_q \exp\left(-k \frac{\pi^2 q^2}{a^2} t\right) \sin \frac{\pi q x}{a},$$

*) Это нужно в задачах фильтрации нефти в пласте при многолетней эксплуатации скважин, задачах прогрева слоя вечной мерзлоты и ряде других.

показывает, что медленнее всего затухает первая гармоника. Ей соответствует множитель роста

$$\bar{\rho}_1 = \exp\left(-k \frac{\pi^2}{a^2} \tau\right) = 1 - \frac{k\pi^2\tau}{a^2} + O(\tau^2). \quad (17)$$

Чтобы схема (6) была асимптотически устойчивой, ее множители роста (13) не должны превосходить по модулю величины $\bar{\rho}_1$, т. е. должно выполняться условие

$$-1 + \frac{k\pi^2\tau}{a^2} \leq 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi qh}{2a}}{\frac{h^2}{4k\tau} + \sigma \sin^2 \frac{\pi qh}{2a}} \leq 1 - \frac{k\pi^2\tau}{a^2}, \quad 1 \leq q \leq N-1; \quad (18)$$

здесь мы преобразовали выражение (13) для ρ_q к более удобному виду. Разумеется, достаточно выполнения этих неравенств с точностью до членов $O(\tau^2)$, потому что наличие таких членов приведет к умножению амплитуд гармоник на величину $[1 + O(\tau^2)]^{t/\tau} = 1 + tO(\tau)$, чем при $\tau \rightarrow 0$ можно пренебречь, даже если t велико.

Нетрудно проверить, что правое неравенство (18) всегда выполняется. В самом деле, ρ_q монотонно убывает при увеличении $\sin(\pi qh/(2a))$, т. е. при увеличении q . Поэтому наибольшим является ρ_1 , которое с учетом малости h равно

$$\rho_1 \approx 1 - \frac{(\pi h/2a)^2}{(h^2/4k\tau) + \sigma (\pi h/2a)^2} \approx 1 - \frac{k\pi^2\tau}{a^2}$$

и совпадает с $\bar{\rho}_1$ с точностью до членов $O(\tau^2)$.

Рассмотрим левое неравенство (18). Величина ρ_q минимальна при $q = N-1$, когда $\sin(\pi qh/2a) \approx 1$. Подстановка этого значения в левое неравенство (18) после несложных выкладок приводит к условию асимптотической устойчивости

$$\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{\pi^2 k \tau}{4a^2} - \frac{h^2}{4k\tau}. \quad (19)$$

Оно несколько более жестко, чем условие обычной устойчивости (14). Его можно переписать в следующем виде:

$$\tau^2 - \frac{2a^2}{\pi^2 k} (2\sigma - 1) \tau - \left(\frac{ah}{\pi k}\right)^2 \leq 0.$$

Стоящий слева квадратный трехчлен отрицателен, если τ лежит между его корнями:

$$\tau_{1,2} = \frac{a^2}{\pi^2 k} \left[(2\sigma - 1) \pm \sqrt{(2\sigma - 1)^2 + \left(\frac{\pi h}{a}\right)^2} \right].$$

Один из корней отрицателен, а другой положителен. Поэтому условие асимптотической устойчивости (19) принимает вид

$$\tau \leq \frac{a^2}{\pi^2 k} [2\sigma - 1 + \sqrt{(2\sigma - 1)^2 + (\pi h/a)^2}]. \quad (20)$$

В частности, симметричная схема асимптотически устойчива не при любом τ , а только при

$$\tau \leq \frac{ah}{\pi k} \quad (\sigma = 1/2). \quad (21)$$

Таким образом, схема (6) при любом σ формально является лишь асимптотически *условно* устойчивой. Однако фактически устойчивость условна только при $\sigma \leq 1/2 + O(h)$, когда ограничение на шаг принимает вид $\tau \leq h \cdot \text{const}$. Если же $\sigma > 1/2$, то условие (20) требует, чтобы выполнялось неравенство $\tau \leq [2a^2(2\sigma - 1)/\pi^2 k] = \text{const}$, и по существу схема является асимптотически безусловно устойчивой.

З а м е ч а н и е. При больших t схемы с $\sigma > 1/2$ дают низкую точность. Поэтому для таких расчетов обычно используют схему с $\sigma = 1/2$.

4. Монотонность. Точное решение $u(x, t)$ уравнения $u_t = ku_{xx}$ при определенных условиях сохраняет монотонность. Например, если начальные данные монотонны и температура на концах отрезка постоянна, то профиль температуры будет монотонен в любой момент времени. То же будет при постановке задачи Коши на бесконечной прямой.

Выясним, сохраняет ли схема (6) монотонность решения. Ограничимся задачей на бесконечной прямой, хотя при использовании результатов надо помнить, что краевые условия тоже влияют на монотонность (если разностное краевое условие не точное, то его неудачное написание может привести к немонотонности схемы).

Для случая $\sigma = 0$ результат почти очевиден. Получающаяся при этом явная схема имеет форму (10.34):

$$\hat{y}_n = \sum_{l=-1}^1 \beta_l y_{n+l}, \quad \beta_0 = 1 - \frac{2k\tau}{h^2}, \quad \beta_1 = \beta_{-1} = \frac{k\tau}{h^2}.$$

Необходимым и достаточным условием монотонности является неотрицательность коэффициентов β_l . Видно, что если выполнено условие устойчивости этой схемы $2k\tau \leq h^2$, то коэффициенты неотрицательны и схема монотонна. В противном случае явная схема немонотонна,

При $\sigma \neq 0$ запишем неявную схему (6), полагая $\varphi_n = 0$ и выделяя преобладающий член на новом слое:

$$\hat{y}_n = \left(2 + \frac{h^2}{k\tau\sigma}\right)^{-1} \left[\hat{y}_{n-1} + \hat{y}_{n+1} + \frac{1-\sigma}{\sigma} (y_{n-1} + y_{n+1}) + \left(\frac{h^2}{k\tau\sigma} - 2 \frac{1-\sigma}{\sigma} \right) y_n \right]. \quad (22)$$

Напишем для \hat{y}_{n-1} и \hat{y}_{n+1} аналогичные выражения и подставим их в правую часть (22). При этом появятся другие значения с нового слоя; будем их исключать тем же способом. Коэффициенты при значениях $y_{n \pm l}$ на новом слое в правой части будут при этом убывать в геометрической прогрессии. Поэтому в пределе соотношение (22) перейдет в явную схему вида (10.34) с бесконечной суммой, т. е. с бесконечной зоной влияния.

Очевидно, если выполнено условие

$$\tau \leq \frac{h^2}{2k(1-\sigma)}, \quad (23)$$

то все коэффициенты в (22) неотрицательны. Тогда все коэффициенты в соответствующей явной схеме также будут неотрицательны. Следовательно, неравенство (23) есть достаточное условие монотонности схемы (6).

Можно получить необходимое и достаточное условие монотонности, приведя схему (22) после выполнения громоздких выкладок к явной форме (10.34):

$$\hat{y}_n = \beta_0 y_n + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l (y_{n-l} + y_{n+l}), \quad (24a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= 1 - \frac{4k\tau}{\gamma(h+\gamma)}, & \beta_1 &= \frac{4hk\tau}{\gamma(h+\gamma)^2}, \\ \beta_l &= \beta_{l-1} \frac{4\sigma k\tau}{(h+\gamma)^2} & \text{при } l \geq 2, \\ \gamma &= \sqrt{h^2 + 4\sigma k\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

Очевидно, $\beta_l \geq 0$ при $l \geq 1$ и отрицательным может быть только коэффициент β_0 . Он неотрицателен, если

$$\tau \leq \frac{(2-\sigma)h^2}{4k(1-\sigma)^2}. \quad (25)$$

Это условие необходимо и достаточно для монотонности схемы (6); оно несколько слабее ограничения (23).

Таким образом, неявные схемы монотонны только при очень малом шаге по времени $\tau \sim h^2$. По абсолютно устойчивым неявным схемам расчеты обычно проводят с шагом $\tau \sim h$, не гаран-

тирующим монотонности. Единственное исключение — чисто неявная схема с $\sigma = 1$, которая монотонна при любых шагах.

Напомним, что достаточно гладкое решение на подробных сетках можно хорошо находить и по немонотонным схемам. На грубых же сетках, особенно при разрывных начальных данных, симметричная схема может привести к «разболтке» счета. Чисто неявная схема даже в этих условиях дает плавно меняющееся разностное решение, хотя точность его невысока.

З а м е ч а н и е. Монотонные схемы для параболического уравнения могут иметь второй порядок точности по пространству. Но, как и для уравнения переноса, для параболического уравнения не известно ни одной монотонной схемы, которая имела бы второй порядок точности по времени (хотя никаких теорем о невозможности построения таких схем не доказано).

5. Явные схемы. Явные схемы имеют важное достоинство: они просто записываются и легко программируются на ЭВМ. Поэтому предпринималось много попыток построить для параболического уравнения $u_t = ku_{xx} + f$ хорошую явную схему. Однако все эти попытки были неудачными.

Например, Ричардсоном была предложена трехслойная схема, использующая шаблон рис. 77 с аппроксимацией производных двусторонними разностями:

$$\frac{1}{2\tau} (\hat{y}_n - \check{y}_n) = \frac{k}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + f_n. \quad (26)$$

Из симметрии схемы легко усмотреть, что локальная погрешность ее аппроксимации есть $O(\tau^2 + h^2)$. Однако схема Ричардсона непригодна для расчетов, ибо она безусловно неустойчива. В самом деле, используем метод разделения переменных и сделаем подстановку $y_n = \exp(iqx_n)$, $\hat{y}_n = \rho_q y_n$; поскольку схема трехслойная, надо дополнительно положить $\check{y}_n = (1/\rho_q) y_n$. Тогда для множителя роста получим квадратное уравнение

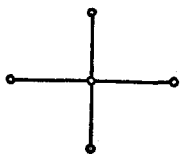


Рис. 77.

$$\rho_q^2 + \frac{8k\tau}{h^2} \rho_q \sin^2 \frac{qh}{2} - 1 = 0, \quad (27)$$

один из корней которого при любом $q \neq 0$ по модулю больше единицы на величину $O(k\tau/h^2)$.

Дюфорт и Франкел в 1953 г. видоизменили схему Ричардсона, заменив в правой части (26) величину y_n на $(\hat{y}_n + \check{y}_n)/2$:

$$\frac{1}{2\tau} (\hat{y}_n - \check{y}_n) = \frac{k}{h^2} (y_{n-1} - \hat{y}_n - \check{y}_n + y_{n+1}) + f_n. \quad (28)$$

Эта схема также явно разрешается относительно \hat{y}_n . Методом разделения переменных нетрудно показать, что она безусловна устойчива. Однако погрешность аппроксимации схемы (28) равна $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2)$, т. е. аппроксимация условная. Поэтому сходимость имеет место, только если $(\tau/h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Фактически, чтобы в расчетах по схеме (28) получить точность $O(h^2)$, надо положить $k\tau \sim h^2$, как в явной схеме (6). Правда, коэффициент пропорциональности $\alpha = (k\tau/h^2)$ можно брать любым, ибо его величина влияет только на

точность расчета, а не на устойчивость. Поэтому схема Дюфорта—Франкела удобнее явной схемы (6), но ненамного.

Плохие качества явных схем обусловлены одним принципиальным ограничением: *явная схема для параболического уравнения может сходиться, только если $(\tau/h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$* . В самом деле, пусть решение в точке нового слоя выражается через r точек исходного слоя, т. е. через отрезок длиной rh (рис. 78). Тогда оно выражается через отрезок нулевого слоя длиной $mrh = rth/\tau$; этот отрезок будет зоной влияния. Для точного решения зона влияния бесконечна. Значит, сходимость к точному решению при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ возможна, только если дополнительно $(rth/\tau) \rightarrow \infty$, т. е. $(\tau/h) \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

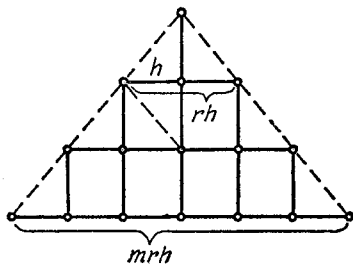


Рис. 78.

Этот результат можно уточнить. В п. 1 отмечалось, что для промежутка времени τ эффективной зоной влияния является отрезок $h \sim \sqrt{k\tau}$. Следовательно, условие сходимости явных схем должно иметь вид $k\tau \lesssim h^2$.

Поэтому для параболического уравнения неявные безусловно устойчивые схемы дают лучшие результаты, чем явные.

Отметим одну любопытную схему для уравнения теплопроводности — схему *бегущего счета* на шаблоне рис. 79. На четных слоях счет идет слева направо (рис. 79, а) по формулам

$$\frac{1}{\tau} (y_n - \check{y}_n) = \frac{k}{h^2} (y_{n-1} - y_n - \check{y}_n + \check{y}_{n+1}) + f \left(x_n, t - \frac{\tau}{2} \right), \quad (29a)$$

а на нечетных слоях — справа налево (рис. 79, б) по симметрично преобразованным формулам

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{k}{h^2} (y_{n-1} - y_n - \hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + f \left(x_n, t + \frac{\tau}{2} \right). \quad (29б)$$

Организация расчета здесь так же проста, как в явных схемах. В то же время зона влияния бесконечна благодаря наличию двух точек верхнего слоя в каждом уравнении (29); поочередная смена направления расчета обеспечивает бесконечность зоны влияния в обоих направлениях.

Методом разделения переменных нетрудно проверить, что схема (29) безусловно устойчива. Невязка каждого из уравнений (29а) и (29б), вычисленная разложением относительно центров, показанных на шаблонах рис. 79 крестиками, есть $O(\tau^2 + \tau h + h^2 + \tau/h)$. Если бы расчет производился только по одному из этих уравнений, т. е. использовалась бы односторонняя схема бегущего счета, то именно таким был бы порядок точности.

Однако при сложении погрешностей прямого и обратного хода на последовательных слоях происходит их частичная компенсация. Поэтому двусто-

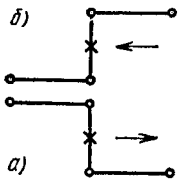


Рис. 79.

ронная схема бегущего счета (29), как показывает более детальный анализ, сходится со скоростью

$$O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2). \quad (30)$$

Тем самым, она по своим свойствам близка к схеме Дюфорта—Франкела (28).

6. Наилучшая схема. Рассмотрим, как следует обобщать схему (6) на уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t). \quad (31)$$

Случай непрерывных и гладких коэффициентов несложен, и отдельно мы его разбирать не будем. Исследуем более общий случай, когда $k(x, t)$ и $f(x, t)$ — кусочно-непрерывные функции.

Разрывы коэффициентов уравнения (31) возникают, например, на границах областей в задачах для слоистых сред или на ударных волнах в движущейся среде. В точках разрыва коэффициентов решение $u(x, t)$ будет иметь особенности, т. е. оно будет обобщенным и, вообще говоря, не единственным.

Для выделения допустимого решения из множества обобщенных решений надо выяснить, какие величины всюду непрерывны, согласно физическому смыслу задачи. Для теплопроводности, как уже отмечалось в главе VIII, § 2, п. 7, непрерывны температура $u(x, t)$ и поток тепла

$$W = -k(\partial u/\partial x).$$

Заметим, что производные этих величин разрывны; u_x имеет разрывы в точках разрыва $k(x, t)$, а W_x разрывна в точках разрыва $f(x, t)$.

Чтобы получить сходимость к допустимому обобщенному решению, составим методом баланса консервативную разностную схему.

Уравнение (31) записано в дивергентной форме, соответствующей закону сохранения энергии. Удобнее заменить его системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial x} + f, \quad W = -k \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (32)$$

Выберем шаблон и связанную с ним ячейку (рис. 80) и запишем первое уравнение (32) в виде закона сохранения энергии для

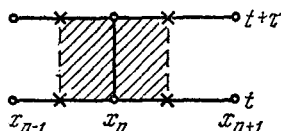


Рис. 80.

этой ячейки:

$$\int_{x_n - 1/2}^{x_n + 1/2} (\hat{u} - u) dx = \\ = \int_t^{t+\tau} (W_{n-1/2} - W_{n+1/2}) dt + \int_t^{t+\tau} \int_{x_n - 1/2}^{x_n + 1/2} f(x, t) dx dt. \quad (33a)$$

Второе уравнение (32) проинтегрируем по интервалу сетки:

$$u_{n+1} - u_n = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{W}{k(x, t)} dx. \quad (33б)$$

Справедливость формулы (33б) очевидна; если коэффициент $k(x, t)$ непрерывен на интервале сетки; но благодаря аддитивности интегрирования формула остается справедливой при наличии разрывов $k(x, t)$ внутри $[x_n, x_{n+1}]$.

Припишем значения температуры узлам сетки, а значения тепловых потоков — серединам интервалов (крестики на рис. 80). Аппроксимируем интегралы в (33) квадратурными формулами. При этом $\int W dt$ вычислим по двухточечной формуле с весом σ на верхнем слое, а в (33б) вынесем среднее значение потока за знак интеграла:

$$u_{n+1} - u_n \approx - W_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x, t)},$$

что допустимо в силу непрерывности потока. Получим консервативную разностную схему, называемую *наилучшей*:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{\sigma}{\bar{h}_n} (\hat{W}_{n-1/2} - \hat{W}_{n+1/2}) + \\ + \frac{1-\sigma}{\bar{h}_n} (W_{n-1/2} - W_{n+1/2}) + \varphi_n, \quad (34a)$$

$$W_{n+1/2} = \bar{x}_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h_n}, \quad \hat{W}_{n+1/2} = \bar{x}_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h_n}, \quad (34б)$$

где

$$h_n = x_{n+1} - x_n, \quad \bar{h}_n = \frac{1}{2} (h_{n-1} + h_n) = x_{n+1/2} - x_{n-1/2}, \quad (34в)$$

$$\bar{x}_{n+1/2} = \left[\frac{1}{h_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x, \bar{t})} \right]^{-1}, \quad \bar{t} = t + \frac{\tau}{2}, \quad (34г)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\tau \bar{h}_n} \int_t^{t+\tau} dt \int_{x_n - 1/2}^{x_n + 1/2} dx f(x, t). \quad (34д)$$

При вычислениях интегралы (34г), (34д) также аппроксимируют несложными квадратурными формулами. Например, если $k(x, t)$ и $f(x, t)$ непрерывны всюду, за исключением узлов x_n , то можно воспользоваться одной из следующих формул:

$$\bar{x}_{n+1/2} \approx \bar{k}_{n+1/2} \approx \frac{1}{2} (\bar{k}_n + \bar{k}_{n+1}) \approx \frac{2\bar{k}_n\bar{k}_{n+1}}{\bar{k}_n + \bar{k}_{n+1}} \approx \sqrt{\bar{k}_n\bar{k}_{n+1}}, \quad (35a)$$

$$\varphi_n \approx \frac{x_n - x_{n-1/2}}{h_n} \bar{f}_{n-1/2} + \frac{x_{n+1/2} - x_n}{h_n} f_{n+1/2}, \quad (35б)$$

где черта означает, что величина отнесена к моменту времени t . Под узловыми значениями разрывных величин здесь надо понимать соответствующие односторонние пределы.

Название схемы (34) связано с ее высокой точностью. Например, можно показать, что для однородного стационарного уравнения (31) наилучшая схема является точной, если интегралы (34г) вычисляются точно. Это означает, что разностное решение y_n при любых величинах шагов совпадает с $u(x_n, t)$ (хотя разностные значения $W_{n+1/2}$ могут не совпадать с точными значениями потоков в точках $x_{n+1/2}$).

Исследуем схему (34). Подставляя (34б) в (34а), получим линейную трехточечную (по пространству) схему. Для определения \hat{y}_n надо решить линейную систему с трехдиагональной матрицей, что выполняется методом прогонки. Легко видеть, что диагональные члены матрицы преобладают; это обеспечивает единственность разностного решения и устойчивость прогонки.

Устойчивость по начальным данным исследуем методом операторных неравенств. Ограничимся случаем задачи Коши на бесконечной прямой, когда $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$.

Перепишем двуслойную схему (34) в канонической форме:

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (36a)$$

где

$$By_n = y_n + \sigma \tau Ay_n, \quad (36б)$$

$$Ay_n = - \left(\bar{x}_{n+1/2} \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n h_n} - \bar{x}_{n-1/2} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n h_{n-1}} \right). \quad (36в)$$

Введем скалярное произведение

$$(v, w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n v_n w_n. \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что операторы A и B неотрицательные и самосопряженные. В самом деле,

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= (y, Ay) = \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \bar{x}_{n+1/2} \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \bar{x}_{n-1/2} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}. \end{aligned}$$

Сдвигая во второй сумме индекс на единицу, получим

$$(Ay, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\kappa}_{n+1/2} \frac{(y_{n+1}-y_n)^2}{h_n} \geq 0. \quad (38)$$

Равенство (36б) означает, что $B = E + \sigma\tau A$; тогда $(By, y) = (y, By) = (y, y) + (y, Ay) \geq 0$, что доказывает наше утверждение об операторах A и B . Заметим, что из (38) следует оценка

$$\|A\| \leq 4 \max(\kappa/h^2). \quad (39)$$

Пусть выполнено условие

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}. \quad (40)$$

Учитывая, что $0 \leq A \leq \|A\| E$, т. е. $E \geq A/\|A\|$, получим:

$$B - \frac{1}{2}\tau A = E + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau A \geq \left[\frac{1}{\|A\|} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\right]A = (\sigma - \sigma_0)\tau A \geq 0.$$

Это означает, что $B \geq \frac{1}{2}\tau A$; следовательно, по теореме из главы IX, § 3, п. 6 схема (34) устойчива в норме $\|\cdot\|_A$. Таким образом, неравенство (40) является достаточным условием устойчивости схемы (34).

Если выполнено условие

$$\delta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau} \min(h^2/\kappa), \quad (41)$$

то, в силу неравенства (39), условие (40) имеет место. Поэтому неравенство (41) также является достаточным условием устойчивости схемы (34).

Сходимость для своего доказательства требует оценок аппроксимации. Это связано с громоздкими выкладками (см. [30]), поэтому приведем только окончательный результат.

Пусть $k(x, t)$ и $f(x, t)$ кусочно-непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными, причем разрывы неподвижны (т. е. линии разрыва на плоскости (x, t) параллельны оси t). Выберем специальную сетку по x , т. е. такую, что все точки разрыва коэффициентов и их указанных производных являются ее узлами; эта сетка будет, вообще говоря, неравномерной. За средний шаг этой сетки примем $h_c = \sqrt{(h, h)}$ со скалярным произведением (37).

Тогда наилучшая схема (34) при выполнении условия устойчивости (41) равномерно сходится на специальных сетках с точностью $O(\tau^v + h_c^2)$, где $v=2$ при весе $\sigma=1/2$ и $v=1$ при $\sigma \neq 1/2$.

Если $k(x, t)$ и $f(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то наилучшая схема при выполнении условия устойчивости равномерно сходится на произвольных (неравномерных) сетках с точностью $O(\tau^v + h_c^2)$.

Монотонность схемы имеет место при достаточно малом шаге по времени:

$$\tau \leq \frac{1}{2(1-\sigma)} \min_n \left(\frac{h_n^2}{\alpha_n} \right), \quad (42)$$

за одним очевидным исключением: чисто неявная схема с $\sigma=1$ монотонна при любых шагах. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству условия (23).

З а м е ч а н и е. Коэффициенты разностной схемы вычисляются с некоторыми ошибками, что может привести к искажению решения. Устойчивость разностного решения относительно изменения коэффициентов называется *коэффициентной устойчивостью* (ко-устойчивостью).

Доказано (см. [30]), что наилучшая схема при выполнении условия (41) является ко-устойчивой.

7. Криволинейные координаты. Нередко приходится решать одномерные задачи с цилиндрической или сферической симметрией. Например, цилиндрическая симметрия имеется в задачах об остывании длинного цилиндра или в задачах о шнуровых электрических разрядах, где требуется определить теплопроводность и диффузию магнитного поля. Сферически-симметричными являются задачи о теплоотводе от ядра к поверхности звезды *).

Естественной системой координат в таких задачах является, соответственно, цилиндрическая (r, φ) или сферическая (r, θ, φ) . Вследствие одномерности все величины не будут зависеть от углов θ, φ . Тогда параболическое уравнение с переменными коэффициентами в соответствующих координатах примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v W) + f(r, t), \quad W = -k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (43)$$

Здесь v — показатель симметрии, равный 0, 1, 2 соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случаев.

Для уравнения (43) можно построить консервативную схему, являющуюся обобщением наилучшей схемы (34). Для этого проинтегрируем первое уравнение (43) по элементу объема $r^v dr dt$

*) Но в тех слоях звезды, где есть конвекция, перенос тепла описывается не параболическим уравнением.

в пространстве r, t , а второе уравнение — по радиусу:

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\hat{u} - u) r^v dr = \int_t^{t+\tau} (r_{n-1/2}^v W_{n-1/2} - r_{n+1/2}^v W_{n+1/2}) dt + \\ + \int_t^{t+\tau} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^v dr, \quad (44a)$$

$$u_{n+1} - u_n = - \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{W}{k(r, t)} dr. \quad (44b)$$

Уравнение (44a) есть интегральная запись закона сохранения энергии. Вычислим интеграл в его левой части:

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} u r^v dr \approx u_n \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^v dr = u_n V_n,$$

где V_n есть объем кольцевого или сферического слоя:

$$V_n = \frac{1}{v+1} (r_{n+1/2}^{v+1} - r_{n-1/2}^{v+1}). \quad (45)$$

Аппроксимируя остальные интегралы так, как в п. 6, получим разностную схему с весами:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{\sigma}{V_n} (r_{n-1/2}^v \hat{W}_{n-1/2} - r_{n+1/2}^v \hat{W}_{n+1/2}) + \\ + \frac{1-\sigma}{V_n} (r_{n-1/2}^v W_{n-1/2} - r_{n+1/2}^v W_{n+1/2}) + \Phi_n, \\ W_{n+1/2} = \bar{x}_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h_n}, \quad h_n = r_{n+1} - r_n, \quad (46) \\ \bar{x}_{n+1/2} = \left[\frac{1}{h_n} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{dr}{k(r, t)} \right]^{-1}, \quad \Phi_n = \frac{1}{\tau V_n} \int_t^{t+\tau} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^v dr.$$

Исследование этой схемы проводится аналогично исследованию схемы (34).

Обратим внимание на постановку граничного условия при $r=0$ для цилиндрического или сферического случаев ($v=1$ или 2). На оси или в центре симметрии естественное граничное условие есть

$$W(0, t) = 0. \quad (47)$$

Для аппроксимации этого условия удобно выбрать пространственную сетку так, чтобы $r_1 = 1/2 h_0$, $r_0 = -1/2 h_0$; при этом узел r_0

будет фиктивным. Тогда точка $r=0$ является серединой первого интервала, и разностный аналог краевого условия (47) примет вид

$$y_0 = y_1. \quad (48)$$

Замечание. Такой способ выбора сетки нередко применяют на внешней границе, а также в плоском случае, если на границе задано краевое условие второго рода $(u_x)_{\text{гран}} = \mu(t)$.

8. Квазилинейное уравнение. Значительную трудность для численных расчетов представляет случай квазилинейного уравнения теплопроводности, которое мы запишем, для определенности, в плоском случае:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t, u), \quad k \geq 0. \quad (49)$$

1) В таких задачах коэффициент теплопроводности нередко сильно зависит от температуры*) и при высоких температурах может стать очень большим. Поэтому явные схемы для уравнения (49) совершенно непригодны из-за сильного ограничения на шаг, и расчет надо вести по безусловно устойчивым неявным схемам с весом $\sigma \geq 1/2$.

2) У квазилинейного уравнения теплопроводности существуют решения $u(x, t)$, производные которых обращаются в отдельных точках в бесконечность. Примером такого решения является рассмотренная в главе IX бегущая тепловая волна (9.12), у которой на фронте $u_x = \infty$. Такие решения близки к разрывным, и при их расчете по немонотонным, хотя и устойчивым схемам легко возникает «разболтка», т. е. пилообразные профили.

Поэтому для численного решения уравнения (49) удобно использовать чисто неявные схемы с весом $\sigma = 1$, которые устойчивы и монотонны при любых шагах. Рассмотрим (ограничиваясь для простоты записи равномерной сеткой) два варианта таких схем, которые будем называть *линейным*:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{h^2} [\kappa_{n+1/2} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) - \kappa_{n-1/2} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1})] + \varphi_n, \quad (50)$$

и *нелинейным*:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{h^2} [\hat{\kappa}_{n+1/2} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) - \hat{\kappa}_{n-1/2} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1})] + \hat{\varphi}_n. \quad (51)$$

Здесь κ определяется формулами типа (35а), например:

$$\kappa_{n+1/2} = \frac{1}{2} [k(x_n, t, y_n) + k(x_{n+1}, t, y_{n+1})]$$

*) Например, по закону $k(u) \approx u^\alpha$, где $\alpha = 5/2$ для электронной теплопроводности и $\alpha \sim 5-8$ для лучистой теплопроводности.

или

$$\hat{x}_{n+1/2} = k \left(x_{n+1/2}, t + \tau, \frac{1}{2} (\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) \right);$$

аналогично определяется φ .

Можно показать, что обе схемы абсолютно устойчивы, консервативны, монотонны и на четырежды непрерывно дифференцируемых решениях имеют погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Сравним эти схемы между собой.

Линейный вариант (50) проще. Мы называем его линейным, ибо $x_{n \pm 1/2}$ зависит только от решения y с известного слоя; поэтому уравнения (50) содержат \hat{y}_n линейно*). Из линейности и преобладания диагональных элементов матрицы следует существование и единственность разностного решения \hat{y}_n . Это решение вычисляется прогонкой, так что формулы расчета просты и легко программируются на ЭВМ.

Нелинейный вариант (51) содержит дополнительную зависимость $\hat{x}(\hat{y})$ от значения \hat{y} на новом слое, благодаря чему алгебраическая система (51) нелинейна относительно \hat{y}_n . Очевидно, если $\tau \rightarrow 0$, то $\hat{y}_n \rightarrow y_n$, поэтому при достаточно малом τ существует вещественное решение системы (51). Но при большом τ система (51) может и не иметь вещественного решения.

Вычислять решение системы (51) можно двумя способами. Первый способ — метод последовательных приближений, в котором значения \hat{x} и $\hat{\varphi}$ берутся с предыдущей итерации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{y}_n^{(s)} - y_n) = \\ = \frac{1}{h^2} [\hat{x}_{n+1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_{n+1}^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)}) - \hat{x}_{n-1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_n^{(s)} - \hat{y}_{n-1}^{(s)})] + \hat{\varphi}_n^{(s-1)}, \quad (52) \\ \hat{x}^{(s-1)} = \hat{x}(\hat{y}^{(s-1)}), \quad \hat{y}_n^{(0)} = y_n \end{aligned}$$

(в качестве нулевого приближения здесь, естественно, берутся значения с известного слоя). Величины $\hat{y}_n^{(s)}$ находятся из (52) прогонкой. Итерации (52) сходятся линейно и обычно не быстро; они могут и расходиться**). В последнем случае можно вести расчет с фиксированным числом итераций, обычно с двумя или тремя итерациями. Отметим, что при одной итерации (52) нелинейная схема (51) совпадает с линейным вариантом (50).

Сложней, но заметно эффективней второй способ решения системы (51) — метод Ньютона. Учитывая, что $\hat{x}_{n+1/2} = \hat{x}(\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$, подставим в уравнения (51) $\hat{y}_n = \hat{y}_n^{(s)} + \delta \hat{y}_n^{(s)}$. Проводя линеариза-

*) Зависимость от y_n остается нелинейной, так что схема (50) в строгом смысле слова нелинейна; это надо учитывать при исследовании ее устойчивости.

***) См. гл. VIII, § 2, п. 5, где рассмотрена сходная система (8.71).

цию, получим довольно громоздкие уравнения, линейные и трехточечные относительно $\delta \hat{y}_n^{(s)}$:

$$\begin{aligned} & \delta \hat{y}_{n+1} \left[\hat{x}_{n+1/2} + \frac{\partial \hat{x}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_{n+1}} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) \right] - \delta \hat{y}_n \left[\frac{h^2}{\tau} + \hat{x}_{n+1/2} + \right. \\ & \left. + \hat{x}_{n-1/2} - \frac{\partial \hat{x}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) + \frac{\partial \hat{x}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) - h^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_n}{\partial \hat{y}_n} \right] + \\ & \quad + \delta \hat{y}_{n-1} \left[\hat{x}_{n-1/2} - \frac{\partial \hat{x}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_{n-1}} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) \right] = \\ & = \frac{h^2}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) - \hat{x}_{n+1/2} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) + \hat{x}_{n-1/2} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) - h^2 \hat{\varphi}_n, \\ & \quad \hat{y}_n^{(s+1)} = \hat{y}_n^{(s)} + \delta \hat{y}_n^{(s)}; \end{aligned} \quad (53)$$

индекс итерации s в основном уравнении опущен. На каждой итерации уравнения (53) решают прогонкой. Полученный итерационный процесс сходится, если шаг τ не слишком велик, причем вблизи корня сходимость квадратична. Если сходимость недостаточно быстрая (число итераций превышает 5—10), то целесообразнее не ограничивать число итераций, а уменьшать шаг τ .

Практика численных расчетов показала, что фактическая точность расчета по нелинейной схеме (51) обычно существенно лучше, чем по линейному варианту (50). Это позволяет вести расчет более крупным шагом τ , так что объем вычислений, требующийся для достижения заданной точности, получается меньше. Поэтому нелинейная схема (51), несмотря на свою сложность, выгоднее линейного варианта (50), особенно при решении *больших задач* *).

Включение точки. В квазилинейных задачах возможно обращение $k(u)$ в нуль при достаточно малых значениях температуры **). Наиболее типичным является случай $k(u) \approx \beta u^\alpha$, когда $k=0$ при $u=0$. При этом надо обращать особое внимание на выбор формулы типа (35а) для вычисления x . Например, полагать

$$x_{n+1/2} = \sqrt{k(y_n) k(y_{n+1})}$$

или

$$x_{n+1/2} = \frac{2k(y_n) k(y_{n+1})}{k(y_n) + k(y_{n+1})}$$

*) Большими задачами называют сложные задачи современной математической физики, описываемые системой большого числа уравнений в частных производных; в число этих уравнений может входить и уравнение теплопроводности.

***) В физических задачах при достаточно малой температуре теплопроводность становится пренебрежимо малой (исключая случаи сверхпроводимости и сверхтекучести); при высоких температурах теплопроводность заведомо не обращается в нуль.

нельзя: если в точке x_n начальная температура $y_n^0 = 0$, то в прилегающих к этой точке интервалах $x_{n-1/2} = x_{n+1/2} = 0$, и тепло в эту точку никогда не проникнет (точка «не включится»).

Поэтому надо выбирать такую формулу вычисления $x_{n+1/2} = x(y_n, y_{n+1})$, чтобы выполнялось $x_{n+1/2} \neq 0$, если $k(x, t, u) \neq 0$ хотя бы в некоторой части отрезка $[x_n, x_{n+1}]$. Этому условию удовлетворяют, например, формулы

$$x_{n+1/2} = k \left(x_{n+1/2}, t, \frac{1}{2} (y_n + y_{n+1}) \right) \quad (54a)$$

или

$$x_{n+1/2} = \frac{1}{2} [k(x_n, t, y_n) + k(x_{n+1}, t, y_{n+1})]. \quad (54b)$$

При дважды непрерывно дифференцируемом коэффициенте теплопроводности на произвольных сетках, а при кусочно-непрерывном коэффициенте с кусочно-непрерывными вторыми производными — на специальных сетках они имеют аппроксимацию $O(h^2)$.

§ 2. Многомерное уравнение

1. Экономичные схемы. Для уравнения переноса хорошие одномерные схемы — схемы бегущего счета — естественно обобщались на случай многих измерений. Однако попытка обобщить на случай многих измерений хорошие одномерные схемы расчета теплопроводности — неявные схемы типа (6) и (34) — наталкивается на принципиальные трудности.

Рассмотрим их на примере двумерного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом, для которого задана первая краевая задача в прямоугольной области:

$$u_t = k(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + f(x_1, x_2, t), \quad k = \text{const} > 0, \quad (55a)$$

$$0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \quad 0 < t \leq T;$$

$$u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t), \quad u(a, x_2, t) = \mu_2(x_2, t),$$

$$u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t), \quad u(x_1, b, t) = \mu_4(x_1, t), \quad (55b)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \mu(x_1, x_2).$$

Введем прямоугольную сетку $\{x_{1n}, x_{2m}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$ (рис. 81), причем для простоты шаги по каждой переменной h_1, h_2 выберем постоянными. Возьмем изображенный на рис. 82 шаблон, имеющий на каждом слое форму креста, и составим на нем неявную двуслойную схему с весами, являющуюся обобщением схемы (6) на двумерный случай:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_{nm} - y_{nm}) = (\Lambda_1 + \Lambda_2) [\sigma \hat{y}_{nm} + (1 - \sigma) y_{nm}], \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_1 y_{nm} &= \frac{k}{h_1^2} (y_{n+1, m} - 2y_{nm} + y_{n-1, m}), \\ \Lambda_2 y_{nm} &= \frac{k}{h_2^2} (y_{n, m+1} - 2y_{nm} + y_{n, m-1}).\end{aligned}\quad (57)$$

Разностная запись первого краевого условия сводится к заданию решения \hat{y}_{nm} в граничных узлах сетки, т. е. при $n=0$, $n=N$, $m=0$ и $m=M$.

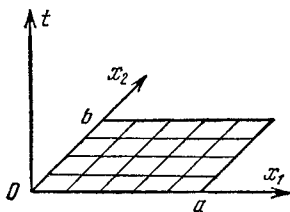


Рис. 81.

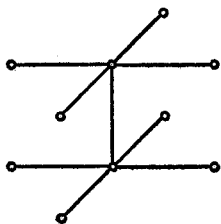


Рис. 82.

Легко проверить, что погрешность аппроксимации этой схемы на решениях с непрерывными четвертыми производными равна $O(\tau^v + h_1^4 + h_2^4)$, где $v=2$ при $\sigma=1/2$ и $v=1$ при $\sigma \neq 1/2$. Методом разделения переменных, подставляя гармоники $y_{nm} = \exp(iqx_{1n} + irx_{2m})$ и определяя их множители роста ρ_{qr} , можно получить условие устойчивости схемы (56) в $\|\cdot\|_{l_2}$:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4k\tau} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)^{-1}, \quad (58)$$

похожее на одномерное условие (14). При выполнении условия устойчивости (58) схема (56) среднеквадратично сходится с точностью $O(\tau^v + h_1^4 + h_2^4)$.

Нетрудно написать обобщение схемы (56) и условия устойчивости (58) на любое число измерений p . Оценим число действий, требующихся для выполнения расчета до момента времени T по такой схеме в случае p измерений.

При $\sigma=0$ схема (56) становится явной и значение \hat{y}_{nm} непосредственно вычисляется по значениям с предыдущего слоя. Поэтому общее число действий для перехода со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки; оно $\sim N^p$, если число узлов по каждой пространственной переменной равно N . Но явная схема устойчива только при

$$2k\tau \leq (h_1^{-2} + h_2^{-2})^{-1} \sim N^{-2}.$$

Значит, для расчета до момента времени T надо сделать $\sim N^2$ шагов по времени и полный расчет потребует $\sim N^{p+2}$ действий.

Если вести расчет по абсолютно устойчивому варианту схемы ($\sigma \geq 1/2$), то можно брать $\tau \sim h$. Но тогда на каждом слое надо решать линейную систему N^p уравнений. Даже с учетом того, что ее матрица ленточная с шириной ленты $2N^{p-1}$, решение этой системы методом Гаусса требует $\sim N^{3p-2}$ действий. Поскольку для расчета до момента T теперь надо делать N шагов по времени, то полный расчет требует $\sim N^{3p-1}$ действий.

Значит, для двумерной задачи ($p=2$) неявная схема (56) и явная схема приводят примерно к одинаковому объему вычислений, а в § 1 мы видели, что явная схема обладает плохими свойствами и невыгодна для расчетов. При $p \geq 2$ неявная схема (56) даже невыгодней явной.

Однако для многомерного параболического уравнения построены абсолютно устойчивые схемы, позволяющие вести расчет шагом $\tau \sim h$ и требующие только $\sim N^p$ действий для перехода со слоя на слой (т. е. число действий в расчете на одну точку сетки не зависит от шагов h_α). Такие схемы называются *экономичными*. Подавляющее большинство многомерных расчетов проводится по таким схемам. В следующих пунктах мы рассмотрим два основных вида экономичных схем для параболического уравнения — продольно-поперечную и локально-одномерную схемы.

2. Продольно-поперечная схема, называемая также схемой переменных направлений, является одной из лучших двумерных экономичных схем. Выберем изображенный на рис. 83 шаблон, содержащий полуцелый слой $\bar{t} = t + \tau/2$, и составим на нем эту схему:

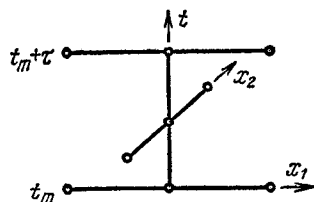


Рис. 83.

$$\frac{1}{0,5\tau} (\bar{y}_{nm} - y_{nm}) = \Lambda_1 \bar{y}_{nm} + \Lambda_2 y_{nm} + \bar{f}_{nm}, \quad (59a)$$

$$\frac{1}{0,5\tau} (\hat{y}_{nm} - \bar{y}_{nm}) = \Lambda_1 \bar{y}_{nm} + \Lambda_2 \hat{y}_{nm} + \bar{f}_{nm}, \quad (59б)$$

где разностные операторы Λ_α определены формулами (57). Как обычно, под \bar{y} подразумевается значение на полуцелом слое \bar{t} .

Исследуем продольно-поперечную схему.

Вычисление разностного решения. Переход на полуцелый слой делается при помощи уравнений (59а). Согласно определению оператора Λ_1 каждое такое уравнение содержит три неизвестных значения: $\bar{y}_{n-1, m}$, \bar{y}_{nm} и $\bar{y}_{n+1, m}$; остальные значения y берутся с исходного слоя. Иными словами, при таком переходе схема неявна по направлению x_1 и явна по направлению x_2 . При любом фиксированном индексе m уравнения (59а) образуют относительно неизвестных \bar{y}_{nm} линейную систему с трехдиагональной

матрицей. Поэтому значения \bar{y}_{nm} легко вычисляются одномерной прогонкой по индексу n , т. е. по направлению x_1 .

Наоборот, при переходе при помощи уравнений (59б) с полуцелого слоя на целый схема явна по направлению x_1 и неявна по x_2 . Поэтому решение \hat{y}_{nm} на целом слое вычисляется тоже одномерной прогонкой, но в поперечном направлении x_2 . Нетрудно подсчитать, что для перехода с целого на целый слой нужно всего 20—30 действий на каждую точку сетки независимо от величин шагов, так что схема экономична.

Как и в одномерной схеме (6), диагональные матричные элементы в уравнениях (59) преобладают; следовательно, прогонка устойчива, а разностное решение существует и единственно.

Устойчивость продольно-поперечной схемы исследуем методом разделения переменных. Множители роста гармоник на первом и втором полушаре по времени могут быть различными. Поэтому положим

$$y_{nm} = \exp(iqx_{1n} + irx_{2m}), \quad \bar{y} = \rho'_{qr} y, \quad \hat{y} = \rho''_{qr} \bar{y}. \quad (60)$$

Подставляя соотношения (60) в схему (59), получим множители роста

$$\rho'_{qr} = \left(1 - \frac{2k\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{rh_2}{2}\right) / \left(1 + \frac{2k\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{qh_1}{2}\right), \quad (61a)$$

$$\rho''_{qr} = \left(1 - \frac{2k\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{qh_1}{2}\right) / \left(1 + \frac{2k\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{rh_2}{2}\right). \quad (61б)$$

Нетрудно заметить, что для всех гармоник при любых шагах выполняется неравенство $|\rho'_{qr}\rho''_{qr}| \leq 1$. Таким образом, при переходе с одного целого слоя на следующий целый слой ошибки начальных данных не нарастают, и схема (59) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным.

Нетрудно проверить, что дополнительный признак устойчивости по правой части (9.54) выполняется на каждом полушаре по времени. Следовательно, схема (59) устойчива по правой части.

Замечание 1. Если $k\tau > h_1^2$, то существуют такие гармоники, которые усиливаются при переходе с целого слоя на полуцелый; например, $|\rho'_{om}| > 1$. Зато при переходе с полуцелого на следующий целый слой эти гармоники настолько затухают, что в целом усиления не происходит. Аналогично, при $k\tau > h_2^2$ есть гармоники, усиливающиеся при переходе с полуцелого слоя на целый.

Замечание 2. Суммарный множитель роста $\rho_{qr} = \rho'_{qr}\rho''_{qr}$ таков, что $|\rho_{qr}| = 1$ только при $q = r = 0$; для всех остальных гармоник $|\rho_{qr}| < 1$. Следовательно, продольно-поперечная схема обладает аппроксимационной вязкостью и расчет по ней должен приводить к сглаживанию разрывов.

Аппроксимация. При переходе с целого на полуцелый слой каждая пространственная разность вычисляется несимметрично по времени и погрешность равна $O(\tau + h^2)$. Но ошибка на второй половине слоя компенсирует первую, и в итоге при переходе с целого слоя на целый погрешность локальной аппроксимации на равномерных сетках есть $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

В этом легко убедиться при помощи следующего преобразования. Вычитая уравнение (59б) из (59а), получим

$$\bar{y}_{nm} = \frac{1}{2} (\hat{y}_{nm} + y_{nm}) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\hat{y}_{nm} - y_{nm}). \quad (62)$$

Сложим уравнения (59) и подставим в них полученное значение \bar{y}_{nm} , исключив тем самым самым полуцелый слой:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_{nm} - y_{nm}) = \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) (\hat{y}_{nm} + y_{nm}) - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (\hat{y}_{nm} - y_{nm}) + \bar{f}_{nm}. \quad (63)$$

Предпоследний член справа есть $\tau^2 u_{x_1^2 x_2^2} t / 4 = O(\tau^2)$, а остальные члены в (63) совпадают с симметричным вариантом схемы (56), который соответствует $\sigma = 1/2$ и имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$. Поскольку продольно-поперечная схема отличается от этого варианта на член $O(\tau^2)$, она также имеет второй порядок аппроксимации по всем переменным.

Остановимся на аппроксимации краевых условий (55б). На целом слое в уравнения продольно-поперечной схемы (59) входят значения решения \hat{y}_{nm} на сторонах прямоугольника $x_2 = 0$ и $x_2 = b$; очевидно, надо положить

$$\hat{y}_{n0} = \mu_3(x_{1n}, \hat{t}), \quad \hat{y}_{nM} = \mu_4(x_{1n}, \hat{t}), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (64a)$$

Для полуцелого слоя требуются значения \bar{y}_{nm} на сторонах $x_1 = 0$ и $x_1 = a$. Полагать $(\bar{y} - \bar{\mu}_\alpha)_{\text{гран}} = 0$ невыгодно, ибо полуцелый слой не вполне соответствует моменту \hat{t} и такая аппроксимация внесла бы погрешность $O(\tau)$. Следует воспользоваться уравнением (62), отнесенным к стороне $x_1 = 0$:

$$\bar{y}_{0m} = \frac{1}{2} (\hat{\mu}_{1m} + \mu_{1m}) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\hat{\mu}_{1m} - \mu_{1m}), \quad 1 \leq m \leq M-1; \quad (64б)$$

аналогичное условие записывается для стороны $x_1 = a$. Граничные условия (64) обеспечивают погрешность аппроксимации $O(\tau^2)$.

Сходимость. Проведенное исследование аппроксимации и устойчивости показывает, что схема (59) безусловно сходится в $\|\cdot\|_{l_2}$, причем в прямоугольной области на равномерной сетке и при краевом условии (64) она имеет точность $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ на решениях с непрерывными пятью производными.

Более сложными методами можно доказать равномерную сходимость со вторым порядком точности.

Отметим некоторые усложнения исходной задачи (55).

Произвольная область. Пусть для уравнения (55а) в области произвольной формы заданы краевые условия первого рода

$$[u - \mu(x, t)]_{\Gamma} = 0.$$

Тогда разностное краевое условие (64б) не удастся применить, ибо неясно, как вычислять $\Lambda_{2\mu}$. Приходится ограничиться условиями

$$\begin{aligned} [\bar{y} - \mu(x, \bar{t})]_{\gamma} &= 0, \\ [\hat{y} - \mu(x, \hat{t})]_{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (65)$$

где γ — множество граничных узлов. Погрешность аппроксимации условия (65) на полуцелом слое равна $O(\tau)$. Поэтому в произвольной области схема (59) сходится с точностью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

Если область ступенчатая, т. е. составлена из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, то в ней можно написать краевое условие повышенной точности (64б). В этом случае схема (59) имеет второй порядок точности.

Переменный коэффициент теплопроводности. Для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом можно составить два варианта продольно-поперечной схемы, являющихся обобщением наилучшей схемы (34). В первом варианте на всех слоях — исходном, полуцелом и новом целом — разностный коэффициент теплопроводности κ приписывают полуцелому слою \bar{t} ; во втором варианте на этих слоях берут соответственно $\kappa(t)$, $\kappa(\bar{t})$ и $\kappa(\hat{t})$.

Оба варианта успешно применяются на практике. Второй вариант лучше исследован теоретически; для него доказана безусловная сходимость в прямоугольной области с точностью $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$, если коэффициент $k(x, t)$ непрерывен со своими вторыми производными.

Анизотропная теплопроводность в простейшем случае приводит к тому, что по каждому направлению имеется свой коэффициент $k_{\alpha}(x, t)$. В этом случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right] + f(x, t). \quad (66)$$

Продольно-поперечная схема, ее обобщения и все теоретические обоснования переносятся на этот случай практически без изменений.

3. Локально-одномерный метод. Продольно-поперечная схема на задачи с числом измерений $p \geq 3$ непосредственно не обобщается. В самом деле, введем $p-1$ промежуточный слой и на

каждом слое составим схему типа (59), неявную по одному направлению и явную по остальным. Во-первых, такая схема несимметрична и имеет аппроксимацию лишь $O(\tau)$. Во-вторых, она оказывается условно устойчивой при $k\tau \lesssim h^2$ и, тем самым, неэкономичной.

Экономичные многомерные разностные схемы можно строить локально-одномерным методом, также используя промежуточные слои. Эти схемы имеют лишь суммарную аппроксимацию. На промежуточных слоях они вообще не аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение; но погрешности аппроксимации промежуточных слоев при суммировании гасят друг друга так, что на целом слое аппроксимация есть. При этом разностное решение следует сравнивать с точным только на целых слоях, не придавая промежуточным слоям самостоятельного смысла.

Рассмотрим многомерное параболическое уравнение (66); для простоты ограничимся случаем анизотропной теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha} u, \quad A_{\alpha} = k_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad k_{\alpha} = \text{const}, \quad (67)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}.$$

Аппроксимируем это уравнение симметричной неявной схемой, которую назовем *исходной*:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y} - y) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} (\hat{y} + y), \quad (68)$$

где Λ_{α} — разностные операторы, аппроксимирующие A_{α} с погрешностью $O(h^r)$; обычно для них используют формулы (57), соответствующие $r=2$. Благодаря симметричной форме исходная схема имеет погрешность

$$O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^r\right).$$

Однако эта схема неэкономична, потому что не найдено хорошего алгоритма вычисления \hat{y} .

Наряду с исходной схемой построим *локально-одномерную* схему. Введем промежуточные слои и на каждом слое в правой части (68) вместо $\sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}$ возьмем $p\Lambda_{\alpha}$; в левой части поставим шаг τ/p . Обозначим решение на промежуточных шагах через w_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, p$). Тогда функции w_{α} будут удовлетворять разно-

стным уравнениям и начальным условиям следующего вида:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{w}_\alpha - w_\alpha) = \frac{1}{2}\Lambda_\alpha(\hat{w}_\alpha + w_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p; \quad (69a)$$

$$w_1 = y, \quad w_2 = \hat{w}_1, \quad w_3 = \hat{w}_2, \quad \dots, \quad w_p = \hat{w}_{p-1}, \quad \hat{y} = \hat{w}_p. \quad (69б)$$

Поскольку Λ_α — одномерные операторы, то каждая \hat{w}_α является решением одномерной разностной схемы; поэтому схему (69) называют локально-одномерной. Исследуем ее.

Устойчивость. Каждое уравнение (69a) является одномерной неявной симметричной схемой типа схемы (6) при $\sigma = 1/2$. Последняя схема безусловно устойчива, так что ошибка начальных данных не возрастает ни на одном промежуточном слое. Следовательно, схема (69) также безусловно устойчива и позволяет вести расчет с шагом $\tau \sim h$.

Вычисление разностного решения несложно. Каждое уравнение (69a) решается одномерной прогонкой. По тем же причинам, что и в случае схемы (6), прогонка устойчива, а разностное решение \hat{y} существует и единственно.

Для нахождения решения на новом целом слое надо выполнить прогонки по всем p направлениям. Это требует $\sim 10p$ действий на каждую точку сетки независимо от величин шагов h_α . Таким образом, локально-одномерная схема экономична.

Аппроксимацию исследуем, сравнивая схему (69) с исходной. Для этого перепишем (69) в следующем виде:

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha\right)\hat{w}_\alpha = \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha\right)w_\alpha, \quad w_\alpha = \hat{w}_{\alpha-1}. \quad (70)$$

Операторы A_α попарно перестановочны; операторы Λ_α получаются тоже попарно перестановочными. Последовательно применяя (70) и используя перестановочность операторов, нетрудно установить следующее равенство:

$$\left\{\prod_{\alpha=1}^p \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha\right)\right\}\hat{w}_p = \left\{\prod_{\alpha=1}^p \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha\right)\right\}w_1.$$

Раскроем произведения операторов и положим $w_1 = y$, $\hat{w}_p = \hat{y}$. Пренебрегая членами высокого порядка по τ , получим запись схемы (69):

$$\begin{aligned} \left\{E - \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} + \frac{\tau^2}{4} \sum_{\alpha, \beta} \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} + O(\tau^3)\right\} \hat{y} = \\ = \left\{E + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} + \frac{\tau^2}{4} \sum_{\alpha, \beta} \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} + O(\tau^3)\right\} y, \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y} - y) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4} \sum_{\alpha, \beta} \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta}(\hat{y} - y) + O(\tau^2). \quad (71)$$

На решениях с непрерывными пятыми производными двойная сумма в (71) есть $O(\tau^2)$, поэтому (71) отличается от исходной схемы только членами $O(\tau^2)$. Но погрешность аппроксимации исходной схемы равна

$$O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2\right).$$

Следовательно, погрешность аппроксимации симметричной локально-одномерной схемы (69) на целых слоях есть

$$O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2\right).$$

Заметим, что для получения погрешности аппроксимации $O(\tau^2)$ в граничных условиях надо к естественным граничным условиям добавлять поправки типа (646).

Сходимость схемы (69), как следует из сказанного выше, является безусловной с погрешностью $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^2\right)$.

Замечание. В некоторых случаях расщепление многомерной задачи на последовательность одномерных бывает точным. Например, многомерный перенос по характеристике точно эквивалентен последовательности одномерных переносов по проекциям этой характеристики на координатные плоскости.

Остановимся на некоторых осложнениях задачи (67).

Переменные коэффициенты $k_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ приводят к тому, что операторы A_{α} становятся непостоянными и Λ_{α} — тоже. В этом случае погрешность аппроксимации схемы (69) возрастает до $O\left(\tau + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^2\right)$. Поэтому для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha} u + f(\mathbf{x}, t), \quad A_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[k_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right], \quad (72)$$

нередко ограничиваются чисто неявной локально-одномерной схемой

$$\frac{1}{\tau}(\hat{\omega}_{\alpha} - \omega_{\alpha}) = \Lambda_{\alpha} \hat{\omega}_{\alpha} + \varphi_{\alpha}, \quad \omega_{\alpha} = \hat{\omega}_{\alpha-1}, \quad \sum_{\alpha=1}^p \varphi_{\alpha} = f \quad (73a)$$

с естественными граничными условиями

$$[\hat{\omega}_{\alpha} - \mu(\mathbf{x}, \hat{t})]_{\nu} = 0; \quad (73b)$$

здесь операторы Λ_α построены по образцу одномерной наилучшей схемы (34). Схема (73) безусловно устойчива и имеет точность

$$O\left(\tau + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^2\right)$$

в норме $\|\cdot\|_c$.

Для уравнения (72) можно добиться точности $O(\tau^2)$, строя симметричный по времени алгоритм. Введем полуцелый слой \hat{t} и перейдем на него по симметричной локально-одномерной схеме (69) в прямом порядке $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Переход с полуцелого на новый слой \hat{t} совершим по той же схеме, но в обратном порядке $\alpha = p, p-1, \dots, 1$. При этом в естественные краевые условия надо вносить поправки, аналогичные (64б).

Квазилинейное уравнение с $k_\alpha(x, t, u)$. Чисто неявная локально-одномерная схема (73) естественно обобщается на этот случай. Аналогично § 1, п. 8, можно на промежуточном слое либо полагать $\kappa_\alpha = \kappa_\alpha(x, t, \omega_\alpha)$ и обходиться однократной прогонкой по данному направлению, либо полагать $\kappa_\alpha = \kappa_\alpha(x, \hat{t}, \hat{\omega}_\alpha)$ и решать одномерную схему (73а) прогонкой с итерациями.

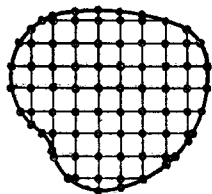


Рис. 84.

Произвольная область $G(x)$ с криволинейной границей. Покроем эту область прямоугольной сеткой, равномерной по каждой переменной (двумерный случай изображен на рис. 84). Точки пересечения линий сетки с границей также возьмем в качестве узлов сетки и запишем в них естественное разностное краевое условие (73б). Во внутренних узлах аппроксимируем дифференциальное уравнение (72) чисто неявной локально-одномерной схемой (73а).

Пусть граничные значения $\mu(x, t)$ и коэффициенты уравнения (72) достаточно гладки, так что точное решение $u(x, t)$ непрерывно вместе со своими четвертыми производными всюду в $G(x)$, включая границу области. Тогда построенная указанным образом схема безусловно устойчива и равномерно сходится с точностью

$$O\left(\tau + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^2\right)$$

(доказательство см. в [30]).

В областях специальной формы — сфере или цилиндре — удобнее пользоваться не декартовыми координатами, а соответствующими криволинейными. Это позволяет получить более хорошую аппроксимацию вблизи границы и повышает фактическую точность расчета. Но при этом есть тонкости в аппроксимации вблизи центра или оси, на которых мы не останавливаемся.

4. Метод Монте-Карло. Этот метод можно применять к задачам, которые обычно формулируют в терминах уравнений с частными производными. Рассмотрим его на несложном примере.

Пусть частицы блуждают по узлам двумерной пространственной сетки (рис. 84) так, что за один шаг по времени частица может перейти с вероятностью $1/4$ в любой из четырех соседних узлов. Тогда, если на данном шаге в узле есть y_{nm} частиц, то на следующем шаге все они уйдут в соседние узлы. Но зато из каждого соседнего узла примерно четверть бывших там частиц придет в этот узел, так что

$$\hat{y}_{nm} = \frac{1}{4} (y_{n+1,m} + y_{n-1,m} + y_{n,m+1} + y_{n,m-1}).$$

Вычитая из обеих частей y_{nm} , запишем

$$\hat{y}_{nm} - y_{nm} = \frac{1}{4} [(y_{n+1,m} - 2y_{nm} + y_{n-1,m}) + (y_{n,m+1} - 2y_{nm} + y_{n,m-1})]. \quad (74)$$

Уравнение (74) совпадает с явным вариантом разностной схемы (56) для уравнения теплопроводности, если в этой схеме положить $\sigma = 0$ и выбрать шаги специальным образом:

$$4k\tau = h_1^2 = h_2^2.$$

Поэтому вместо решения разностных уравнений можно разыграть случайный процесс. Поместим в каждый узел сетки число частиц, пропорциональное начальному значению y_{nm}^0 . На каждом шаге для каждой частицы будем разыгрывать переход в один из соседних узлов. Перераспределение частиц будет соответствовать изменению решения со временем.

Вопрос о границе и условиях на ней довольно сложен и здесь не рассматривается.

В обычных задачах теплопроводности этот метод гораздо менее точен, чем локально-одномерные методы. Но в очень сложных задачах, где число измерений велико и написать разностную схему трудно, метод Монте-Карло может оказаться более простым и быстрым способом решения.

ЗАДАЧИ

1. Найти невязку схемы (6) с весом и правой частью (11).
2. Найти невязку схемы (6) с весом (11) и правой частью (12).
3. Записать схему (6) на неравномерной сетке и найти ее погрешность локальной аппроксимации: а) на произвольной неравномерной сетке, б) на квазиравномерной сетке.
4. При каком соотношении шагов τ и h будет асимптотически устойчива схема повышенной точности (6) с весом (11)?
5. Исследовать аппроксимацию схемы Ричардсона (26).
6. Доказать безусловную устойчивость схемы Дюфорга — Франкела (28).

7. Исследовать аппроксимацию схемы Дюфорта — Франкела (28).
8. Доказать безусловную устойчивость схемы (29).
9. Найти невязки схем (29а) и (29б) и определить суммарную невязку схемы (29).
10. Для уравнения $u_t = ku_{xx}$ построить схему на шаблоне рис. 85 и доказать, что она устойчива при $2k\tau \geq h^2$.

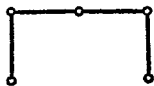


Рис. 85.

11. Доказать, что наилучшая схема (34) монотонна при выполнении условия (42).
12. Исследовать устойчивость схемы (46) для параболического уравнения в криво линейных координатах.
13. Исследовать аппроксимацию схемы (56) для двумерного уравнения (55).
14. Доказать, что двумерная схема (56) устойчива при выполнении условия (58).
15. Разобрать структуру матрицы линейной системы (56). Как изменится эта структура при обобщении схемы (56) на случай трех измерений?