

## УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

В главе X рассмотрены основные разностные схемы для простейшего уравнения в частных производных — уравнения переноса. В § 1 построены схемы бегущего счета для линейного уравнения переноса, как одномерного, так и многомерного. На их примере дана геометрическая интерпретация устойчивости разностных схем и введены понятия монотонности, аппроксимационной вязкости и первого дифференциального приближения разностных схем, полезные при качественном анализе разностных решений.

В § 2 рассмотрено простейшее квазилинейное уравнение переноса и исследованы качественные особенности его решений. Введено понятие консервативности разностных схем и изложен метод псевдовязкости; на их основе построены схемы для решения данной задачи.

## § 1. Линейное уравнение

**1. Задачи и решения.** Существует много задач о распространении частиц в веществе: определение нейтронных потоков в реакторе, теплопроводности в газах, обусловленной диффузией атомов и электронов, и т. д. Такие задачи приводят к уравнению переноса, которое может быть интегро-дифференциальным. Например, основное уравнение кинетической теории газов — уравнение Больцмана имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{r}} + F_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \sum_j \int (u'_i u'_j - u_i u_j) d\mathbf{v}'_j d\mathbf{v}_j, \quad (1)$$

$$u_i = u_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i; t), \quad u'_i = u_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_i, t).$$

Здесь  $u_i$  — функция распределения  $i$ -го сорта частиц; она зависит от времени, координаты и скорости частицы. Интегральный член в (1) описывает столкновения частиц.

Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа (1) очень сложно и выходит за пределы нашего курса. Мы ограничимся изучением только линейного дифференциального уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad} u = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad (2)$$

где  $c$  — вектор скорости переноса. Как будет видно в дальнейшем, для этого уравнения многомерность не вносит принципиальных осложнений. Все основные идеи можно пояснить на одномерном уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad (3)$$

где скорость  $c$  будем считать постоянной, если специально не оговорено противное.

Если в уравнении (3) правая часть  $f=0$ , то общее решение этого уравнения имеет вид бегущей волны:

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \quad (4)$$

(отсюда видно, что  $c$  есть скорость переноса). Для определенности положим  $c > 0$ , тогда волна бежит слева направо. Вид решения (4) подсказывает, как можно корректно поставить полную задачу для уравнения (3).

Смешанная задача Коши. Зададим начальные и граничные данные на отрезках, показанных на рис. 55 жирными линиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \mu_1(x), & 0 \leq x \leq a, \\ u(0, t) &= \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (5)$$

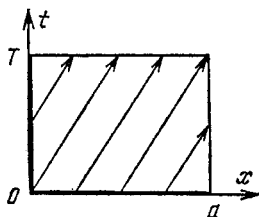


Рис. 55.

Тогда решение задачи (3), (5) однозначно определено в области  $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$ . Если начальные и граничные данные непрерывны вместе со своими  $p$ -ми производными, причем выполнены условия согласования в точке стыка кусков границы (для случая  $f(x, t) \equiv 0$  они имеют следующий вид:

$$\frac{d^q \mu_2(0)}{dt^q} = (-c)^q \frac{d^q \mu_1(0)}{dx^q}, \quad 0 \leq q \leq p) \quad (6)$$

и  $f(x, t)$  непрерывна вместе с  $(p-1)$ -ми производными, то решение  $u(x, t)$  непрерывно в  $G$  вместе с  $p$ -ми производными.

Задача Коши. Зададим начальные данные на полубесконечной прямой:  $u(x, 0) = \mu(x)$  при  $-\infty < x \leq a$ . Тогда решение однозначно определено в области  $G = (-\infty < x \leq a] \times [0 \leq t < +\infty)$ . Гладкость решения соответствует гладкости начальных данных  $\mu(x)$  и правой части  $f(x, t)$ .

Характеристики уравнения (3) имеют вид  $x - ct = \text{const}$  и при постоянной скорости  $c$  являются прямыми линиями. Решение (4) однородного уравнения (3) постоянно вдоль такой линии; поэтому говорят, что начальные и граничные условия переносятся по характеристикам.

Решение неоднородного уравнения (3) меняется вдоль характеристик. Это изменение легко найти, если перейти к новым координатам, связанным с характеристиками:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct. \quad (7)$$

При их помощи уравнение (3) преобразуется к виду

$$2c \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi(\xi, \eta), \quad \varphi(\xi, \eta) = f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right). \quad (8)$$

Следовательно, вдоль характеристики  $\xi = \text{const}$  решение  $u$  можно найти, интегрируя по  $\eta$  обыкновенное дифференциальное уравнение (8), в котором  $\xi$  играет роль параметра. Так можно определить решение в любой точке области  $G$ , поскольку при  $c = \text{const}$  характеристики покрывают всю область.

Этот способ построения точного решения легко обобщается на уравнение с переменным коэффициентом  $c(x, t)$ . Он показывает, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы через любую точку области  $G$  проходила одна и только одна характеристика. Это выполняется, если функция  $c(x, t)$  непрерывна во всей области  $G + \Gamma$ .

Сохранение монотонности является важным свойством однородного уравнения переноса. Если для него поставлена задача Коши с монотонными начальными данными  $u(x, 0) = \mu(x)$ ,  $-\infty < x \leq a$ , то в любой момент  $t$  профиль  $u(x, t)$  тоже будет монотонным\*). Монотонность сохраняется и в смешанной задаче Коши, если граничное значение  $u(0, t)$  тоже монотонно зависит от  $t$  и согласовано с начальными данными.

В уравнении переноса монотонность является тривиальным следствием из вида общего решения (4). Однако во многих уравнениях начальная монотонность решения сохраняется, хотя общее решение не имеет вида одной бегущей волны. При определенных условиях это имеет место даже в задачах теплопроводности и газодинамики. Поэтому монотонность — достаточно общее и важное свойство многих уравнений.

**2. Схемы бегущего счета.** Эти схемы предназначены для решения смешанной задачи Коши (3), (5). Они легко обобщаются на случай любого числа измерений. Схемы бегущего счета являются наиболее простыми и позволяют численно решать даже очень сложные задачи переноса с хорошей точностью при умеренном объеме вычислений.

Рассмотрим задачу (3), (5) и построим в области  $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$  прямоугольную сетку, для простоты равномерную с шагами  $h$  и  $\tau$ . Выберем четыре шаблона, изображен-

\*) Профилем (по  $x_\alpha$ ) называют зависимость функции  $F(x_1, \dots, x_p, t)$  от одной из пространственных переменных  $x_\alpha$ .

ные на рис. 56—59. Составим на трехточечных шаблонах (рис. 56—58) простейшие схемы с использованием односторонних производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c}{h} (y_n - y_{n-1}) &= \Phi_n, \\ \Phi_n &= f\left(x_n - \frac{h}{2}, t_m + \frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_{n-1} - y_{n-1}) + \frac{c}{h} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) = \Phi_n, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c}{h} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) = \Phi_n, \quad (11)$$

а на четырехточечном шаблоне (рис. 59) — схему с симметризованными производными:

$$\frac{1}{2\tau} (\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1} - y_n - y_{n-1}) + \frac{c}{2h} (\hat{y}_n + y_n - \hat{y}_{n-1} - y_{n-1}) = \Phi_n. \quad (12)$$

Правую часть мы для определенности выбираем в центре ячейки, соответствующей шаблону, хотя возможен и другой выбор.

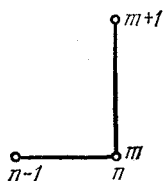


Рис. 56.



Рис. 57.

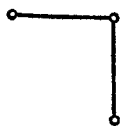


Рис. 58.

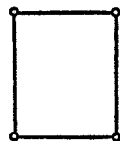


Рис. 59.

Организация расчета по этим схемам очень проста. Хотя формально схема (9) является явной, а остальные три — неявными, фактически при расчете смешанной задачи Коши они ведут себя, как явные.

В самом деле, во всех четырех схемах значение  $\hat{y}_n$  явно выражается через значения  $\hat{y}_{n-1}$ ,  $y_n$ ,  $y_{n-1}$  (или любые два из них). Значение решения на нулевом слое  $y_n^0 = \mu_1(x_n)$  известно из начального условия. На следующем (первом) слое значение  $\hat{y}_0 = \mu_2(t_1)$  в силу граничного условия, и можно вычислить  $\hat{y}_1$ ; зная  $\hat{y}_1$ , можно вычислить  $\hat{y}_2$ , затем  $\hat{y}_3$ . Так последовательно вычисляются слева направо все  $\hat{y}_n$  первого слоя. Затем, зная решение на первом слое, точно так же вычисляем его на втором слое, на третьем и т. д.

Замечание 1. Явная схема (9) пригодна для решения задачи Коши на полубесконечной (или бесконечной) прямой; неявные схемы бегущего счета к такой задаче неприменимы. Правда, в практике численных расчетов задача Коши для уравнения переноса в неограниченной области почти не встречается.

Из описанного алгоритма видно, что для каждой из схем (9) — (12) разностное решение при любых  $\varphi_n$  существует и единственно. Поэтому для доказательства сходимости остается исследовать аппроксимацию и устойчивость схем. Заметим, что краевое условие  $u(0, t) = \mu_2(t)$  для всех схем аппроксимируется точно; поэтому устойчивости по нему не требуется.

Схема (9). Исследуем ее погрешность аппроксимации. Пусть начальные и граничные данные дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям согласования типа (6) с  $p=2$ , а правая часть  $f(x, t)$  имеет непрерывные первые производные. Тогда решение  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо; разложим его по формуле Тейлора в узле  $(x_n, t_m)$ :

$$\begin{aligned}\hat{u}_n &= u_n + \tau u_t + \frac{1}{2} \tau^2 u_{tt}, \\ u_{n-1} &= u_n - hu_x + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}, \\ \varphi_n &= f_n + \frac{1}{2} \tau f_t - \frac{1}{2} hf_x.\end{aligned}$$

Отсюда легко определим невязку схемы (9):

$$\begin{aligned}\psi_n &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - f \right)_n - \left[ \frac{1}{\tau} (\hat{u}_n - u_n) + \frac{c}{h} (u_n - u_{n-1}) - \varphi_n \right] = \\ &= \frac{\tau}{2} (f_t - u_{tt}) + \frac{h}{2} (cu_{xx} - f_x) = O(\tau + h).\end{aligned}\quad (13)$$

При сделанных предположениях схема (9) имеет аппроксимацию в  $\|\cdot\|_c$  с первым порядком.

Устойчивость исследуем при помощи принципа максимума. Критерий равномерной устойчивости по начальным данным (9.53) с константой  $C=0$  принимает вид

$$\frac{1}{\tau} \geq \frac{c}{h} + \left| \frac{1}{\tau} - \frac{c}{h} \right|.$$

Он выполняется только при так называемом условии Куранта:

$$c\tau \leq h. \quad (14)$$

Таким образом, схема (9) является условно устойчивой в  $\|\cdot\|_c$ .

Методом разделения переменных можно доказать необходимость условия (14). Рассматривая отдельную гармонику  $\exp(iqx)$  и подставляя в (9) величины

$$\varphi_n = 0, \quad y_n = e^{iqx}, \quad y_{n-1} = e^{iq(x-h)}, \quad \hat{y}_n = \rho_q y_n,$$

легко получим множитель роста этой гармоники:

$$\rho_q = 1 - \frac{c\tau}{h} (1 - e^{-iqh}). \quad (15)$$

Если  $c\tau > h$ , то для тех гармоник, у которых  $\cos qh = -1$ , множитель роста равен

$$|\rho_q| = \left| 1 - \frac{2c\tau}{h} \right| = \frac{2c\tau}{h} - 1 > 1,$$

т. е. амплитуды этих гармоник неограниченно нарастают при  $\tau \rightarrow 0$ . Устойчивости нет, что и требовалось доказать.

Непосредственно видно, что дополнительное условие устойчивости по правой части (9.54) выполняется, причем  $\kappa = 1$ . Поэтому схема устойчива по правой части в  $\|\cdot\|_c$  при выполнении условия (14).

Тогда из теорем о сходимости следует, что если решение  $u(x, t)$  непрерывно вместе со своими вторыми производными, то схема (9) при выполнении условия Куранта (14) сходится в  $\|\cdot\|_c$  со скоростью  $O(\tau + h)$ , т. е. с первым порядком точности.

Схема (10) исследуется аналогично; при исследовании аппроксимации разложение по формуле Тейлора удобнее вести около узла  $(x_{n-1}, t_m + \tau)$ . На дважды непрерывно дифференцируемых решениях эта схема при выполнении условия устойчивости

$$c\tau \geq h \quad (16)$$

обеспечивает сходимость со скоростью  $O(\tau + h)$ .

Схема (11) безусловно устойчива и на дважды непрерывно дифференцируемых решениях сходится со скоростью  $O(\tau + h)$ .

Схема (12) симметричная, и при исследовании ее аппроксимации целесообразно разлагать  $u(x, t)$  по формуле Тейлора около центра ячейки  $(x_n - \frac{h}{2}, t_m + \frac{\tau}{2})$ . Тогда после довольно громоздких выкладок определяем невязку:

$$\psi = -\tau^2 \left( \frac{1}{24} u_{ttt} + \frac{c}{8} u_{ttx} \right) - h^2 \left( \frac{1}{8} u_{txx} + \frac{c}{24} u_{xxx} \right) = O(\tau^2 + h^2). \quad (17)$$

Схема имеет второй порядок аппроксимации, если решение  $u(x, t)$  трижды непрерывно дифференцируемо.

Устойчивость схемы (12) при помощи принципа максимума установить не удастся. Однако можно провести исследование методом разделения переменных. Для гармоники  $\exp(iqx)$  нетрудно получить выражение для множителя роста. Полагая в (12)

$$\varphi_n = 0, \quad y_n = \exp(iqx_n), \quad \hat{y} = \rho_q y,$$

найдем

$$\rho_q = e^{-iqh} \frac{(h+c\tau) + (h-c\tau)e^{iqh}}{(h+c\tau) + (h-c\tau)e^{-iqh}}. \quad (18)$$

Отсюда видно, что  $|\rho_q| = 1$  для любой гармоники при любых соотношениях шагов. Следовательно, схема равномерно устойчива по начальным данным в  $\|\cdot\|_{L_2}$ , причем устойчивость безусловная.

Дополнительный критерий устойчивости по правой части (9.54) после умножения на  $\tau$  принимает для схемы (12) следующий вид:

$$1 + \frac{c\tau}{h} - \left| 1 - \frac{c\tau}{h} \right| \geq \kappa, \quad \kappa = \text{const} > 0.$$

Убедимся, что для  $\kappa = 2$  это неравенство выполняется при любых  $\tau$  и  $h$ . В самом деле, если  $c\tau \leq h$ , то левая часть неравенства равна 2. Если же  $c\tau > h$ , то левая часть неравенства равна  $(2c\tau/h) > 2$ . Поскольку критерий выполнен, то схема безусловно устойчива по правой части.

Из сказанного выше следует, что на трижды непрерывно дифференцируемых решениях  $u(x, t)$  схема (12) безусловно сходится в норме  $\|\cdot\|_{L_2}$  со скоростью  $O(\tau^2 + h^2)$ . Судя по результатам численных расчетов, схема обеспечивает второй порядок точности и в  $\|\cdot\|_C$ .

**Замечание 2.** Схемы бегущего счета сходятся на решениях меньшей гладкости и даже на разрывных решениях (разумеется, не равномерно, а в среднем). Например, теоретический анализ и примеры численных расчетов [65, 66] показали, что схема (11) сходится на кусочно-непрерывных решениях в  $\|\cdot\|_{L_p}$  с погрешностью  $O((\tau + h)^{1/2p})$ . Любопытно, что порядок точности оказался не целым!

**Замечание 3.** Схемы бегущего счета очевидным образом обобщаются на случай неравномерной сетки. Например, схему (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c_n}{h_n} (y_n - y_{n-1}) = \varphi_n, \quad h_n = x_n - x_{n-1}. \quad (19)$$

Критерии устойчивости (14) и (16) принимают при этом соответственно вид:

$$\tau \leq \min_n (h_n/c_n) \quad \text{и} \quad \tau \geq \max_n (h_n/c_n). \quad (20)$$

Интересно сравнить схемы (9) — (12) между собой. Схема (12) имеет второй порядок точности и на достаточно гладких решениях при не слишком больших шагах  $\tau$  и  $h$  дает лучшие результаты на примерах-тестах. Но на разрывных решениях или для быстропеременных решений на грубой сетке она оказывается плохой; в этих случаях удовлетворительные результаты дают схемы (9) — (11).

Схемы (9) — (11) имеют первый порядок точности. Первые две из них условно устойчивы, что неудобно при численных расчетах. Схема (11) безусловно устойчива и очень надежна в расчете; однако по точности она уступает схемам (9) и (10), в чем нетрудно убедиться, сравнив невязки этих схем.

Дальше мы увидим, что схемы (9) и (10) можно объединить в единую явно-неявную схему, безусловно устойчивую и превосходящую схему (11) по точности.

**3. Геометрическая интерпретация устойчивости.** Ограничимся устойчивостью по начальным данным. Рассмотрим однородное уравнение (3) с  $f(x, t) = 0$ , общее решение которого имеет вид  $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ , т. е. переносится по характеристикам  $x - ct = \text{const}$  без изменения.

Рассмотрим схему (9) с шаблоном, изображенным на рис. 60 (см. также рис. 56). Построим характеристику, проходящую через искомый узел  $(x_n, t_{m+1})$ ; она обозначена стрелкой на рис. 60. Эта характеристика пересекает исходный слой  $t_m$  в точке  $\bar{x} = x_n - c\tau$ . Схему (9) без правой части можно интерпретировать следующим образом. Линейно интерполируя разностное решение между узлами исходного слоя, найдем

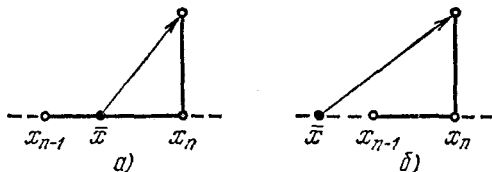


Рис. 60.

$$y(\bar{x}) = y_{n-1} \frac{x_n - \bar{x}}{h} + y_n \frac{\bar{x} - x_{n-1}}{h} = \frac{c\tau}{h} y_{n-1} + \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) y_n. \quad (21)$$

Затем найденное значение перенесем без изменения по характеристике в искомый узел, т. е. положим  $\hat{y}_n = y(\bar{x})$ .

Если выполнено условие устойчивости схемы  $c\tau \leq h$ , то  $x_{n-1} \leq \bar{x} < x_n$ ; в противном случае  $\bar{x} < x_{n-1}$ . Иными словами, схема (9) устойчива, если  $\hat{y}_n$  вычисляется по ранее найденным значениям  $y$  при помощи интерполяции (рис. 60, а); схема неустойчива, если используется экстраполяция (рис. 60, б).

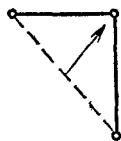


Рис. 61.

Причина этого состоит в том, что при точной постановке задачи в узел  $(x_n, t_{m+1})$  приходят возмущения только из точки  $\bar{x}$  исходного слоя  $t_m$ . Если точка  $\bar{x}$  лежит вне отрезка  $[x_{n-1}, x_n]$ , то, сохраняя непрерывность и гладкость решения, можно сильно изменить его на этом отрезке (на слое  $t_m$ ), не меняя значения  $u(\bar{x}, t_m)$ . Значение  $\hat{u}_n = u(\bar{x}, t_m)$  при этом сохраняется, а значение  $\hat{y}_n$  сильно изменяется, поскольку оно вычисляется по изменившимся значениям  $y_n, y_{n-1}$ . Значит,  $\hat{y}_n$  не может сходиться к  $\hat{u}_n$ .

Схемы (10) и (11) тоже можно интерпретировать как линейную интерполяцию по двум уже вычисленным значениям, с последующим переносом по характеристике. В частности, безусловная устойчивость схемы (11) связана с тем, что приходящая в искомый узел характеристика (стрелка на рис. 61) при любых  $\tau$  и  $h$  пересекает отрезок, соединяющий исходные узлы (пунктир на рисунке).



Схема (12) интерпретируется тоже как интерполяция, но не двухточечная линейная, а трехточечная квадратичная (что, естественно, приводит к более высокому порядку точности). Какую бы сторону ячейки на рис. 59 ни пересекала проходящая в узел  $(x_n, t_{m+1})$  характеристика — горизонтальную или вертикальную, эта сторона связывает узлы с ранее вычисленными значениями  $y$ ; поэтому экстраполяции здесь нет, что приводит к безусловной устойчивости схемы (12).

Таким образом, прослеживая положение характеристик, нетрудно так выбрать шаблон и составить на нем разностную схему, чтобы схема была устойчива. Приведем несколько примеров.

**Явно-неявная схема.** Будем считать, что шаги по времени  $\tau_m = t_{m+1} - t_m$  и по пространству  $h_n = x_{n+1} - x_n$  не постоянны, а коэффициент  $c(x, t)$  уравнения (3) переменный. Приступая к вычислению  $\hat{y}_n$ , проверим критерий Куранта (14) в данной ячейке. Если он выполнен, то проведем вычисления по схеме (9):

$$\frac{1}{\tau_m} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{\hat{c}_n}{h_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) = \varphi_n \quad \text{при} \quad \hat{c}_n \tau_m \leq h_{n-1}. \quad (22a)$$

В противном случае воспользуемся схемой (10):

$$\frac{1}{\tau_m} (\hat{y}_{n-1} - y_{n-1}) + \frac{\hat{c}_n}{h_{n-1}} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) = \varphi_n \quad \text{при} \quad \hat{c}_n \tau_m > h_{n-1}. \quad (22b)$$

Очевидно, явно-неявная схема (22) безусловно устойчива, причем ее невязка меньше, чем у безусловно устойчивой схемы (11). Схему (22) обычно применяют в тех случаях, когда точное решение является недостаточно гладким или быстропеременным.

**Схема без шаблона.** Проведем через искомый узел  $(x_n, t_{m+1})$  характеристику и определим точку ее пересечения с исходным слоем  $\bar{x} = x_n - c\tau$ . Найдем на исходном слое такую пару узлов  $x_p, x_{p+1}$ , между которыми заключена точка  $\bar{x}$ . Определим  $y(\bar{x})$  линейной интерполяцией по значениям  $y_p, y_{p+1}$ :

$$y(\bar{x}) = \frac{x_{p+1} - \bar{x}}{x_{p+1} - x_p} y_p + \frac{\bar{x} - x_p}{x_{p+1} - x_p} y_{p+1}, \quad x_p \leq \bar{x} < x_{p+1}. \quad (23)$$

Перенесем вычисленное значение по характеристике в искомый узел, т. е. положим  $\hat{y}_n = y(\bar{x})$ . Очевидно, схема (23) абсолютно устойчива; но по точности и удобству вычислений она уступает схеме (22) и поэтому редко применяется.

В схеме (23) положение узлов  $p, p+1$  относительно узла  $n$  не фиксировано. Если скорость  $c(x, t)$  переменна или сетка  $x_n$  неравномерна, то  $n-p$  будет непостоянной величиной. Таким образом, эта схема не имеет шаблона.

Случай  $c < 0$ . В этом случае наклон характеристик на плоскости  $(x, t)$  отрицателен; характеристики зеркально отражены относительно вертикали по сравнению со случаем  $c > 0$ . Соответственно меняется постановка задачи: для отрезка  $0 \leq x \leq a$  граничное условие теперь должно задаваться справа, при  $x = a$ .

Очевидно, шаблоны для устойчивых схем можно получить зеркальным отражением соответствующих шаблонов рис. 56—59. Например, вместо шаблона рис. 56 берут шаблон рис. 62, получая устойчивую при  $|c|\tau \leq h$  схему. Направление бегущего счета также меняется: расчет на каждом слое ведут справа налево.

Отметим, что шаблоны рис. 57 и 58 зеркальны друг другу; это означает, что при  $c < 0$  схема (10) становится безусловно устойчивой, а схема (11) — условно устойчивой. Симметричная схема (12) не меняется при отражении, так что она устойчива при любом знаке скорости; но направление счета, разумеется, зависит от знака скорости.

Знакопеременная  $c(x, t)$ . В этом случае задача в области  $G(x, t)$  поставлена корректно, если заданы значения решения на тех и только тех границах, с которых характеристики идут внутрь области.

Пусть, например, скорость  $c(x, t)$  непрерывна в области  $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$  и меняет знак только при  $x = \tilde{x}$ , причем  $c(0, t) > 0$ ,  $c(a, t) < 0$ . Вид характеристик в этом случае изображен на рис. 63. Корректной будет постановка задачи с двумя граничными условиями:

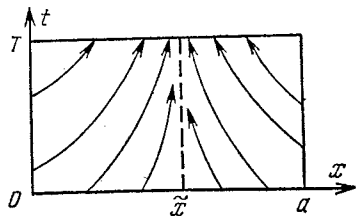


Рис. 63.

$$\begin{aligned} u_t + c(x, t) u_x &= f(x, t), \\ u(x, 0) &= \mu_1(x), \\ u(0, t) &= \mu_2(t), \\ u(a, t) &= \mu_3(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Фактически здесь имеется зона влияния каждой границы; эти зоны разделены линией  $x = \tilde{x}$  (пунктир на рисунке). В каждой зоне можно построить схему бегущего счета со своим направлением движения.

Можно поступить и иначе. Возьмем шаблон рис. 64 и построим на нем неявную схему

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{\hat{c}_n}{2h} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_{n-1}) = \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (25)$$

По направлению характеристики (стрелки на рисунке) видно,

что при любом знаке  $c$  и любых шагах  $\tau$  и  $h$  значение  $\hat{y}_n$  вычисляется интерполяцией. Методом разделения переменных нетрудно показать, что схема (25) безусловно устойчива при любом знаке  $c$ .

Схема (25) содержит три точки нового слоя. В главе IX отмечалось, что в подобных случаях разностное решение находят прогонкой. Достаточное условие устойчивости прогонки (5.14) в этом случае выполняется только при  $|c|\tau \leq h$ , хотя обычно можно вести расчет и при нарушении этого условия.

З а м е ч а н и е. Геометрическая интерпретация дает необходимое, но не достаточное условие устойчивости. Например, рассмотрим явную схему на шаблоне рис. 65:

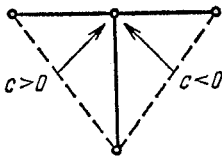


Рис. 64.

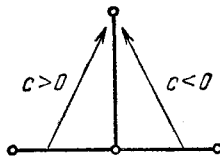


Рис. 65.

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c}{2h} (y_{n+1} - y_{n-1}) = \Phi_n. \quad (26)$$

При  $|c|\tau \leq h$  она соответствует интерполяции на исходном слое. Однако она неустойчива при любом соотношении шагов (абсолютно неустойчива), что легко доказать методом разделения переменных. В самом деле, подставляя в (26)

$$\Phi_n = 0, \quad y_n = e^{iqx}, \quad y_{n\pm 1} = e^{iq(x \pm h)}, \quad \hat{y}_n = \rho y_n,$$

получим множитель роста отдельной гармоник:

$$\rho_q = 1 - \frac{c\tau}{h} \cos qh.$$

Для гармоник с  $\cos qh = -1$  этот множитель  $\rho_q = 1 + (c\tau/h)$  неограниченно велик при  $h \rightarrow 0$ . Значит, устойчивости нет.

Поэтому геометрическую интерпретацию используют как способ быстрой оценки качества шаблона и схемы и отбраковки заведомо плохих схем. Устойчивость выбранных при ее помощи схем обязательно проверяют методами, изложенными в главе IX (в большинстве случаев отобранные этим способом схемы оказываются устойчивыми).

**4. Многомерное уравнение.** Схемы бегущего счета естественно обобщаются на многомерное уравнение переноса. Рассмотрим, для определенности, задачу с двумя пространственными переменными в области  $G = [0 \leq x_1 \leq a] \times [0 \leq x_2 \leq b] \times [0 \leq t \leq T]$ :

$$u_t + c_1 u_{x_1} + c_2 u_{x_2} = f(x_1, x_2, t); \quad (27a)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \mu_1(x_1, x_2), \quad u(0, x_2, t) = \mu_2(x_2, t), \quad (27b)$$

$$u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t).$$

Скорости переноса по осям  $x_1$ ,  $x_2$  считаем положительными и, для простоты, постоянными.

Построим, например, многомерный аналог абсолютно устойчивой схемы (11). Введем по переменной  $x_1$  сетку  $\{x_{1n}, 0 \leq n \leq N\}$ , а по переменной  $x_2$  — сетку  $\{x_{2m}, 0 \leq m \leq M\}$ . Значения решения в узлах этой сетки обозначим следующим образом:

$$u(x_{1n}, x_{2m}, t) = u_{nm}, \quad u(x_{1n}, x_{2m}, t + \tau) = \hat{u}_{nm}. \quad (28)$$

Возьмем шаблон, изображенный жирными линиями на рис. 66, и составим на нем схему

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_{nm} - y_{nm}) + \frac{c_1}{h_1} (\hat{y}_{nm} - \hat{y}_{n-1, m}) + \frac{c_2}{h_2} (\hat{y}_{nm} - \hat{y}_{n, m-1}) = \varphi_{nm}, \quad (29)$$

где  $h_1$ ,  $h_2$  — шаги по соответствующим направлениям.

Исследовать схему (29) несложно. Из принципа максимума сразу следует безусловная устойчивость этой схемы. Ее невязка определяется разложением по формуле Тейлора и равна  $O(\tau + h_1 + h_2)$ . Следовательно, схема (29) сходится в  $\|\cdot\|_c$  с первым порядком точности\*).

Вычисления проводятся послойно. Значение  $\hat{y}_{nm}$  в узле, отмеченном на рис. 66 двойным кружком, выражается по формуле (29) через значения в нескольких других вершинах ячейки. Когда решение на слое  $t$  вычислено, то его значения на слое  $t + \tau$  можно вычислять по этой формуле вдоль направлений  $x_1$  (см. рис. 67, а, где последовательность вычислений указана стрелками).

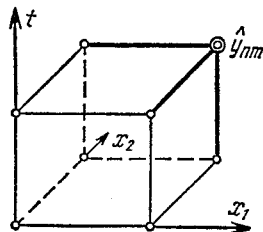


Рис. 66.

Заметим, что последовательность вычислений может быть иной. Например, можно вести расчет на слое вдоль направлений  $x_2$  (рис. 67, б). В принципе, не обязательна даже послойная организация расчета; достаточно, чтобы последовательность расчета соответствовала какому-то порядку заполнения первого координатного угла в пространстве  $(x_1, x_2, t)$  ячейками, при котором новая ячейка прикладывается тремя гранями к ранее уложенным ячейкам или координатным плоскостям.

Двумерный аналог симметричной схемы (12), имеющий второй порядок точности, нетрудно написать методом баланса. Для этого проинтегрируем уравнение (27а) по ячейке, преобразуем трехкратные интегралы в двукратные и вычислим последние по формуле трапеций. Детали настолько очевидны, что мы на них не будем останавливаться.

\* Разумеется, если решение дважды непрерывно дифференцируемо. В дальнейшем обычно будем опускать такие оговорки, подразумевая существование у решения требуемого числа непрерывных производных.

Таким образом, в уравнении переноса многомерность не приводит к принципиальным усложнениям. Вычислительный алгоритм остается простым и экономичным. В декартовых координатах даже формулы расчета имеют обычно простой вид, хотя в криволинейных координатах (цилиндрических, сферических и т. д.) они могут быть громоздкими.

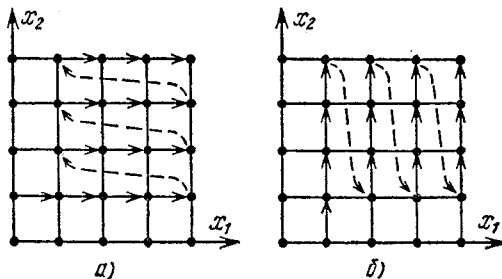


Рис. 67.

**5. Перенос с поглощением.** Для неоднородного уравнения переноса (3) от способа аппроксимации правой части  $f(x, t)$  зависит только порядок аппроксимации. Для получения схемы второго порядка (12) следует выбирать  $\varphi_n$  так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi_n - f\left(x_n - \frac{h}{2}, t_m + \frac{\tau}{2}\right) = O(\tau^2 + h^2).$$

В схемах первого порядка достаточно было требовать, чтобы

$$\varphi_n - f\left(x_n - \frac{h}{2}, t_m + \frac{\tau}{2}\right) = O(\tau + h),$$

для этого можно, например, положить  $\varphi_n$  равным  $f(x, t)$  в любой точке ячейки. На устойчивость выбор  $\varphi_n$  не влияет.

Положение несколько изменится, если правая часть  $f$  зависит от решения  $u$ . Рассмотрим это на примере простейшей линейной зависимости  $f = -bu$ , когда уравнение переноса принимает вид

$$u_t + cu_x = -bu. \quad (30)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде  $u(x, t) = v(x, t) \exp(-bt)$ . Подставляя его в (30), получим для  $v(x, t)$  однородное уравнение переноса  $v_t + cv_x = 0$ , общее решение которого является бегущей волной  $v(x, t) = v(x - ct, 0)$ . Следовательно, общее решение задачи Коши для уравнения (30) имеет вид

$$u(x, t) = e^{-bt} v(x - ct, 0). \quad (31)$$

Оно описывает перенос частиц по характеристикам при наличии поглощения (если  $b > 0$ ) или размножения (если  $b < 0$ ) частиц.

Дальше мы ограничимся случаем  $b > 0$ , когда точное решение экспоненциально убывает со временем. Рассмотрим два варианта явной схемы (9):

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c}{h} (y_n - y_{n-1}) = -b \hat{y}_n, \quad (32)$$

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{c}{h} (y_n - y_{n-1}) = -b y_n, \quad (33)$$

отличающиеся только аппроксимацией члена с поглощением. Обе схемы имеют первый порядок аппроксимации. Исследуем их устойчивость методом разделения переменных.

Делая стандартную подстановку гармоник  $\exp(iqx)$ , получим для схемы (32) множитель роста

$$\rho_q = \frac{1}{1 + b\tau} \left[ 1 - \frac{c\tau}{h} (1 - e^{-iqh}) \right].$$

Если выполнено условие Куранта  $c\tau \leq h$ , то для любых гармоник справедливо неравенство  $|\rho_q| \leq (1 + b\tau)^{-1} < 1$ , так что схема (32) не только устойчива, но и хорошо обусловлена: ошибки не нарастают, а неограниченно убывают при  $t \rightarrow \infty$ .

Для схемы (33) множитель роста

$$\rho_q = 1 - \frac{c\tau}{h} (1 - e^{-iqh}) - b\tau.$$

Если положить  $c\tau = h$ , то для гармоник с  $\exp(-iqh) = -1$  выполняется соотношение  $|\rho_q| = 1 + b\tau$ , т. е. устойчивость слабая. Таким образом, характер устойчивости схем (32) и (33) является не вполне одинаковым.

Это различие проявляется сильнее, если рассмотреть асимптотическую устойчивость схем (соответствующую поведению относительной погрешности  $\|\delta y\|/\|u\|$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Точное решение убывает, как  $e^{-bt}$ , так что его гармоники за один шаг затухают, как  $e^{-b\tau} \approx (1 + b\tau)^{-1}$ . Гармоники схемы (32) затухают не медленнее, так что схема (32) асимптотически устойчива при  $c\tau \leq h$ . Наоборот, у схемы (33) при  $c\tau = h$  нет асимптотической устойчивости: гармоника с  $\exp(-iqh) = -1$  не только не убывает, а даже возрастает.

Этот пример показывает, что на устойчивость может влиять способ аппроксимации не только высших производных данного уравнения, но и всех остальных членов.

**З а м е ч а н и е.** Общее решение (31) положительно, если начальные данные были положительны. Нетрудно показать, что схема (32) сохраняет это свойство общего решения. Если же схему (33) переписать в форме

$$\hat{y}_n = \left( 1 - \frac{c\tau}{h} - b\tau \right) y_n + \frac{c}{h} y_{n-1},$$

то нетрудно видеть, что при достаточно большом коэффициенте  $b > 0$  (и не слишком малом шаге  $\tau$ ) возможны случаи, когда  $\hat{y}_n$  становится отрицательным при  $y_n, y_{n-1} > 0$ . Фактически это приводит к дополнительному ограничению на шаг  $\tau$  схемы (33). В задачах с сильным поглощением это ограничение, формально не связанное с устойчивостью, может оказаться достаточно жестким.

**6. Монотонность схем.** В п. 1 отмечалось, что решение однородного уравнения переноса (3), соответствующее монотонным начальным данным, в любой момент времени имеет монотонный профиль. Сохраняется ли это свойство у разностного решения? Иными словами, пусть профиль  $y_n$  монотонен; будет ли монотонным профиль  $\hat{y}_n$ ?

Однородные разностные схемы, сохраняющие монотонность профиля разностного решения, называются *монотонными*.

**Признак монотонности.** *Явная двуслойная линейная однородная схема*

$$\hat{y}_n = \sum_l \beta_l y_{n+l} \quad (34)$$

*монотонна тогда и только тогда, когда все  $\beta_l \geq 0$ .*

*Доказательство.* Из (34) следует равенство

$$\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n = \sum_l \beta_l (y_{n-1+l} - y_{n+l}). \quad (35)$$

Если профиль  $y_n$  монотонен (для определенности — невозрастающий), то все скобки в правой части (35) неотрицательны. Тогда, если все  $\beta_l \geq 0$ , то  $\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n \geq 0$  и профиль  $\hat{y}_n$  также невозрастающий. Достаточность условия  $\beta_l \geq 0$  доказана.

Предположим, что хотя бы один коэффициент  $\beta_k < 0$ . Выберем такой невозрастающий профиль:

$$y_{n+l} = 1 \quad \text{при } l \leq k-1,$$

$$y_{n+l} = 0 \quad \text{при } l \geq k.$$

Подставляя его в (35), получим

$$\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n = \beta_k (y_{n-1+k} - y_{n+k}) = \beta_k < 0,$$

т. е. монотонность нарушена: имеется локальное возрастание профиля  $\hat{y}_n$ . Необходимость условия  $\beta_l \geq 0$  доказана.

**Замечание 1.** Признак монотонности относится к разностным схемам, аппроксимирующим как уравнение переноса, так и любые другие типы уравнений.

**Замечание 2.** Если двуслойная линейная однородная схема неявна, то ее можно преобразовать к явной форме (34), где пре-

дела суммы по  $l$  бесконечны, и затем применить признак монотонности.

**Теорема.** *Двуслойная линейная монотонная схема для уравнения переноса  $u_t + cu_x = 0$  не может иметь второй или более высокий порядок точности.*

**Доказательство.** Предположим, что имеется линейная монотонная схема второго (или более высокого) порядка точности. Запишем ее в форме (34), где все  $\beta_l \geq 0$ . Построим равномерную сетку  $x_n = nh$ .

Выберем в качестве начальных данных задачи Коши квадратичную функцию

$$u(x, 0) = \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad y_n^0 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0. \quad (36)$$

В этом случае решение есть также квадратичная функция и его третьи производные равны нулю. Невязка схем второго порядка точности выражается через третьи производные. Поэтому при квадратичных начальных данных (36) разностное решение для нашей схемы должно совпадать с точным решением.

На первом слое точное и разностное решения равны соответственно

$$u(x, \tau) = \left(\frac{x - c\tau}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad y_n^1 = \left(n - \frac{c\tau}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (37)$$

Подставляя разностные решения на исходном (36) и новом (37) слоях в разностную схему (34), получим равенство

$$\left(n - \frac{c\tau}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \sum_l \beta_l \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right].$$

В правой части этого равенства стоит неотрицательная величина. Но левая часть при не целом  $c\tau/h$  в одной из точек  $x_n$  отрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему.

**Следствие.** *Линейные монотонные схемы для уравнения переноса могут иметь только первый порядок точности.*

**Примеры.** Схема (9) явная, и при выполнении условия устойчивости  $c\tau \leq h$  ее коэффициенты неотрицательны. Следовательно, она монотонна.

Безусловно устойчивая схема (11) неявная. Запишем ее в следующем виде:

$$\hat{y}_n = \frac{1}{h + c\tau} (c\tau \hat{y}_{n-1} + h y_n). \quad (38)$$

Уменьшая индексы на единицу, получим выражение  $\hat{y}_{n-1}$  через  $\hat{y}_{n-2}$ . Подставим его в правую часть (38). Продолжая процедуру



уменьшения индекса, приведем схему к явной форме:

$$\hat{y}_n = \frac{h}{h+c\tau} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{c\tau}{h+c\tau} \right)^l y_{n-l}. \quad (39)$$

Все коэффициенты здесь положительны; следовательно, схема (11) монотонна при любых  $\tau$  и  $h$ .

Схема (12) линейна и имеет второй порядок точности на трижды непрерывно дифференцируемых решениях уравнения переноса. Из теоремы следует, что эта схема немонотонна.

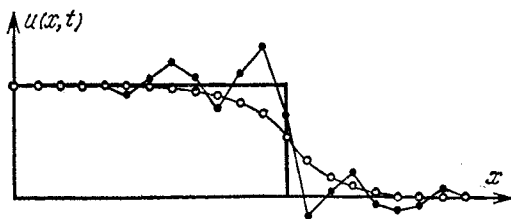


Рис. 68.

Различие монотонных и немонотонных схем особенно четко проявляется при расчетах задач с разрывными точными решениями (см. рис. 68, жирная линия — точное решение). Расчет по монотонной схеме (11) дает сглаженное разностное решение (кружки), а расчет по немонотонной схеме (12) — характерную «разболтку» (точки); эта «разболтка» не является неустойчивостью.

Сходную «разболтку» дают немонотонные схемы на быстропеременных решениях; особенно если шаг сетки не мал. Именно поэтому приходится решать подобные задачи при помощи монотонных схем, несмотря на их невысокую точность  $O(\tau + h)$ .

Наоборот, если решение достаточно гладкое и шаг сетки мал, то даже расчет по немонотонным схемам не нарушает монотонности решения. Например, для схем второго порядка точности монотонность разностного решения обычно сохраняется, если  $|hu_{xx}/u_x| \lesssim 1$ . В этих случаях для расчетов используют схемы точности  $O(\tau^2 + h^2)$  или более высокой.

Таким образом, фактически немонотонность проявляется на сетках со сравнительно большим шагом. Особенно сильно она сказывается при расчетах многомерных задач, ибо для них скорость или объем оперативной памяти даже лучших ЭВМ не позволяют брать малый шаг. В то же время расчет таких задач по монотонным схемам с погрешностью  $O(\tau + h)$  дает хорошее качественное поведение разностного решения, но невысокую точность.

Теорема о монотонности доказана только для линейных схем. Были попытки построить нелинейные монотонные схемы второго порядка точности.

В частности, были предложены нелинейные монотонные схемы [70], имеющие на достаточно гладких решениях аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$  почти во всех точках; эффективный порядок точности этих схем, определенный на задачах-тестах, близок ко второму при большом  $h$  и стремится к первому при  $h \rightarrow 0$ . Эти схемы дают неплохие результаты при расчетах многомерных задач с быстро-переменными решениями.

Другое перспективное направление связано с использованием схем третьего порядка точности. Как показали исследования, их фактическая немоно-тонность на разрывных решениях существенно слабее, чем у схем второго по-рядка точности: амплитуда «разболтки» меньше, и «разболтка» быстро затухает при удалении от разрыва.

**7. Диссипативные схемы.** Когда устойчивость линейных раз-ностных схем исследуется методом разделения переменных, то для каждой гармоники определяют ее множитель роста  $\rho_q$  при переходе со слоя на слой. Отметим, что число пробных гармоник не бесконечно. Поскольку рассматривается разностная, т. е. ди-скретная, задача Фурье на сетке  $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ , то надо исполь-зовать только гармоники  $\exp(2\pi i q/N)$ ,  $0 \leq q \leq N-1$ , образующие полную систему по отношению к функциям, периодическим на этой сетке.

Схема устойчива, если

$$|\rho_q| \leq 1 + \alpha_q \tau \approx \exp(\alpha_q \tau),$$

где  $\alpha_q$  — не зависящие от  $h$  константы. Если хотя бы у одной гармоники  $\alpha > 0$ , то устойчивость слабая. Если для всех гармо-ник  $\alpha < 0$ , то схема заведомо хорошо обусловлена; но это тре-бование слишком жесткое, и ему удовлетворяет очень мало схем. Рассмотрим более мягкое требование, также обеспечивающее хо-рошую обусловленность.

*Схема обладает аппроксимационной вязкостью, если  $\alpha_q < 0$  при  $q \neq 0$  и  $\alpha_0 = 0$ .*

Это требование реализуется у многих схем. Например, схема (9) имеет множитель роста (15), который с учетом замечания об ограниченности числа гармоник принимает вид

$$\rho_q = 1 - \frac{c\tau}{h} (1 - e^{-2\pi qi/N}), \quad 0 \leq q \leq N-1.$$

Легко проверить, что если  $c\tau < h$ , то  $\rho_0 = 1$  и  $|\rho_q| < 1$  при  $q = 1, 2, \dots, N-1$ . Если  $c\tau = h$ , то для всех гармоник  $|\rho_q| = 1$ . При  $c\tau > h$  большинство гармоник неограниченно растет. Таким образом, схема (9) обладает аппроксимационной вязкостью при  $c\tau < h$ ; это условие почти совпадает с условием устойчивости.

Аналогично доказывается, что схема (10) обладает аппрокси-мационной вязкостью при  $c\tau > h$ , а схема (11) — при любом соот-ношении шагов  $\tau$  и  $h$ .

У схемы второго порядка точности (12) множитель роста (18) таков, что  $|\rho_q| = 1$  для всех гармоник. Следовательно, схема (12) не обладает аппроксимационной вязкостью.

При наличии аппроксимационной вязкости гармоники с  $q \neq 0$  затухают, напоминая тем самым точное решение (9.7a) параболического уравнения. В точном решении параболического уравнения разрывы начальных данных сглаживаются со временем. Из рис. 68 было видно, что расчет по схеме с аппроксимационной вязкостью (11) приводит к аналогичному сглаживанию разрыва начальных данных, а расчет по схеме без аппроксимационной вязкости (12) — нет.

Понятие аппроксимационной вязкости применимо к линейным схемам. Для произвольных разностных схем, как линейных, так и нелинейных, можно ввести понятие первого дифференциального приближения.

Пусть дифференциальное уравнение  $Au = f$  имеет решение, у которого непрерывны производные достаточно высокого порядка, и составлена разностная схема  $A_h u = \varphi$  порядка аппроксимации  $p$ . Невязка этой схемы выражается через некоторые производные от решения  $u(x)$ , и ее можно представить в следующем виде:

$$\psi(x) \equiv Au - A_h u + \varphi - f = h^p B u + o(h^p), \quad (40)$$

где  $B$  — некоторый дифференциальный оператор (обычно оператор  $B$  содержит производные, порядок которых на  $p$  превышает порядок старших производных дифференциального оператора  $A$ ). Запишем равенство (40) двумя способами:

$$A_h u - \varphi = Au - f + O(h^p),$$

$$A_h u - \varphi = Au - h^p B u - f + o(h^p).$$

Это означает, что разностная схема  $A_h u = \varphi$  аппроксимирует дифференциальное уравнение  $Au = f$  с порядком  $p$  и аппроксимирует уравнение  $(A - h^p B)u = f$  с порядком выше  $p$ .

Первым дифференциальным приближением разностной схемы  $A_h u = \varphi$  называют уравнение

$$(A - h^p B)u = f, \quad B u = \lim_{h \rightarrow 0} [h^{-p} \psi(x)]. \quad (41)$$

Разностная схема аппроксимирует свое первое дифференциальное приближение более точно, чем исходное уравнение. Поэтому следует ожидать, что свойства разностного решения будут во многом напоминать свойства точных решений уравнения (41).

Пусть уравнение (41) является диссипативным, т. е. описывает какой-либо физический процесс с затуханием: теплопроводность (это сильное затухание), колебания в вязкой среде (слабое затухание) и т. д. Такие процессы приводят к более или менее быстрому сглаживанию разрывов начальных данных.

Обычно в этих случаях разностное решение тоже имеет сглаженный вид.

Наоборот, если уравнение (41) является недиссипативным, например чисто колебательным, то разрывы его решений не сглаживаются. В разностном решении при этом легко возникает слабо затухающая (или совсем не затухающая) «разболтка».

Примеры. Рассмотрим однородную разностную схему (9), полагая  $f = \varphi = 0$ . Ее невязка (13) принимает вид  $\psi = (cu_{xx} - \tau u_{tt})/2$ . Учитывая, что для однородного уравнения переноса (3) выполняется условие  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , преобразуем невязку к виду  $\psi = c(h - c\tau) u_{xx}/2$ . Отсюда легко получить первое дифференциальное приближение разностной схемы (9):

$$u_t = \frac{c}{2} (h - c\tau) u_{xx} - cu_x. \quad (42)$$

Если  $c\tau < h$ , то уравнение (42) относится к параболическому типу. Действительно, выше было показано, что расчет по разностной схеме (9) приводит к сглаживанию разрывов (если  $c\tau < h$ ).

Случай  $c\tau > h$  для уравнения (42) соответствует обратной задаче теплопроводности, которая относится к некорректно поставленным задачам. С этим обстоятельством связана неустойчивость схемы (9) при нарушении условия Куранта.

Рассмотрим однородную разностную схему (12). Если учесть, что для однородного уравнения переноса выполняется соотношение

$$u_{ttt} = -cu_{ttx} = c^2 u_{txx} = -c^3 u_{xxx},$$

то главный член невязки (17) этой схемы принимает вид  $\psi = c(h^2 - c^2\tau^2) u_{xxx}/12$ . Следовательно, ее первым дифференциальным приближением является уравнение

$$u_t + cu_x - \frac{1}{12} c (h^2 - c^2\tau^2) u_{xxx} = 0, \quad (43)$$

которое не содержит диссипативных членов. Действительно, из рис. 68 было видно, что схема (12) не сглаживает разрывы решения.

Если разностная схема обладает аппроксимационной вязкостью или ее первое дифференциальное приближение является уравнением с диссипативными членами, то схему называют *диссипативной*. Обычно в расчетах по таким схемам разболтки не возникает или она невелика; поэтому понятие диссипативности плодотворно используется при качественном анализе разностных схем. Однако это понятие не является строгим, и полученные при его помощи выводы надо проверять другими методами.

## § 2. Квазилинейное уравнение

**1. Сильные и слабые разрывы.** Решение линейного уравнения переноса может иметь разрывы только в том случае, если они содержатся в начальных или граничных данных. В квазилинейном уравнении даже при непрерывных и достаточно гладких начальных данных могут возникать разрывы решения. Характер этих разрывов удобно исследовать на простейшем квазилинейном уравнении переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x, t, u > 0, \quad (44)$$

которым мы и ограничимся в данном параграфе. Оно напоминает линейное уравнение переноса, в котором роль скорости переноса играет величина самого решения  $u(x, t)$ .

Полная постановка задачи при знакопеременной скорости сложна; мы рассмотрим только наиболее важный случай  $u > 0$ .

Тогда начальные и граничные значения решения, заданные на положительных полуосях координат  $x, t$ , определяют решение в первом квадранте. Эти значения переносятся по характеристикам  $x - ut = \text{const}$ . Рассмотрим характер решения при четырех основных типах начальных данных.

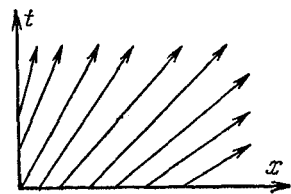


Рис. 69.

**Первый случай.** Начальные и краевые значения — непрерывные функции, причем  $u(x, 0)$  монотонно не убывает,  $u(0, t)$  монотонно не возрастает и они непрерывно согласованы в начале координат.

Наклон (тангенс угла наклона) характеристик в каждой точке плоскости  $(x, t)$  равен  $1/u(x, t)$ . В данном случае наклон монотонно и непрерывно убывает слева направо. Поэтому первый квадрант всюду плотно покрыт характеристиками (рис. 69), причем через каждую его точку проходит одна и только одна характеристика. Эта характеристика переносит в данную точку граничное значение. Решение однозначно определено и непрерывно во всем первом квадранте. Если краевые значения гладки (и согласованы в начале координат), то решение также будет гладким.

**Второй случай.** Краевые значения монотонны указанным выше образом, но имеют разрывы. Для простоты положим  $u(0, t) = a$ ,  $u(x, 0) = a$  при  $x < x_0$ ,  $u(x, 0) = b > a$  при  $x > x_0$ , так что разрыв не нарушает предыдущее условие монотонности.

Левее разрыва характеристики на плоскости  $(x, t)$  имеют наклон  $1/a$ , а правее разрыва — меньший наклон  $1/b$  (рис. 70, а).

Проведем обе характеристики из точки разрыва начальных данных; на рисунке они показаны жирными стрелками. Левее левой и правее правой из них через каждую точку плоскости проходит одна и только одна характеристика, т. е. решение определено и единственно. А между ними нет ни одной характеристики и решение не определено.

Потребуем корректности задачи, т. е. устойчивости решения относительно бесконечно малых возмущений начальных данных. Это позволит нам доопределить решение. Сгладим разрыв начальных данных, заменив его непрерывным монотонным переходом на бесконечно узком интервале. Тогда в пустом угле появится «веер» характеристик и наклон каждой характеристики определит значение решения на ней (рис. 70, б).

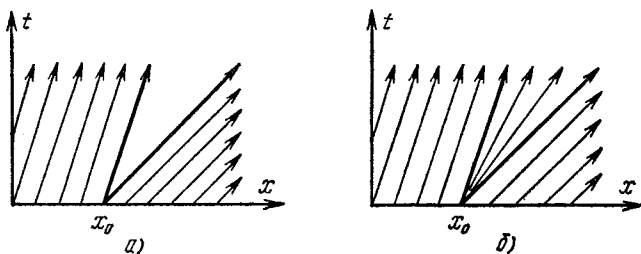


Рис. 70.

Легко видеть, что доопределенное решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a && \text{при } x - x_0 \leq at, \\ u(x, t) &= (x - x_0)/t && \text{при } at \leq x - x_0 \leq bt, \\ u(x, t) &= b && \text{при } bt \leq x - x_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Поэтому оно непрерывно на всей плоскости, кроме точки  $x = x_0$ ,  $t = 0$ . Значит, такой разрыв начальных данных сглаживается со временем. Но след разрыва остается: на жирных характеристиках производные решения будут разрывны. Во всех остальных точках решение будет гладким, если начальные данные были гладкими.

Разрыв производных называют *слабым разрывом* решения. Слабые разрывы квазилинейного уравнения переноса распространяются по характеристикам, как и в линейном уравнении переноса.

Третий случай. Пусть нарушено данное выше условие монотонности. Опять положим  $u(x, 0) = a$  при  $x < x_0$ ,  $u(x, 0) = b$  при  $x > x_0$ , но теперь потребуем, чтобы  $a > b > 0$ . Тогда характеристики будут иметь вид, изображенный на рис. 71.

В угле, образованном жирными характеристиками, через каждую точку проходят две характеристики, приносящие в нее разные значения функции! Вне этого угла решение однозначно определено, а внутри угла оно неоднозначно.

В этом случае непрерывное решение построить не удастся. Сглаживание разрыва начальных данных не помогает: ход характеристик на некотором расстоянии от точки  $x=x_0$ ,  $t=0$  все равно не меняется, так что неоднозначность остается. Значит, однозначное решение должно быть разрывным, т. е. оно будет обобщенным решением дифференциального уравнения.

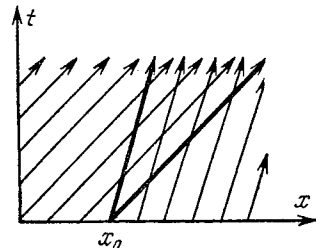


Рис. 71.

Обобщенное решение удовлетворяет некоторому интегральному уравнению, которое получается из определенной дивергентной формы записи данного дифференциального уравнения. Разные дивергентные формы записи одного и того же уравнения приводят к разным разрывным решениям, хотя гладкие решения для всех дивергентных форм одинаковы. Дивергентная форма, соответствующая физическому закону сохранения, определяет правильное решение (его называют также *допустимым*).

Уравнение (44) не имеет физического смысла, и естественного закона сохранения для него нет. Постулируем такую дивергентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (46)$$

Будем искать решение, имеющее единственный разрыв. Пусть наклон линии разрыва соответствует скорости  $D$ , т. е. разрыв бежит, как волна. По поведению характеристик видно (рис. 72), что искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a \text{ при } x - x_0 < Dt, \\ u(x, t) &= b \text{ при } x - x_0 > Dt. \end{aligned} \quad (47)$$

Проинтегрировав (46) по площади прямоугольника со сторонами  $\tau$  и  $h = D\tau$ , получим

$$\int (\hat{u} - u) dx + \frac{1}{2} \int (u_{\text{прав}}^2 - u_{\text{лев}}^2) dt = (a - b)h + \frac{1}{2} (b^2 - a^2)\tau = 0.$$

Отсюда скорость распространения разрыва равна

$$D = \frac{1}{2} (a + b), \quad (48)$$

Разрыв самого решения называют *сильным разрывом* (а в газодинамике — ударной волной). Сильный разрыв квазилинейного уравнения распространяется не по характеристике. В теории квазилинейных уравнений доказывается, что только такое обобщенное решение устойчиво относительно малых возмущений начальных данных.

Четвертый случай, когда функция  $u(x, 0)$  непрерывна, но убывает на каком-то интервале, сводится к третьему. По-прежнему пересечение характеристик приводит к образованию сильного разрыва (рис. 73). Местная скорость разрыва будет определяться по формуле типа (48) приносимыми в данную точку значениями решения и уже не будет постоянной. Существенно,

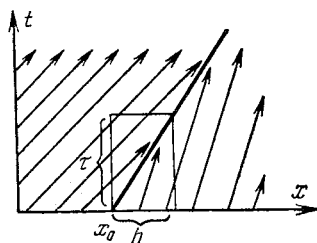


Рис. 72.

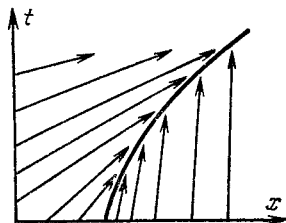


Рис. 73.

что здесь при непрерывных и гладких начальных данных с течением времени возникают сильные разрывы решения. Число разрывов со временем тоже может измениться.

Замечание 1. Если вместо (46) мы постулируем другой закон сохранения, например:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\ln u) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (49)$$

то скорость ударной волны изменится. Но для слабых ударных волн, на которых решение мало меняется, скорость ударной волны будет отличаться от (48) в  $1 + O(\varepsilon^2)$  раз, где

$$\varepsilon = (b - a)/(b + a),$$

т. е. изменится очень мало.

Замечание 2. Разрывные решения линейных уравнений можно рассматривать как предел последовательности непрерывных и гладких решений. Для квазилинейных уравнений это сделать не удастся.

**2. Однородные схемы.** Выше встречались случаи, когда на недостаточно гладких решениях (т. е. имеющих малое число непрерывных производных) порядок аппроксимации и порядок



точности разностной схемы был ниже, чем на более гладких решениях. Особенно сильно ухудшается точность расчета, если искомое решение содержит сильные или слабые разрывы; некоторые разностные схемы при этом приводят даже к грубо ошибочным результатам.

Удовлетворительные результаты на таких решениях дают два типа схем — однородные схемы (которые не надо путать с линейными однородными схемами для линейных однородных уравнений) и схемы с явным выделением особенностей решения.

Однородные схемы (называемые также схемами сквозного счета) более просты и широко распространены в практике численных расчетов. В этих схемах шаблон и разностные аналоги производных выбираются так, чтобы нужная аппроксимация была обеспечена всюду, в том числе и на особенностях решения. Поэтому весь расчет ведется по однотипным разностным уравнениям без явного выделения особенностей.

Например, из рис. 68 видно, что схема (11) позволяет рассчитывать перенос разрывных начальных данных без явного выделения этого разрыва.

Однородные схемы не громоздки, требуют умеренного объема вычислений, и каждая хорошая схема пригодна для широкого класса задач. Программы для ЭВМ, составленные на их основе, также позволяют без заметных переделок рассчитывать широкий круг задач. Зато точность расчета по однородным схемам обычно ниже, чем в схемах с выделением особенностей.

По однородным схемам успешно проводят расчеты даже таких сложных задач, как задачи многомерной магнитной газодинамики, в которых возникает большое число ударных, тепловых и других волн, являющихся разрывами.

Схемы с выделением особенностей. В них каждую особенность решения выделяют и детально описывают. В промежутках между особенностями решение непрерывно и достаточно гладко; в этих промежутках дифференциальное уравнение аппроксимируют разностной схемой.

Уравнения, описывающие особенности, служат своеобразными внутренними краевыми условиями, связывающими между собой разностные уравнения в соседних промежутках.

Особенности решения могут быть связаны с разрывами или нарушением гладкости начальных данных и коэффициентов уравнения, с возникновением ударных волн, с образованием слабых разрывов при столкновении ударной волны с какой-либо особенностью решения. Число особенностей с течением времени может меняться. К каждому типу особенностей нужен индивидуальный подход. Очевидно, явно учесть все особенности можно только в наиболее простых задачах.

Схемы с выделением даже небольшого количества особенностей очень громоздки. Они нестандартны, т. е. каждый сравнительно узкий класс задач требует разработки своей схемы расчета. Но зато их точность существенно выше, чем точность прочих схем. Поэтому их используют в задачах, имеющих мало существенных особенностей и требующих особенно высокой точности расчета. Такие схемы мы рассматривать не будем.

**3. Псевдовязкость.** Основную трудность для вычислений по разностным схемам представляют сильные разрывы решения. Эффективный прием расчета задач с разрывными решениями заключается в следующем. Подберем такую «малую» добавку к исходному уравнению, чтобы его разрывные решения превратились в непрерывные и достаточно гладкие. Тогда составить разностную схему для численного расчета этих гладких решений уже несложно.

Гладкие решения присущи уравнениям с диссипативными членами типа вязкого трения. Поэтому добавляемый в исходное уравнение член должен играть роль вязкости. Его называют *псевдовязкостью*, а также *искусственной* или *математической вязкостью*.

Рассмотрим подробно указанный способ на примере квазилинейного уравнения переноса (44). Заменим его следующим уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (50)$$

где последний член является псевдовязкостью, а коэффициент  $\varepsilon^2$  мал.

Очевидно, на дважды непрерывно дифференцируемых функциях последний член при малых  $\varepsilon$  невелик, так что для всех достаточно гладких решений исходного уравнения (44) найдутся близкие к ним гладкие решения уравнения (50).

Выясним, нет ли среди гладких решений уравнения (50) такого, которое напоминало бы ударную волну (47):

$$u(x, t) = \begin{cases} a & \text{при } x < Dt, \\ b < a & \text{при } x > Dt, \end{cases}$$

движущуюся со скоростью  $D = (a + b)/2$ . Будем искать автомодельное решение в виде бегущей волны

$$u_\varepsilon(x, t) = f(x - Dt).$$

Подставляя его в (50), получим

$$(\varepsilon^2 f'' + f - D) f' = 0.$$

Приравнявая каждый из сомножителей нулю, получим два типа решений:

$$f_1 = \text{const},$$

$$f_2 = D + \text{const} \cdot \sin \frac{x - Dt}{\varepsilon}.$$

Из них можно сконструировать решение, похожее на размытую

волну шириной  $\sim \varepsilon$ :

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} a & \text{при } x - Dt < -\frac{\pi\varepsilon}{2}, \\ \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \sin \frac{x-Dt}{\varepsilon} & \text{при } -\frac{\pi\varepsilon}{2} < x - Dt < \frac{\pi\varepsilon}{2}, \\ b & \text{при } \frac{\pi\varepsilon}{2} < x - Dt. \end{cases} \quad (51)$$

Это решение не только непрерывно, но даже имеет кусочно-непрерывную вторую производную. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  оно переходит в ударную волну (47).

Таким образом, и гладкие и разрывные решения исходного уравнения (44) можно рассматривать как предел соответствующих гладких решений уравнения (50) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Значит, вместо численного решения квазилинейного уравнения переноса можно численно решать уравнение (50) при достаточно малом  $\varepsilon$ . Решения последнего уравнения гладки, и их можно находить при помощи обычных однородных разностных схем.

Замечание 1. Коэффициент псевдовязкости обычно связывают с шагом сетки. Например, если в уравнении (50) положить

$$\varepsilon = \nu h, \quad \nu = \text{const}, \quad (52)$$

то любой сильный разрыв «размазывается» на одно и то же число  $\nu \approx 3\nu$  интервалов сетки. Тогда при  $h \rightarrow 0$  уравнение с псевдовязкостью (50) автоматически переходит в исходное уравнение (44), а сглаженная ударная волна (51) — в ударную волну (47).

Пример. Составим простейшую (далеко не лучшую) разностную схему для уравнения (50), а тем самым — и для уравнения (44); сетку для простоты предполагаем равномерной:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{h} y_n (y_n - y_{n-1}) + \frac{\varepsilon^2}{2h^3} [(y_{n+1} - y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2] = 0. \quad (53)$$

Это явная схема, так что разностное решение существует и единственно. Не проводя полного исследования схемы, определим только условие ее устойчивости.

Схема (53) нелинейна, поэтому сначала линеаризуем ее и получим уравнение для роста погрешности  $\delta y$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\delta \hat{y}_n - \delta y_n) + \frac{1}{h} \delta y_n (y_n - y_{n-1}) + \frac{1}{h} y_n (\delta y_n - \delta y_{n-1}) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2h^3} [(\delta y_{n+1} - \delta y_{n-1}) (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \\ + (y_{n+1} - y_{n-1}) (\delta y_{n+1} - 2\delta y_n + \delta y_{n-1})] = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Коэффициенты при  $\delta y$  переменные; применяя принцип «замороженных» коэффициентов, будем считать их постоянными. Попутно произведем замены  $y_n - y_{n-1} \approx hu_x$  и т. д. Тогда (54) примет вид

$$\frac{1}{\tau} (\delta \hat{y}_n - \delta y_n) + u_x \delta y_n + \frac{u}{h} (\delta y_n - \delta y_{n-1}) + \frac{\varepsilon^2}{2h} u_{xx} (\delta y_{n+1} - \delta y_{n-1}) + \frac{\varepsilon^2}{h^2} u_x (\delta y_{n+1} - 2\delta y_n + \delta y_{n-1}) = 0. \quad (55)$$

Рассматривая рост ошибки, имеющей вид  $\delta y_n \sim \exp(iqx_n)$ , и делая в (55) стандартную подстановку:

$$\delta y_n = e^{iqx}, \quad \delta y_{n \pm 1} = e^{iq(x \pm h)}, \quad \delta \hat{y}_n = \rho \delta y_n,$$

определим множитель роста гармоник:

$$\rho_q = 1 - \frac{u\tau}{h} (1 - e^{-iqh}) - \tau \left[ u_x + i \frac{\varepsilon^3}{h} u_{xx} \sin qh - \frac{4\varepsilon^2}{h^2} u_x \sin^2 \frac{qh}{2} \right]. \quad (56)$$

Если согласно (52) выбран коэффициент псевдовязкости  $\varepsilon \sim h$ , то величина в квадратных скобках ограничена равномерно по шагу  $h$ . Тогда последний член в (56) есть  $O(\tau)$  и не нарушает устойчивости. Первые же два члена аналогичны множителю (15) и приводят к условию устойчивости типа Куранта:

$$u(x, t) \tau \leq h, \quad (57)$$

где роль скорости играет величина решения  $u$  (напомним, однако, что для нелинейных схем этот способ исследования устойчивости является не строгим, а лишь правдоподобным).

Схема (53) является примером однородной схемы для расчета задач с произвольным числом движущихся разрывов, причем число разрывов может меняться с течением времени. Заметим, что для обеспечения хорошей точности расчета зона сглаживания разрыва должна быть небольшой (3—5 интервалов) и сумма зон сглаживания всех разрывов должна быть мала по сравнению с общим числом узлов сетки  $N$ . Тем самым, фактически общее число разрывов не может быть большим.

**З а м е ч а н и е 2.** Псевдовязкость вида (50) обеспечивает сходимость к тем обобщенным решениям уравнения (44), которые соответствуют дивергентной форме (46). Для другого уравнения или даже для другой дивергентной формы того же уравнения эта псевдовязкость, вообще говоря, непригодна.

**З а м е ч а н и е 3.** Псевдовязкость (50), называемая квадратичной, имеет один заметный недостаток: не все решения уравнения (50) являются дважды дифференцируемыми. В самом деле, нетрудно проверить, что кусочно-гладкое решение (45) также удовлетворяет этому уравнению. На таких решениях однородные

схемы, рассчитанные обычно на дважды или трижды непрерывно дифференцируемые функции, имеют пониженный порядок аппроксимации.

Этот недостаток устраняется, если использовать для уравнения (44) другую псевдовязкость, называемую линейной:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad \varepsilon = O(h). \quad (58)$$

Уравнение (58) напоминает уравнение теплопроводности, все решения которого многократно дифференцируемы. Его нетрудно исследовать аналогично уравнению (50). Однако линейная псевдовязкость тоже не лишена недостатков.

**4. Ложная сходимость.** На практике для нелинейных уравнений и схем редко удается строго доказать сходимость; например, сходимость разностных схем для уравнений газодинамики не доказана. Поэтому зачастую пользуются следующими соображениями. Проверим локальную аппроксимацию схемы и затем на численных расчетах со сгущением сеток убедимся, что разностное решение при  $h \rightarrow 0$  сходится к какой-то предельной функции. Поскольку нет расходимости, то расчет устойчив, а из устойчивости и аппроксимации следует сходимость к решению исходной задачи.

Эти рассуждения справедливы, если точное решение достаточно гладко. Если же решение имеет сильные или слабые разрывы, то локальной аппроксимации в точках разрыва нет и предыдущие рассуждения могут привести к неверному результату.

**Пример.** Приведем разностную схему, которая сходится, но не к точному решению.

Возьмем схему (53) для уравнения с псевдовязкостью (50) и тем самым для квазилинейного уравнения переноса (44); положим в ней  $\varepsilon = 0$ , т. е. выбросим псевдовязкость. Тогда схема примет вид

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{h} y_n (y_n - y_{n-1}) = 0, \quad (59)$$

напоминающий явную схему (9) для линейного уравнения переноса. Проведем по схеме (59) расчет движения сильного разрыва (47). Пусть начальные данные таковы, что

$$\begin{aligned} y_n &= a \quad \text{при } n \leq n_0 - 1, \\ y_n &= b \quad \text{при } n \geq n_0. \end{aligned} \quad (60)$$

Выберем шаг по времени  $\tau = h/b$ . Подставляя (60) в (59), нетрудно убедиться, что на следующем слое разностное решение будет равно

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= a \quad \text{при } n \leq n_0, \\ \hat{y}_n &= b \quad \text{при } n \geq n_0 + 1. \end{aligned} \quad (61)$$

Это значит, что разрыв продвинулся за один временной шаг ровно на один интервал сетки и сохранил свою форму. Очевидно, так же он будет двигаться и на всех других шагах по времени.

Таким образом, в этом расчете сильный разрыв будет двигаться без сглаживания, точно сохраняя форму, но с неправильной скоростью

$$D^* = h/\tau = b \neq (a+b)/2.$$

Значит, при  $b\tau = h \rightarrow 0$  разностное решение (60)—(61) сходится к предельной функции

$$u(x, t) = \begin{cases} a & \text{при } x - x_0 < bt, \\ b & \text{при } x - x_0 > bt, \end{cases} \quad (62)$$

которая отлична от точного решения (47).

Таким образом, для задач с разрывными или недостаточно гладкими решениями (а также при разрывных или недостаточно гладких коэффициентах уравнения) визуальная наблюдаемая сходимость разностного решения к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  может оказаться ложной.

**5. Консервативные схемы.** Ложной сходимости можно избежать, используя консервативные схемы. Эти схемы составляют методом баланса, исходя из физических законов сохранения и соблюдая дополнительное правило, описанное ниже.

Сначала разберем законы сохранения на примере уравнения (44). Запишем ту дивергентную форму этого уравнения (46), которая в п. 1 была условно принята за правильную:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (63)$$

Выбирая отдельную ячейку сетки (рис. 74) и интегрируя по ней уравнение (63), получим точное интегральное соотношение

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (u^{m+1} - u^m) dx + \frac{1}{2} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (u_n^2 - u_{n-1}^2) dt = 0. \quad (64)$$

Уравнение (63) можно проинтегрировать не по отдельной ячейке, а по всей области

$$G = [x_0 \leq x \leq x_N] \times [t_0 \leq t \leq t_M]$$

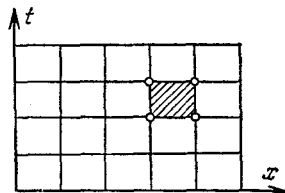


Рис. 74.

и получить аналогичное интегральное соотношение:

$$\int_{x_0}^{x_N} (u^M - u^0) dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_M} (u_N^2 - u_0^2) dt = 0. \quad (65)$$

Это соотношение напоминает физические законы сохранения: первый интеграл дает изменение  $\int u dx$  за истекшее время, а второй есть разность потоков  $1/2 \int u^2 dt$  через правую и левую границу. Соотношение (65) является законом сохранения для данной задачи.

Очевидно, соотношение (64) является законом сохранения для каждой отдельной ячейки; оно содержит потоки и другие величины на границах этой ячейки. Просуммируем (64) по всем ячейкам области  $G$ :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \int_{x_{n-1}}^{x_n} (u^{m+1} - u^m) dx + \frac{1}{2} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (u_n^2 - u_{n-1}^2) dt \right] = 0. \quad (66)$$

Легко видеть, что интегралы по тем границам ячеек, которые лежат внутри  $G$ , попарно уничтожаются; остаются только интегралы по наружной границе, и (66) совпадает с (65). Иными словами, закон сохранения во всей области есть точное следствие закона сохранения в отдельных ячейках.

Не всякая разностная схема обладает таким свойством. Например, возьмем схему с ложной сходимостью (59), умножим обе части на  $\tau h$  и просуммируем по всем ячейкам:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tau h \left[ \frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) + \frac{1}{h} y_n^m (y_n^m - y_{n-1}^m) \right] = 0. \quad (67)$$

Преобразуем второе слагаемое в квадратных скобках:

$$y_n (y_n - y_{n-1}) = \frac{1}{2} (y_n^2 - y_{n-1}^2) + \frac{1}{2} (y_n - y_{n-1})^2.$$

Тогда (67) легко привести к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^N h (y_n^M - y_n^0) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \tau [(y_N^m)^2 - (y_0^m)^2] + \Delta = 0, \quad (68)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tau (y_n^m - y_{n-1}^m)^2 > 0. \quad (69)$$

Первая и вторая суммы в (68) являются разностными аналогами интегралов в (65); они не содержат значений  $y_n^m$  во внутренних узлах области  $G$ . Но остается еще третья (двойная) сумма (69), содержащая внутренние узлы неустранимым образом и заведомо не равная нулю.

Поэтому при расчете по схеме (59) разностный закон сохранения во всей области  $G$  нарушается на величину  $\Delta$ . Такие схемы называют *неконсервативными*, а величину  $\Delta$  называют *дисбалансом* схемы.

Построим *консервативную* схему, т. е. такую, у которой дисбаланс равен нулю. Для этого в интегральном соотношении (64) аппроксимируем интегралы линейными квадратурными формулами. Если, для определенности, воспользоваться формулой прямоугольников с теми же узлами, что в предыдущей схеме, то получим явную схему следующего вида:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{2h} (y_n^2 - y_{n-1}^2) = 0. \quad (70)$$

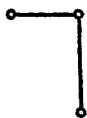


Рис. 75.

Суммирование (70) по всем ячейкам дает именно две первые суммы в (68), и дисбаланса не возникает.

Выбирая другие шаблоны, можно построить различные консервативные схемы для уравнения (44). Например, если вычислить интегралы в (64) по шаблону рис. 75, то получим неявную схему

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{2h} (\hat{y}_n^2 - \hat{y}_{n-1}^2) = 0. \quad (71a)$$

Это — схема бегущего счета, и для выполнения вычислений ее удобно переписать в следующем виде:

$$\hat{y}_n = -\frac{h}{\tau} + \sqrt{\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{2h}{\tau} y_n + \hat{y}_{n-1}^2}; \quad (71b)$$

здесь из двух корней квадратного уравнения (71a) согласно условию  $u(x, t) > 0$  выбран положительный. Суммируя (71a) по всем ячейкам, получим разностный закон сохранения:

$$\sum_{n=1}^N h (y_n^M - y_n^0) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \tau [(y_N^m)^2 - (y_0^m)^2] = 0. \quad (72)$$

Вторая сумма немного отличается от второй суммы (68), но это отличие несущественно. Дисбаланс отсутствует, так что схема (71) консервативна.

Схема (71) любопытна во многих отношениях. Она является схемой сквозного счета; хотя ее сходимость строго не доказана, она успешно используется для расчета сильных разрывов даже в отсутствие псевдовязкости (по-види-



тому, это связано с наличием достаточно большой аппроксимационной вязкости схемы). Схема монотонна. Есть обобщения этой схемы, сохраняющие все ее хорошие свойства и существенно повышающие точность расчета [70].

Интерес к таким схемам объясняется тем, что многие изложенные здесь идеи удастся перенести на случай газодинамики и других сложных и важных задач.

Консервативные схемы выражают закон сохранения на сетке, т. е. они качественно похожи на исходное интегральное уравнение. Неконсервативные схемы этим свойством не обладают. Поэтому, по сравнению с неконсервативными схемами, консервативные схемы обычно приводят к существенному улучшению точности расчета как разрывных, так и гладких решений.

Построены схемы, одновременно удовлетворяющие большому числу различных физических законов сохранения (см. [34]). Эти схемы, названные *полностью консервативными*, оказались полезными в задачах магнитной газодинамики, физики разреженной плазмы и ряде других.

Таким образом, понятие консервативности широко используется при составлении и исследовании разностных схем.

Заметим, однако, что различные полезные свойства схем (консервативность, монотонность, высокий порядок аппроксимации) нередко противоречат друг другу, так что может не существовать схемы, одновременно удовлетворяющей всем этим требованиям. Кроме того, не для всех классов уравнений консервативность является необходимым условием сходимости, и составлено немало хороших, хотя и неконсервативных схем.

## ЗАДАЧИ

1. Получить для схемы (9) априорную оценку точности.
2. Исследовать сходимость схем (10) и (11).
3. Получить невязки схем (10) и (11) и сравнить их между собой и с невязкой (13) схемы (9).
4. Записать схемы (10)—(11) для случая неравномерной сетки.
5. Исследовать устойчивость схемы (25) методом разделения переменных.
6. Показать, что схема (25) имеет аппроксимацию  $O(\tau + h^2)$ .
7. Проверить аппроксимацию и устойчивость схемы (29) для двумерного уравнения переноса (27а).
8. Составить для двумерного уравнения переноса (27а) явную схему, аналогичную схеме (9), и исследовать ее устойчивость.
9. Составить для двумерного уравнения переноса (27а) симметричную схему, аналогичную схеме (12), и исследовать ее.
10. Показать, что схема (32) для уравнения переноса с поглощением (30) сохраняет положительность решения (т. е. разностное решение положительно, если положительные начальные данные) при любом  $b \geq 0$ , если  $ct \leq h$ .
11. Исследовать, монотонна ли схема (10) и при каком условии.
12. Определить скорость ударной волны, соответствующую дивергентной форме (49) записи уравнения (44). Сравнить эту скорость со скоростью (48) и убедиться в правильности замечания 1 к § 2, п. 1.

13. Исследовать квазилинейное уравнение переноса с линейной псевдовязкостью (58); показать, что среди его решений есть сглаженная ударная волна

$$u_\varepsilon(x, t) = \frac{a + b \exp \left[ \frac{a-b}{2\varepsilon} (x - x_0 - Dt) \right]}{1 + \exp \left[ \frac{a-b}{2\varepsilon} (x - x_0 - Dt) \right]}, \quad D = \frac{1}{2} (a + b).$$

14. Для уравнения с линейной псевдовязкостью (58) составить какую-нибудь разностную схему и исследовать ее устойчивость.

15. Исследовать устойчивость нелинейных схем (70) и (71).

16. Исследовать аппроксимацию схем (70) и (71) на дважды непрерывно дифференцируемых решениях.

17. Доказать монотонность схемы (71).