

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В главе IX рассмотрены методы численного решения задач для уравнений в частных производных. В § 1 обсуждены некоторые постановки задач и дан обзор методов, которыми решаются подобные задачи. Остальные параграфы содержат изложение основ наиболее широко применяемого и хорошо изученного метода — разностного. В § 2 рассмотрены способы построения разностных схем и введено понятие аппроксимации. В § 3 даны методы исследования устойчивости разностных схем. В § 4 доказаны основные теоремы о сходимости разностного решения к точному.

## § 1. Введение

**1. О постановках задач.** Движение систем малого числа частиц математически описывают, как правило, обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если же число частиц очень велико, то следить за движением отдельных частиц практически невозможно. При этом удобнее рассматривать систему частиц как сплошную среду, характеризуя ее состояние средними величинами: плотностью, температурой в данной точке и т. д.

Математические модели сплошной среды приводят к уравнениям в частных производных, которым удовлетворяют упомянутые средние величины. Например, изменение температуры в неподвижном теле описывается уравнением теплопроводности

$$c(u, \mathbf{r}, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [k(u, \mathbf{r}, t) \operatorname{grad} u] + q(u, \mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где  $u$  — температура,  $c$  — теплоемкость,  $k$  — коэффициент теплопроводности и  $q$  — плотность источников тепла.

К уравнениям в частных производных приводят задачи газодинамики, теплопроводности, переноса излучения, распространения нейтронов, теории упругости, электромагнитных полей, процессов переноса в газах, квантовой механики и многие другие.

Независимыми переменными в физических задачах обычно являются время  $t$  и координаты  $\mathbf{r}$ ; бывают и другие переменные, например, скорости частиц  $\mathbf{v}$  в задачах переноса. Решение требуется найти в некоторой области изменения независимых пере-

менных  $G(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \dots)$ . Полная математическая постановка задачи содержит дифференциальное уравнение, а также дополнительные условия, позволяющие выделить единственное решение среди семейства решений дифференциального уравнения. Дополнительные условия обычно задаются на границе области  $G$ .

Если одной из переменных является  $t$ , то чаще всего рассматривают области вида

$$G(t, \mathbf{r}, \dots) = g(\mathbf{r}, \dots) \times [t_0, T], \quad (2)$$

т. е. решение ищут в некоторой пространственной области  $g(\mathbf{r}, \dots)$  на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$ . В этом случае дополнительные условия, заданные при  $t = t_0$ , называют *начальными*, а дополнительные условия, заданные на границе  $\Gamma(\mathbf{r})$  области  $g(\mathbf{r})$ , — *граничными* или *краевыми*.

Задачу, у которой имеются только начальные условия, называют *задачей Коши*. Например, для уравнения теплопроводности (1) в неограниченном пространстве можно поставить задачу с начальными условиями

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \mu(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Если  $\mu(\mathbf{r})$  — кусочно-непрерывная ограниченная функция, то решение задачи (1), (3) единственно в классе ограниченных функций (при некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения; см. [40]).

Задачу с начальными и граничными условиями называют *смешанной краевой задачей* или *нестационарной краевой задачей*. Для уравнения (1) дополнительные условия такой задачи могут иметь, например, вид

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \mu(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in g(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}, t)_{\Gamma} = \mu_1(\mathbf{r}, t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Для этого уравнения допустимы и другие граничные условия, например, содержащие нормальную производную решения.

Встречаются задачи, в которых область  $G(t, \mathbf{r})$  имеет другой вид. Примером является задача с условиями на характеристиках (см. [40]), возникающая при изучении процессов сушки, сорбции газов и многих других.

При исследовании установившихся состояний или стационарных (не зависящих от времени) процессов в сплошной среде формулируются математические задачи, не зависящие от времени. Их решение ищется в области  $g(\mathbf{r})$ , а дополнительные условия являются граничными. Такие задачи называют *краевыми*.

Мы ограничимся рассмотрением корректно поставленных задач, когда для некоторого класса начальных и граничных данных решение (в заданном классе функций) существует, единственно и непрерывно зависит от этих данных. Будем также предполагать, что решение непрерывно зависит от всех коэффициентов уравнения.

Для уравнений в частных производных существуют физически интересные задачи, являющиеся некорректно поставленными: обратные задачи теплопроводности, задачи на развигие неустойчивостей и другие. Так, рассмотренный в главе I пример Адамара связан с возникновением релей-тейлоровской неустойчивости, когда слой тяжелой жидкости налит поверх слоя легкой жидкости. Но здесь мы такие задачи не будем рассматривать (см. [39] и приведенную там библиографию).

В этой главе излагаются методы численного решения уравнений в частных производных и способы обоснования этих методов. Они применимы к широким классам уравнений и различным типам задач для них. Но примеры, иллюстрирующие изложение и конкретные применения этих методов, рассмотренные в главах X—XIII, касаются наиболее распространенных и хорошо изученных задач для уравнений первого и второго порядков, линейных относительно производных.

Напомним классификацию таких уравнений. Они имеют следующий вид (для простоты мы ограничиваемся случаем двух переменных):

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты уравнения (5), вообще говоря, зависят от  $u$ ,  $x$ ,  $y$ . Если коэффициенты не зависят от переменных, то это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Если  $F$  линейно зависит от  $u$ , а остальные коэффициенты от  $u$  не зависят, то это линейное уравнение с переменными коэффициентами. Если коэффициенты зависят от  $u$ , то уравнение (5) называется квазилинейным.

Если  $A \equiv B \equiv C \equiv 0$ , но  $D \neq 0$  и  $E \neq 0$ , то уравнение (5) имеет первый порядок и называется уравнением переноса.

Уравнения второго порядка классифицируются по знаку дискриминанта  $B^2 - AC$ : у гиперболических уравнений дискриминант положителен, у параболических — равен нулю, у эллиптических — отрицателен.

Те физические процессы, которые описываются разными перечисленными здесь типами уравнений, существенно отличаются друг от друга. Соответственно полные постановки задач для этих типов уравнений имеют свои особенности, подробно рассмотренные в [40]; мы будем кратко напоминать их в соответствующих главах.

Заметим, что уравнение с переменными коэффициентами может иметь разный тип в разных точках области  $G(x, y)$ . В практике вычислений встречается немало подобных задач, причем нередко — еще неисследованных теоретически. При этом сформулировать полную постановку задачи и обосновать ее корректность зачастую бывает нелегко.

**2. Точные методы решения.** В курсах уравнений математической физики изложен ряд методов, позволяющих для некоторых классов задач найти точное решение (см. [40]). К таким методам

относятся метод распространяющихся волн, метод разделения переменных, метод функций источника и другие.

Например, для простейшей задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t, \quad k = \text{const} > 0, \\ u(0, t) &= u(a, t) = 0, \quad u(x, 0) = \mu(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где функция  $\mu(x)$  кусочно-непрерывна, методом разделения переменных решение представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\pi^2 n^2 kt/a^2} \sin \frac{\pi nx}{a}, \quad (7a)$$

где величины  $\alpha_n$  являются коэффициентами Фурье начальных данных

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a \mu(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx. \quad (7b)$$

Таким образом, получено явное выражение решения через начальные данные.

Подставляя (7б) в (7а) и меняя порядок интегрирования и суммирования, выразим решение через начальные данные и функцию источника

$$u(x, t) = \int_0^a G(x, \xi, t) \mu(\xi) d\xi, \quad (8a)$$

где функция источника равна

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 kt/a^2} \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi n\xi}{a}. \quad (8b)$$

Для задачи Коши на бесконечной прямой выражение для функции источника имеет следующий вид (см. [40]):

$$G_{\infty}(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-(x-\xi)^2/4kt}. \quad (8b)$$

Точные методы позволяют получить явное выражение решения через начальные данные, что облегчает дальнейшие действия с решением. Например, выражения (7) — (8) позволяют многое сказать о качественном поведении решения.

В самом деле, в формуле (7а) пространственные гармоники  $\sin(\pi nx/a)$  множатся на величины  $\exp(-\pi^2 n^2 kt/a^2)$ , затухающие при возрастании времени; это затухание тем быстрее, чем больше номер гармоники. Но чем меньше амплитуды высоких гармоник,

тем более плавно меняется функция. Следовательно, с течением времени решение задачи (6) должно сглаживаться.

Наоборот, при движении в обратную сторону по времени амплитуды высоких гармоник возрастают тем быстрее, чем больше  $n$ ; при  $n \rightarrow \infty$  скорость роста гармоник неограниченно увеличивается. Отсюда легко понять, что обратная задача теплопроводности неустойчива.

Заметим, что функция источника на бесконечной прямой положительна:  $G_\infty(x, \xi, t) > 0$  при  $t > 0$ . Следовательно, если в решение (8а) с бесконечными пределами интегрирования подставить начальные данные вида

$$\mu(x) > 0 \text{ на } [a, b], \quad \mu(x) = 0 \text{ вне } [a, b],$$

то при  $t > 0$  решение будет отлично от нуля в любой точке бесконечной прямой. Это означает, что в случае линейной теплопроводности скорость распространения тепла бесконечна.

Таким образом, точные методы очень полезны. Однако они применимы в основном к линейным задачам в областях простой формы (прямоугольник, круг и т. п.), когда дифференциальное уравнение и краевые условия линейны относительно  $u(\mathbf{r}, t)$  и ее производных. При этом выкладки удается довести до конца обычно лишь для уравнений с постоянными или кусочно-постоянными коэффициентами.

**3. Автомодельность и подобие.** Для уравнений в частных производных существуют такие частные решения, когда  $u(x, t)$  является функцией одной переменной  $\xi$ , роль которой играет некоторая комбинация независимых переменных  $x, t$ . Такие решения называются *автомодельными*.

Построим пример автомодельного решения. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right], \quad k(u) = k_0 u^m, \quad k_0 > 0, \quad m > 0. \quad (9)$$

Такая зависимость часто встречается в физических задачах; например, коэффициент электронной теплопроводности плазмы приблизительно пропорционален  $u^{5/2}$ .

Будем искать частное решение уравнения (9), имеющее вид бегущей волны

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct.$$

При подстановке такого решения уравнение (9) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c \frac{df}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left( k_0 f^m \frac{df}{d\xi} \right) = 0. \quad (10)$$

Однократное интегрирование этого уравнения дает соотношение

$$f(\xi) + \frac{k_0}{c} f^m(\xi) \frac{df}{d\xi} = \text{const.} \quad (11)$$

Если функция  $f(\xi)$  обращается в нуль хотя бы в одной точке  $\xi_0$ , то константа в правой части (11) равна нулю и соотношение (11) нетрудно проинтегрировать еще раз:

$$f(\xi) = \left[ \frac{cm}{k_0} (\xi_0 - \xi) \right]^{1/m} \quad \text{при } \xi \leq \xi_0.$$

Доопределим решение при  $\xi > \xi_0$ , полагая  $f(\xi) = 0$ , что удовлетворяет уравнению (9). Таким образом, получим искомое решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[ \frac{cm}{k_0} (x_0 - x + ct) \right]^{1/m}, & x \leq x_0 + ct, \\ u(x, t) &= 0, & x > x_0 + ct. \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы это решение могло существовать, начальные и граничные условия должны быть с ним согласованы. Например, если уравнение (9) рассматривается при  $t > 0$  на полупрямой  $x \geq x_0$ , то следует задать условия

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad x \geq x_0, \\ u(x_0, t) &= \left( \frac{c^2 m}{k_0} t \right)^{1/m}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Автомодельное решение (12) представляет собой температурную волну, бегущую с постоянной скоростью по нулевому фону температуры (рис. 45). Скорость движения волны  $c$  определяется скоростью роста температуры на границе (13). Точка  $\bar{x} = x_0 + ct$  является фронтом волны. Профиль температуры всюду непрерывен, но на фронте он имеет вертикальную касательную  $(\frac{du}{dx})_{\bar{x}} = \infty$ , и производная в этой точке терпит разрыв.

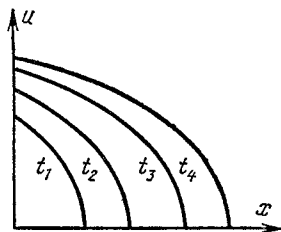


Рис. 45.

Автомодельные решения довольно часто удается найти для линейных и квазилинейных уравнений или систем уравнений, коэффициенты которых зависят от переменных  $x$ ,  $t$  и решения  $u$  по степенным законам. Для построения решения надо «угадать» подходящую комбинацию независимых переменных и описанным выше приемом свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Выразить решение этого уравнения через элементарные функции, подобно (12), удается далеко не всегда, но найти это решение численным интегрированием несравненно проще, чем численно решить исходное уравнение в частных производных.

Если уравнение в частных производных описывает сложный физический процесс, то автомодельные решения дают отдельные режимы протекания процесса и позволяют исследовать многие его особенности. Поэтому автомодельные решения широко используются в современной физике (см. [36]).

Автомодельность является частным случаем *подобия*. В теории подобия при помощи анализа физических размерностей коэффициентов уравнения ищутся такие преобразования всех переменных и функций, относительно которых уравнение инвариантно. Например, уравнение (9) не изменится при таком преобразовании:

$$x \rightarrow \alpha x, \quad t \rightarrow \alpha t, \quad u \rightarrow \alpha^{1/m} u. \quad (14)$$

Если для уравнения известно преобразование подобия, то, найдя каким-либо способом одно частное решение, мы при помощи этого преобразования получим целое семейство решений. Это особенно ценно, если задача настолько сложна, что частные решения удается находить только трудоемкими численными методами.

Разумеется, автомодельные решения или преобразования подобия существуют далеко не для всех классов уравнений, а лишь при некоторых видах коэффициентов уравнения и начальных и граничных условиях. Однако многие важные физические задачи точно или приближенно удовлетворяют этим ограничениям.

**4. Численные методы.** Задачи для нелинейных уравнений с коэффициентами достаточно общего вида или даже линейные задачи, но в областях сложной формы, редко удается решить классическими методами. Основным способом решения таких задач являются численные методы. Среди них чаще всего применяют *разностные методы* благодаря их универсальности и наличию хорошо разработанной теории.

Для применения разностного метода в области изменения переменных  $G(\mathbf{r}, t)$  вводят некоторую сетку. Все производные, входящие в уравнение и краевые условия, заменяют разностями (или другими алгебраическими комбинациями) значений функции  $u(\mathbf{r}, t)$  в узлах сетки. Получающиеся при этом алгебраические уравнения называют *разностной схемой*. Решая полученную алгебраическую систему, найдем приближенное (разностное) решение в узлах сетки.

Как и в главе VIII, возникают вопросы: существует ли решение алгебраической системы и единственно ли оно; как это решение фактически вычислить (за возможно меньшее число действий); при каких условиях это разностное решение стремится к точному и какова скорость сходимости? Есть еще два вопроса, которые для обыкновенных дифференциальных уравнений были несложными: как выбрать сетку и как составить разностную схему на этой сетке?

Пример. Составим простейшие разностные схемы для одномерной задачи линейной теплопроводности на ограниченном отрезке

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \quad (15a)$$

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t). \quad (15б)$$

Решение ищется в области  $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$ .

Введем в  $G$  прямоугольную сетку (для простоты равномерную), образованную пересечением линий  $x_n = nh$ ,  $0 \leq n \leq N$ , и  $t_m = m\tau$ ,  $0 \leq m \leq M$ ; величины  $h$ ,  $\tau$  являются шагами сетки по переменным  $x$ ,  $t$  (рис. 46). Значения функции в узлах сетки будем обозначать  $u_n^m = u(x_n, t_m)$ .

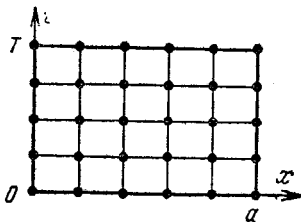


Рис. 46.

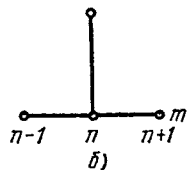
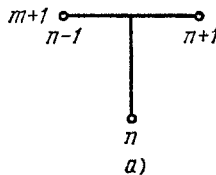


Рис. 47.

Возьмем около узла  $(x_n, t_m)$  конфигурацию узлов, изображенную на рис. 47, а. Заменим в уравнении (15а) производную  $u_t$  разностным отношением  $(u_n^{m+1} - u_n^m)/\tau$ , а производную  $u_{xx}$  — отношением  $(u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1})/h^2$ . Тогда дифференциальное уравнение приближенно заменится (аппроксимируется) разностной схемой \*)

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2} (y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (16)$$

Число уравнений (16) меньше числа неизвестных  $y_n^{m+1}$ ,  $0 \leq n \leq N$ ; недостающие уравнения выводятся из начальных и граничных данных (15б):

$$y_n^0 = \mu(x_n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad y_0^{m+1} = \mu_1(t_{m+1}), \quad y_N^{m+1} = \mu_2(t_{m+1}). \quad (17)$$

Конфигурацию узлов, используемую для составления разностной схемы, называют *шаблоном*.

Для одной и той же задачи можно составить много разностных схем. Например, если для задачи (15) выбрать изображенный

\*) Напомним, что разностной схеме удовлетворяет разностное решение, которое мы обозначаем  $y_n^m$ .



на рис. 47, б шаблон, то вместо (16) получим другую схему:

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2} (y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (18)$$

Начальные и граничные условия для этой схемы можно записать в форме (17).

В этой главе рассмотрены способы составления и исследования разностных схем, применимые для разных типов задач. В следующих главах излагаются те разностные схемы, которые дают хорошие результаты при решении некоторых распространенных типов уравнений математической физики, возникающих в задачах переноса, теплопроводности и диффузии, акустики и газодинамики, стационарных электрических полей.

Есть численные методы, близкие к разностным. Например, в *методе прямых* сетка вводится только для части переменных; эти переменные рассматриваются как дискретные, а одна переменная (обычно время  $t$ ) остается непрерывной. Производные по дискретным переменным заменяются разностями. При этом уравнение в частных производных аппроксимируется *дифференциально-разностными уравнениями*, которые представляют собой систему большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прямых оказывается в некоторых случаях удобным.

Для некоторых важных классов задач развиты специальные численные методы, обычно основанные на каких-либо грубых физических моделях процессов. Так, для задач многомерной газодинамики разработан метод частиц в ячейке; для задач разреженной плазмы предложен метод «водяного мешка» и ряд других (см. [6]); в задачах переноса нейтронов комбинируют разностный метод с разложением угловой части функции распределения частиц по сферическим гармоникам и т. д.

Численные методы позволяют решить сложнейшие задачи для систем многомерных уравнений. Однако для сложных задач численные методы очень трудоемки и рассчитаны на использование мощных ЭВМ. В этих случаях даже вывод разностной схемы, составление программы и ее отладка могут занимать несколько месяцев, а разработка математической модели или новых типов разностных схем нередко требует нескольких лет.

Поэтому численные методы целесообразно использовать в сочетании с аналитическими методами. Например, ищут такие упрощенные постановки задачи или частные случаи, когда можно найти точные или автомодельные решения и преобразования подобия. При помощи преобразования подобия по каждому найденному численному решению строят семейство решений. Все это позволяет с меньшими затратами труда провести детальное исследование исходной задачи.

## § 2. Аппроксимация

**1. Сетка и шаблон.** Для большинства разностных схем узлы сетки лежат на пересечении некоторых прямых линий (в многомерных задачах — гиперплоскостей), проведенных либо в естественной системе координат, либо в специально подобранной по форме области  $G$ .

Для двумерных задач в прямоугольной области  $G$  наиболее часто употребляют прямоугольную сетку (см. рис. 46), которую мы ввели при составлении схем (16) и (18). Заметно реже используют треугольную (рис. 48) или шестиугольную сетку. Для трехмерных задач наиболее употребительна сетка из прямоугольных параллелепипедов (рис. 49); другие виды сеток, например из прямоугольных трехгранных призм (рис. 50), используются редко.

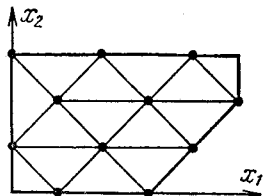


Рис. 48.

Существуют некоторые разностные схемы, например, для задач двумерной и трехмерной газодинамики, где узлы сетки расположены неупорядоченно. Но такие схемы сколько-нибудь заметного распространения не получили.

Если одна из переменных имеет физический смысл времени  $t$ , то сетку обычно строят так, чтобы среди ее линий (или гиперплоскостей) были линии  $t = t_m$ . Совокупность узлов сетки, лежащих на такой линии или гиперплоскости, называют *слоем*.

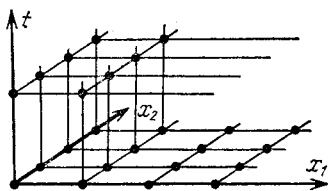


Рис. 49.

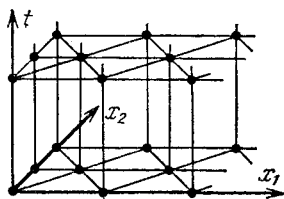


Рис. 50.

На каждом слое выделяют *направления* — линии, вдоль которых меняется только одна пространственная координата. Например, для переменных  $x, y, t$  есть направление  $x$  ( $t = \text{const}, y = \text{const}$ ) и направление  $y$  ( $t = \text{const}, x = \text{const}$ ).

Если область  $G(x, t)$  имеет форму прямоугольника, то часть узлов прямоугольной сетки естественно ложится на границу области (см. рис. 46); эти узлы называются *граничными*, а остальные узлы — *внутренними*. Начальные и краевые условия, наложенные на решение на границе  $\Gamma(G)$ , можно в этом случае

считать заданными в граничных узлах сетки. Именно так было сделано при выводе соотношений (17) в примере из § 1, п. 4.

В случае двух пространственных переменных  $x, y$  граница области  $G(x, y)$  нередко бывает ломаной линией. Для таких областей всегда можно ввести такую треугольную сетку, чтобы естественные узлы сетки (пересечения линий сетки) легли на границу (см. рис. 48). Иногда удается добиться этого, используя прямоугольную сетку.

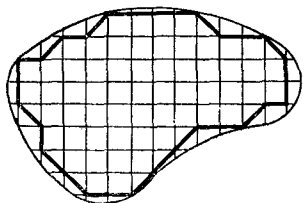


Рис. 51.

Если граница  $\Gamma(G)$  криволинейная, то естественные узлы сетки на границу могут не попадать (рис. 51). В этом случае можно взять точки пересечения линий сетки с границей в качестве дополнительных узлов; тогда краевые условия следует задавать в этих узлах. Можно сделать иначе: границу  $\Gamma(G)$  приближенно заменить ломаной, проходящей через ближайшие к границе естественные узлы (жирная линия на рис. 51); тогда краевые условия, заданные на  $\Gamma(G)$ , надо каким-либо образом перенести на эту ломаную.

Если область  $G$  является кругом (кольцом), цилиндром или шаром, то часто переходят к системам координат, связанных с видом области: полярным, цилиндрическим или сферическим. Если в таких координатах ввести прямоугольную сетку, то естественные узлы сетки лягут на границу. Иногда для построения хорошей сетки в областях сложной формы прибегают к конформному отображению на квадрат, в котором введена прямоугольная сетка.

Составляя разностные схемы (16) и (18), мы использовали во всех внутренних точках области однотипную разностную аппроксимацию производных. Иными словами, при написании каждого разностного уравнения около некоторого узла сетки бралось одно и то же количество узлов, образующее строго определенную конфигурацию. Эту конфигурацию узлов называют *шаблоном* данной разностной схемы (см. рис. 47).

Узлы, в которых разностная схема записана на шаблоне, называются *регулярными*, а остальные узлы — *нерегулярными*. Нерегулярными являются обычно граничные узлы, а иногда также лежащие вблизи границы узлы (такие, что взятый около этого узла шаблон выходит за границу области). Так, в примере из § 1, п. 4 нерегулярными были граничные узлы, и в них разностная схема имела нестандартную форму (17).

Составление разностной схемы начинается с выбора шаблона. Шаблон не всегда определяет разностную схему однозначно, но существенно влияет на ее свойства; например, далее мы увидим, что на шаблоне рис. 47, б нельзя составить хорошей схемы для задачи (15). Для каждого типа уравнений и краевых задач тре-

буется свой шаблон. В следующих главах сформулированы (на основе свойств решаемых уравнений) некоторые общие соображения, которые позволяют подбирать шаблоны, пригодные для построения хороших разностных схем.

Существуют разностные схемы, вообще не имеющие шаблона (пример такой схемы будет приведен в главе X). Но логическая структура таких схем сложна, что вызывает заметное увеличение объема программ и времени счета на ЭВМ. Поэтому такие схемы мало употребительны.

**2. Явные и неявные схемы.** Обсудим вопрос о фактическом вычислении разностного решения. Большая часть физических проблем приводит к уравнениям, содержащим время в качестве одной из переменных. Для таких уравнений ставится обычно смешанная краевая задача, типичным случаем которой является (15).

К подобным задачам применяют послойный алгоритм вычислений. Рассмотрим его на примере схем (18) и (16).

В схеме (18) на исходном слое  $t=0$  решение известно в силу начального условия. Положим  $t=0$  в уравнениях (18). Тогда при каждом значении индекса  $n$  уравнение содержит только одно неизвестное  $y_n^1$ ; отсюда можно определить  $y_n^1$  при  $1 \leq n \leq N-1$ . Значения  $y_0^1$  и  $y_N^1$  определяются из краевых условий (17). Таким образом, значения решения на первом слое вычислены. По ним аналогичным образом вычисляется решение на втором слое и т. д.

Схема (18) в каждом уравнении содержит только одно значение функции на следующем слое; это значение нетрудно явно выразить через известные значения функции на данном слое. Поэтому такие схемы называются *явными*.

Схема (16) содержит в каждом уравнении несколько неизвестных значений функции на новом слое; подобные схемы называются *неявными*. Для фактического вычисления решения перепишем схему (16) с учетом краевого условия (17) в следующей форме:

$$y_{n-1}^{m+1} - \left(2 + \frac{h^2}{k\tau}\right) y_n^{m+1} + y_{n+1}^{m+1} = \frac{h^2}{k\tau} y_n^m, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (19)$$

$$y_0^{m+1} = \mu_1(t_{m+1}), \quad y_N^{m+1} = \mu_2(t_{m+1}).$$

На каждом слое схема (19) представляет собой систему линейных уравнений для определения величин  $y_n^{m+1}$ ; правые части этих уравнений известны, поскольку содержат значения решения с предыдущего слоя. Матрица линейной системы трехдиагональна, и решение можно вычислить алгебраической прогонкой.

Рассмотренный сейчас алгоритм достаточно типичен. Он используется во многих неявных разностных схемах для одномерных и многомерных задач. Дальше мы будем вместо индекса времени  $t$  часто применять сокращенные обозначения:

$$u(x_n, t_m) = u_n, \quad u(x_n, t_{m+1}) = \hat{u}_n, \quad u(x_n, t_{m-1}) = \check{u}_n. \quad (20)$$

В этих обозначениях разностная схема (18) примет вид

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{k}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}).$$

**3. Невязка.** Рассмотрим операторное уравнение общего вида (не обязательно линейное):

$$Au = f, \text{ или } Au - f = 0. \quad (21)$$

Заменяя оператор  $A$  разностным оператором  $A_h$ , правую часть  $f$  — некоторой сеточной функцией  $\varphi_h$ , а точное решение  $u$  — разностным решением  $y$ , запишем разностную схему:

$$A_h y = \varphi_h, \text{ или } A_h y - \varphi_h = 0. \quad (22)$$

Если подставить точное решение  $u$  в соотношение (22), то решение, вообще говоря, не будет удовлетворять этому соотношению:  $A_h u - \varphi_h \neq 0$ . Величину

$$\psi = \varphi_h - A_h u \equiv (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) \quad (23)$$

называют *невязкой*.

Невязку обычно оценивают при помощи разложения в ряд Тейлора. Например, найдем невязку явной разностной схемы (18) для уравнения теплопроводности (15а). Запишем это уравнение в каноническом виде:

$$Au \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0.$$

Поскольку в данном случае  $f = \varphi_h = 0$ , то

$$\begin{aligned} \psi_n &= (Au - A_h u)_n = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_n - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_n - \frac{1}{\tau} (\hat{u}_n - u_n) + \frac{k}{h^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \end{aligned}$$

Разложим решение по формуле Тейлора около узла  $(x_n, t_m)$ , предполагая существование непрерывных четвертых производных по  $x$  и вторых по  $t$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= u_n + \tau u_t(x_n, t_m) + \frac{1}{2} \tau^2 u_{tt}(x_n, t_m), \\ u_{n\pm 1} &= u_n \pm h u_x(x_n, t_m) + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}(x_n, t_m) \pm \\ &\quad \pm \frac{1}{6} h^3 u_{xxx}(x_n, t_m) + \frac{1}{24} h^4 u_{xxxx}(\xi_{n\pm 1}, t_m), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $t_m < \theta_m < t_{m+1}$ ,  $x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n < \xi_{n+1} < x_{n+1}$ . Подставляя эти разложения в выражение невязки и пренебрегая, в силу непре-

ривности производных, отличим величин  $\xi_{n\pm 1}$ ,  $\theta_m$  от  $x_n$ ,  $t_m$ , найдем

$$\psi_n = \left( -\frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{kh^2}{12} u_{xxxx} \right)_n = O(\tau + h^2). \quad (25)$$

Таким образом, невязка (25) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow 0$ .

Выражение (25) дает невязку только в регулярных узлах схемы (18). Сравнивая (17) и (15б), легко получим невязку в нерегулярных узлах  $\psi_G = \psi_N = 0$ .

**Замечание 1.** Решение задачи теплопроводности с постоянным коэффициентом (15) в области  $G = (0 < x < a) \times (0 < t \leq T)$  непрерывно дифференцируемо бесконечное число раз. Однако учет пятых и более высоких производных в разложениях (24) прибавляет к невязке (25) только члены более высокого порядка малости по  $\tau$  и  $h$ , т. е., по существу, не меняет вида невязки.

**Замечание 2.** Пусть по каким-либо причинам решение исходной задачи дифференцируемо небольшое число раз; например, в задачах с переменным коэффициентом теплопроводности, гладким, но не имеющим второй производной, решение имеет лишь третьи непрерывные производные. Тогда в разложении (24) последними будут члены  $\pm h^3 u_{xxx}(\xi_{n\pm 1}, t_m)/6$ , не точно компенсирующие друг друга. Это приведет к появлению в невязке (25) члена типа  $hu_{xxx} = O(h)$ , т. е. невязка будет иметь меньший порядок малости, чем для четырежды непрерывно дифференцируемых решений.

**Замечание 3.** Преобразуем выражение невязки с учетом того, что входящая в него функция  $u(x, t)$  есть точное решение исходного уравнения и для нее выполняются соотношения

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} (ku_{xx}) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_t) = k^2 u_{xxxx}.$$

Подставляя это выражение в (25), получим

$$\psi_n = \left( \frac{1}{12} kh^2 - \frac{1}{2} k^2 \tau \right) (u_{xxxx})_n. \quad (26)$$

Если выбрать шаги по пространству и времени так, чтобы  $\tau = h^2/(6k)$ , то главный член невязки обратится в нуль и останутся только члены более высокого порядка малости по  $\tau$  и  $h$  (которые мы опускали).

Этот прием применяется при построении разностных схем повышенной точности.

**4. Методы составления схем.** Есть три основных способа составления разностных схем на заданном шаблоне: метод разностной аппроксимации, интегро-интерполяционный метод и метод неопределенных коэффициентов.

Метод разностной аппроксимации заключается в том, что каждая производная, входящая в дифференциальное уравнение и краевые условия, заменяется каким-либо разностным

выражением (включающим только узлы шаблона). Именно так были составлены схемы (16) и (18). Этот метод очень прост и в дополнительных пояснениях не нуждается.

Метод разностной аппроксимации позволяет легко составить схему первого или второго порядка аппроксимации на прямоугольной сетке для уравнений с непрерывными (и достаточно гладкими) коэффициентами. Однако этот метод трудно или даже невозможно применять в более сложных случаях: для уравнений с разрывными коэффициентами, на не прямоугольных сетках, для уравнений высокого порядка на неравномерных сетках и т. д.

Схемы повышенной точности в этом методе составляют, исследуя выражение невязки аналогично замечанию 3 в п. 3.

Интегро-интерполяционный метод, один из вариантов которого называется *методом баланса*, наиболее надежен

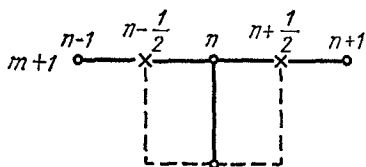


Рис. 52.

и применим во всех случаях. В этом методе после выбора шаблона область  $G(r, t)$  разбивают на ячейки, определенным образом связанные с шаблоном. Дифференциальное уравнение интегрируют по ячейке и по формулам векторного анализа приводят к интегральной форме, соответствующей

физическому закону сохранения. Приблизительно вычисляя полученные интегралы по каким-либо квадратурным формулам, составляют разностную схему.

Например, для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом  $u_t = (ku_x)_x$  выберем шаблон, изображенный на рис. 52 (см. также рис. 47, а), и сопоставим ему ячейку, показанную пунктиром. Обозначая средние точки интервалов сетки полужелыми индексами, выполним интегрирование по ячейке:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx [u_t - (ku_x)_x] = \\ &= \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (\hat{u} - u) dx - \int_{t_m}^{t_{m+1}} [(ku_x)_{n+1/2} - (ku_x)_{n-1/2}] dt. \end{aligned}$$

Это соотношение является точным. В правой части приближенно вычислим первый интеграл по формуле средних, а второй — по формуле правых прямоугольников. Получим следующее выражение:

$$(\hat{y}_n - y_n) (x_{n+1/2} - x_{n-1/2}) = \tau [(\hat{k}\hat{y}_x)_{n+1/2} - (\hat{k}\hat{y}_x)_{n-1/2}].$$

Заменяя в правой части производные разностями и учитывая,

что на равномерной сетке  $x_{n+1/2} - x_{n-1/2} = h$ , получим разностную схему

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{h^2} \left[ \hat{k}_{n+1/2} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) - \hat{k}_{n-1/2} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) \right]. \quad (27)$$

Если  $k = \text{const}$ , то схема совпадает с неявной схемой (16).

Интегро-интерполяционный метод особенно полезен для уравнений с негладкими или разрывными коэффициентами, поскольку именно интегральная запись законов сохранения выделяет из всех математически допустимых решений таких уравнений физически правильное обобщенное решение.

Метод неопределенных коэффициентов заключается в том, что в качестве разностной схемы берут линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона. Коэффициенты этой линейной комбинации определяют из условия, чтобы невязка схемы имела как можно более высокий порядок малости относительно  $\tau$  и  $h$ .

Например, для уравнения  $u_t = ku_{xx}$  на шаблоне рис. 52 будем искать разностную схему в следующем виде:

$$\alpha \hat{y}_{n-1} + \beta \hat{y}_n + \gamma \hat{y}_{n+1} + \delta y_n = 0. \quad (28)$$

Подставим сюда разложения (24), ограничиваясь для простоты членами  $O(\tau)$  и  $O(h^2)$ , и вычтем схему (28) из исходного уравнения. Получим невязку (индекс  $n$  всюду опускаем)

$$\begin{aligned} \psi = u_t - ku_{xx} - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) u + \tau \delta u_t + \\ + (\alpha - \gamma) hu_x - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) h^2 u_{xx} + \delta \cdot O(\tau^2) + (\alpha - \gamma) O(h^3) + \dots \end{aligned}$$

Чтобы сократились выписанные здесь члены, надо положить

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \tau \delta = -1, \quad \alpha - \gamma = 0, \\ \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) h^2 = -k. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты:

$$\alpha = \gamma = -\frac{k}{h^2}, \quad \beta = \frac{2k}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad \delta = -\frac{1}{\tau}.$$

Подставляя их в (28), получим разностную схему (16).

Метод неопределенных коэффициентов применим на косоугольных сетках. Например, при его помощи нетрудно составить пятиточечную схему для уравнения  $u_t = ku_{xx}$  на треугольной сетке с шаблоном рис. 53:

$$\frac{1}{2\tau} (\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}) = \left( \frac{1}{8\tau} + \frac{k}{h^2} \right) (y_{n-1} + y_{n+1}) + \left( \frac{3}{4\tau} - \frac{2k}{h^2} \right) y_n. \quad (29)$$



Возможны случаи, когда часть коэффициентов схемы типа (28) определяют из условия наивысшего порядка малости невязки, а часть коэффициентов выбирают из других соображений.

Метод неопределенных коэффициентов (как и метод разностной аппроксимации) применим к уравнениям с непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми коэффициентами и решениями. Из-за сравнительной громоздкости он применяется реже двух ранее описанных методов.

**Краевые условия.** Остановимся на записи разностной схемы в нерегулярных узлах (на границе или вблизи нее). В этих узлах для записи разностных уравнений необходимо привлекать краевые условия.

Например, в разностных схемах (16) и (18) для уравнения теплопроводности  $u_t = ku_{xx}$  нерегулярными являются граничные узлы  $n=0$ ,  $n=N$ . Для первой краевой задачи

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t)$$

в этих узлах нетрудно написать разностные уравнения (17):

$$y_0 = \mu_1(t_m), \quad y_N = \mu_2(t_m),$$

которые являются точными (их невязка равна нулю).

Более сложен случай второй краевой задачи для того же уравнения (далее будем рассматривать только левое условие):

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(a, t) = \mu_2(t). \quad (30)$$

Можно аппроксимировать производную односторонней разностью:

$$\frac{1}{h} (\hat{y}_1 - \hat{y}_0) = \mu_1(t_{m+1}). \quad (31)$$

Однако невязка этого разностного уравнения равна

$$\psi_0 = (\hat{u}_x)_0 - \frac{1}{h} (\hat{u}_1 - \hat{u}_0) = -\frac{h}{2} u_{xx} = O(h), \quad (32)$$

т. е. имеет меньший порядок малости, чем невязка (25) в регулярных узлах. Это приводит к понижению общей точности расчета.

Рассмотрим способы написания разностного краевого условия нормальной точности  $O(h^2)$ . Сделаем это на примере явной схемы (18).

Способ фиктивных точек очень нагляден. Введем вне отрезка  $0 \leq x \leq a$  фиктивную точку  $x_{-1} = x_0 - h$  и будем считать исходное уравнение справедливым при  $x_{-1} \leq x$ . Тогда разностное

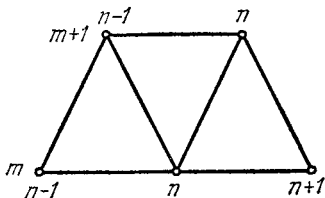


Рис. 53.

уравнение (18) можно написать при  $n=0$ :

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_0 - y_0) = \frac{k}{h^2} (y_{-1} - 2y_0 + y_1).$$

Заменим в левом краевом условии (30) производную симметричной разностью:

$$\frac{1}{2h} (y_1 - y_{-1}) = \mu_1 (t_m).$$

Исключая из последних двух уравнений фиктивную точку, получим разностный аналог краевого условия:

$$\frac{1}{h} (y_1 - y_0) = \mu_1 (t_m) + \frac{h}{2k\tau} (\hat{y}_0 - y_0). \quad (33)$$

Заметим, что это уравнение содержит только одно значение  $\hat{y}_0$ , т. е. оно явное.

Метод уменьшения невязки менее нагляден, но более универсален. Выразим  $u(x_1, t)$  при помощи формулы Тейлора:

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + h u_x(x_0, t) + \frac{1}{2} h^2 u_{xx} + \dots$$

На основании краевого условия (30) положим  $u_x(x_0, t) = \mu_1(t)$ , а из уравнения теплопроводности (15а) найдем  $u_{xx} = u_t/k$ . Подставляя эти величины в формулу Тейлора, получим

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + h \mu_1(t) + \frac{h^2}{2k} u_t + \dots$$

Заменяя здесь  $u_t \approx (\hat{y}_0 - y_0)/\tau$ , снова приходим к краевому условию (33).

В последнем способе можно учесть большее число членов ряда Тейлора и получить краевые условия не только нормальной, но и повышенной точности.

**5. Аппроксимация и ее порядок.** Пусть имеется область  $G$  переменных  $x = \{x_1, \dots, x_p\}$  с границей  $\Gamma$  и поставлена корректная задача для некоторого уравнения с граничными условиями:

$$A u(x) - f(x) = 0, \quad x \in G, \quad (34a)$$

$$R u(x) - \mu(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (34б)$$

Введем в области  $G + \Gamma$  сетку с шагом  $h$ , состоящую из множества внутренних (регулярных) узлов  $\omega_h$  и множества граничных (нерегулярных) узлов  $\gamma_h$ . Заменим задачу (34) в регулярных узлах разностным аналогом уравнения (34а):

$$A_h y_h(x) - \varphi_h(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad (35a)$$

а в нерегулярных узлах — разностным аналогом краевых условий (34б):

$$R_h y_h(x) - \chi_h(x) = 0, \quad x \in \gamma_h \quad (35б)$$

(индексом  $h$  отмечены величины, определенные только на сетке; мы будем опускать его там, где это не вызовет недоразумений).

Близость разностной схемы (35) к исходной задаче (34) будем определять по величине невязки:

$$\begin{aligned} \psi_h(x) &= (Au - f) - (A_h u - \varphi_h), \quad x \in \omega_h, \\ \nu_h(x) &= (Ru - \mu) - (R_h u - \chi_h), \quad x \in \gamma_h. \end{aligned}$$

**Определение.** Разностная схема (35) аппроксимирует задачу (34), если

$$\|\psi\|_{\varphi_h} \rightarrow 0, \quad \|\nu\|_{\chi_h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0; \quad (36)$$

аппроксимация имеет  $p$ -й порядок, если

$$\|\psi\|_{\varphi_h} = O(h^p), \quad \|\nu\|_{\chi_h} = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (37)$$

Обсудим вопрос о выборе норм в этом определении.

Функции  $u(x)$ ,  $f(x)$ ,  $\mu(x)$  определены обычно на отрезке  $a \leq x \leq b$  или во всех точках некоторой области пространства большего числа измерений. Для них можно ввести такие нормы, как чебышевская (локальная):

$$\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|, \quad (38а)$$

или гильбертова (среднеквадратичная):

$$\|u(x)\|_{L_2} = \left[ \int_a^b \rho(x) u^2(x) dx \right]^{1/2}, \quad \rho(x) > 0 \quad (38б)$$

(выражения написаны для одномерного случая). Часто используют связанные с оператором  $A$  энергетические нормы, напоминающие формулы для полной энергии колебательной системы, например:

$$\|u(x)\| = \left\{ \int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)] dx \right\}^{1/2}, \quad (38в)$$

$$\rho_1(x) > 0, \quad \rho_0(x) > 0.$$

Употребляются и другие нормы.

Напомним (см. главу I), что из локальной близости функций следует их среднеквадратичная близость; поэтому  $\|\cdot\|_C$  называют более сильной, чем  $\|\cdot\|_{L_2}$ . Нетрудно проверить, что энергетическая норма (38в) сильнее  $\|\cdot\|_C$ .

Выбор той или иной нормы в конкретной задаче определяется двумя соображениями. Желательно, чтобы разностное решение  $y$

было близко к точному решению в возможно более сильной норме; например, в задачах на разрушение конструкций малость деформаций в  $\|\cdot\|_{L_2}$  не гарантирует сохранения конструкции, а малость в  $\|\cdot\|_C$  — гарантирует. С другой стороны, чем слабее  $\|\cdot\|_u$ , тем легче построить сходящуюся в этой норме разностную схему и исследовать ее.

Заметим, что функции  $u(x)$ ,  $f(x)$ ,  $\mu(x)$  принадлежат, вообще говоря, разным классам. Например, если  $u(x)$  есть четырежды дифференцируемая функция и  $A = (d^2/dx^2)$ , то  $f(x)$  является дважды дифференцируемой функцией. Поэтому каждую из этих функций можно оценивать в своей норме:  $\|\cdot\|_u$ ,  $\|\cdot\|_f$ ,  $\|\cdot\|_\mu$ .

Функции  $y_h$ ,  $\varphi_h$ ,  $\chi_h$  определены только на сетке, поэтому для них надо ввести сеточные нормы  $\|\cdot\|_{y_h}$ ,  $\|\cdot\|_{\varphi_h}$ ,  $\|\cdot\|_{\chi_h}$ . Их вводят так, чтобы при  $h \rightarrow 0$  они переходили в выбранные  $\|\cdot\|_u$ ,  $\|\cdot\|_f$ ,  $\|\cdot\|_\mu$ . За разностные аналоги чебышевской и гильбертовой норм можно принять соответственно

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|, \quad \|y\|_{L_2} = \left( \sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n \right)^{1/2}. \quad (39)$$

В выборе разностных аналогов норм существует некоторый произвол. Например, сумму в (39) можно брать по  $n=0, 1, \dots, N-1$ , что соответствует выбору другой квадратурной формулы для интеграла (38б). Этим пользуются, определяя сеточные нормы так, чтобы облегчить доказательство сходимости.

Как надо понимать  $h \rightarrow 0$ ? Для равномерной сетки это не требует пояснений. На неравномерных сетках рассматривают совокупность шагов  $h_n$  как некоторую сеточную функцию и вводят какую-либо норму шага, например:

$$h = \|h_n\|_C = \max_n h_n \quad \text{или} \quad h = \|h_n\|_{L_2} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} h_n^3 \right)^{1/2}.$$

Эту норму считают «величиной шага» в определениях аппроксимации, порядка аппроксимации и т. д.

Если невязку оценивают в  $\|\cdot\|_C$ , то аппроксимацию называют *локальной*. Для уравнений с достаточно гладкими решениями наличие локальной аппроксимации и ее порядок легко проверяются; в таких задачах нередко ограничиваются установлением локальной аппроксимации. Однако наиболее сильные результаты по сходимости разностных схем связаны с использованием более слабых норм для невязки (но сильных норм для решения).

Замечание 1. Факт наличия или отсутствия аппроксимации и порядок аппроксимации зависят не только от операторов  $A$  и  $A_h^*$ , но также от классов, к которым принадлежат  $u(x)$ ,  $f(x)$ ; и от выбора норм. Чем сильнее норма или чем шире классы функций, тем ниже, вообще говоря, порядок аппроксимации

\*) Операторы краевых условий для краткости обычно будем опускать.

(последнее видно по замечанию 2 к п. 3, если оценивать невязку в  $\|\cdot\|_c$ ).

Замечание 2. Как правило, решение  $u(x)$  исходной задачи (34) неизвестно, так что использовать его для получения невязки затруднительно. В этом случае берут достаточно широкий класс  $V$  функций  $v(x)$ , которому  $u(x)$  заведомо принадлежит (обычно это класс функций, непрерывных вместе с достаточным числом своих производных). Если на всех функциях класса  $V$  имеется аппроксимация порядка  $p$ :

$$\|Av(x) - A_h v(x) + \varphi_h(x) - f(x)\|_{\varphi_h} = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то, очевидно, аппроксимация на решении  $u(x)$  имеет порядок не ниже  $p$ .

В подобных случаях аппроксимация на решении  $u(x)$  может иметь порядок выше  $p$ . В замечании 3 к п. 3 мы видели, что для уравнения  $u_t = ku_{xx}$  явная разностная схема (18) при  $\tau = h^2/(6k)$  имеет в классе сколь угодно гладких функций  $v(x)$  аппроксимацию  $O(h^2)$ , а на решении — более высокого порядка (четвертого, как нетрудно проверить).

Случай многих переменных имеет некоторые особенности. Определение аппроксимации остается в основном прежним; надо только требовать стремления к нулю шагов по всем переменным. Порядок аппроксимации может быть разный по разным переменным. Например, для двух переменных соотношение

$$\|\psi\|_{\varphi_h} = O(\tau^p + h^q) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \quad (40)$$

означает  $p$ -й порядок по времени и  $q$ -й по пространству. Это хорошо видно на примере схемы (18) с невязкой (25).

Аппроксимация вида (40), погрешность которой стремится к нулю при любом законе стремления шагов к нулю, называется *безусловной* или *абсолютной*. Если же погрешность аппроксимации стремится к нулю при одних законах убывания шагов и не стремится при других, то аппроксимацию называют *условной*. Например, если

$$\|\psi\|_{\varphi_h} = O\left(\tau^p + h^q + \frac{\tau^r}{h^s}\right) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \quad (41)$$

то аппроксимация условная: кроме  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , надо дополнительно требовать, чтобы  $(\tau^r/h^s) \rightarrow 0$ .

Если аппроксимация условная, то разностный оператор  $A_h$  при разных законах изменения  $\tau(h)$  может аппроксимировать разные дифференциальные операторы. Например, можно проверить, что

$$A_h y = \frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{2h} (y_{n+1} - y_{n-1}) - \frac{1}{\tau} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \quad (42)$$

при  $\tau = ch$  аппроксимирует оператор

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x},$$

а при  $\tau = ch^2$  — оператор

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Поэтому, если нет специальных соображений, лучше пользоваться разностными схемами с безусловной аппроксимацией.

### § 3. Устойчивость

**1. Неустойчивость.** Для некоторых разностных уравнений малые ошибки, допущенные на каком-либо этапе вычисления решения, при дальнейших выкладках сильно возрастают и делают невозможным получение сколько-нибудь пригодного результата.

При численном дифференцировании и суммировании рядов Фурье мы встречались с некорректными задачами, где бесконечно малая ошибка входных данных может привести к большой ошибке решения. Теперь рассмотрим пример неустойчивой разностной схемы решения задачи Коши для уравнения  $u'(x) = \alpha u(x)$ . Выберем следующую схему:

$$\frac{\sigma}{h} (y_{n+1} - y_n) + \frac{1-\sigma}{h} (y_n - y_{n-1}) = \alpha y_n. \quad (43)$$

При  $\sigma = 1$  она переходит в схему ломаных (8.15), устойчивость которой была доказана. Рассмотрим случай  $\sigma \neq 1$ .

Для простоты отбросим ошибку аппроксимации и исследуем только рост ошибки начальных данных. Тогда ошибка  $\delta y_n$  будет удовлетворять тому же уравнению (43), ибо оно линейное однородное. Удобно исследовать рост ошибки специального вида  $\delta y_n = z^n$ . Подставляя ее в (43), получим

$$\sigma z^2 + (1 - 2\sigma - \alpha h) z - (1 - \sigma) = 0. \quad (44)$$

Если  $h \ll 1$ , то корни этого квадратного уравнения равны  $z_1 = 1 + O(h)$ ,  $z_2 = 1 - (1/\sigma) + O(h)$ . Тогда при  $\sigma < 1/2$  будет  $|z_2| > 1$ , т. е. ошибка такого вида возрастает за шаг в несколько раз. Значит,  $\delta y(x) = z_2^n = z_2^{(x-x_0)/h}$  неограниченно возрастает при  $h \rightarrow 0$ , и счет неустойчив.

Если учесть еще ошибку аппроксимации, то получим типичные графики зависимости погрешности решения от шага, приведенные на рис. 54. Сплошная линия соответствует устойчивой схеме, штрихи — неустойчивой. При уменьшении шага ошибка сначала для всех схем убывает, потому что уменьшается погрешность аппроксимации. Для устойчивых схем при  $h \rightarrow 0$  ошибка стремится к конечной величине, связанной с ошибкой начальных данных. Если сама ошибка начальных данных исчезает при  $h \rightarrow 0$ ,

то мы получим график, изображенный пунктиром; т. е. устойчивые схемы позволяют получить сколь угодно высокую точность (если отсутствуют ошибки округления).

Если же схема неустойчива, то при малых шагах погрешность начальных или любых других данных сильно возрастает в ходе расчета и при  $h \rightarrow 0$  ошибка стремится к бесконечности. Значит, график ошибки имеет ненулевой минимум, и мы в принципе не можем получить сколь угодно высокую точность приближенного решения.

Правда, для неустойчивых схем есть некоторый оптимальный шаг, дающий наилучшую точность (это напоминает сходимость асимптотических рядов). Но эта наилучшая точность обычно настолько плоха, что считать по неустойчивым схемам практически невозможно.

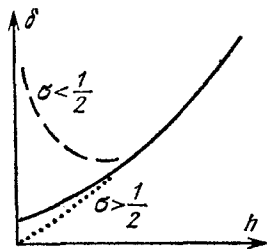


Рис. 54.

Теоретически счет по неустойчивым схемам возможен, если начальные данные таковы, что погрешность их задания при  $h \rightarrow 0$  убывает быстрее, чем нарастает неустойчивость. Но класс начальных данных, удовлетворяющих этому условию, обычно крайне узок и не охватывает даже малой части интересных случаев. Как правило, погрешности входных данных и аппроксимации убывают при  $h \rightarrow 0$  по степенному закону, а величина  $z_2^{(x-a)/h}$  возрастает много быстрее.

Отметим, что на устойчивость могут сильно влиять способы аппроксимации не только старших производных уравнения, но и младших производных и особенно краевых условий.

## 2. Основные понятия. Разностная схема (35)

$$A_h y = \varphi \quad (x \in \omega_h), \quad R_h y = \chi \quad (x \in \gamma_h)$$

*устойчива, если решение системы разностных уравнений непрерывно зависит от входных данных  $\varphi$ ,  $\chi$  и эта зависимость равномерна относительно шага сетки. Иными словами, для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , не зависящее от шага  $h$  (по крайней мере, для достаточно малых  $h$ ), что*

$$\|y^I - y^{II}\|_{y_h} \leq \varepsilon$$

если

$$\|\varphi^I - \varphi^{II}\|_{\varphi_h} \leq \delta, \quad \|\chi^I - \chi^{II}\|_{\chi_h} \leq \delta. \quad (45)$$

Если разностная схема (35) линейна, то разностное решение линейно зависит от входных данных. В этом случае  $\delta(\varepsilon) = K\varepsilon$ , где  $K$  — константа, не зависящая от  $h$ . Поэтому для линейных схем определение устойчивости (45) принимает следующий вид:

$$\|y^I - y^{II}\|_{y_h} \leq M \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_{\varphi_h} + M_1 \|\chi^I - \chi^{II}\|_{\chi_h}, \quad (46)$$

где  $M$ ,  $M_1$  — константы, не зависящие от  $h$ . Напомним, что в (45) и (46) вариации решения и входных данных рассматриваются каждая в своей норме.

Дальше мы встретимся с примерами разностных схем, устойчивых при одном выборе норм и неустойчивых — при другом.

Если независимых переменных несколько, то вводят понятия условной и безусловной устойчивости. Устойчивость называется *безусловной*, если (45) или (46) выполняется при произвольном соотношении шагов по различным переменным, лишь бы они были достаточно малы. Если для выполнения (45) или (46) шаги по разным переменным должны удовлетворять дополнительным соотношениям, то устойчивость называется *условной*. Например, дальше будет доказано, что явная схема (18) для уравнения теплопроводности устойчива только при  $\tau \leq h^2/2k$ .

Непрерывную зависимость разностного решения от  $\varphi$  называют устойчивостью *по правой части*, а непрерывную зависимость от  $\chi$  — устойчивостью *по граничным условиям*. Устойчивость по граничному условию на гиперплоскости  $t = t_0$  называют устойчивостью *по начальным данным*.

Все простейшие типы уравнений, кроме эллиптического, в качестве одной из переменных содержат время. Для таких уравнений обычно ставится эволюционная задача — смешанная задача Коши. Даже эллиптические уравнения нередко численно решаются посредством счета на установление, т. е. при помощи постановки вспомогательной задачи Коши. Поэтому исследованию устойчивости эволюционных задач мы уделим особое внимание.

Рассмотрим разностные схемы, содержащие только один известный и один новый слой, как (16) или (18). Такие схемы называют *двуслойными*. Их можно составить для любого уравнения. В самом деле, дифференциальное уравнение любого порядка по времени можно свести к системе уравнений первого порядка по времени, а для аппроксимации первой производной по времени достаточно двух слоев.

Для двуслойных схем решение смешанной задачи Коши на некотором слое  $t^*$  можно рассматривать как начальные данные для всех последующих слоев.

Двуслойная разностная схема называется *равномерно устойчивой* по начальным данным, если при постановке начальных данных на любом слое  $t^*$  ( $t_0 \leq t^* < T$ ) она по ним устойчива, причем устойчивость равномерна по  $t^*$ . Запишем условие равномерной устойчивости, ограничиваясь случаем линейных схем:

$$\|y^I(t) - y^{II}(t)\| \leq K \|y^I(t^*) - y^{II}(t^*)\|, \quad t_0 \leq t^* < t < T, \quad (47)$$

где константа  $K$  не зависит от  $t^*$  и  $h$ ; здесь  $y^I$ ,  $y^{II}$  — решения разностной схемы  $A_h y = \varphi$  с разными начальными данными и одной и той же правой частью.



Очевидно, из равномерной устойчивости по начальным данным следует обычная устойчивость по начальным данным (но не наоборот).

**Признак равномерной устойчивости.** Если  $A_h y^I = A_h y^{I1}$ , то для равномерной устойчивости по начальным данным достаточно, чтобы при всех  $t$  выполнялось

$$\|\hat{y}^I - \hat{y}^{I1}\| \leq (1 + C\tau) \|y^I - y^{I1}\|, \quad \tau = t_{m+1} - t_m, \quad C \geq 0. \quad (48)$$

**Доказательство.** Условие (48) означает, что если на некотором слое имеется ошибка  $\delta y$ , то при переходе на следующий слой  $\|\delta y\|$  возрастает не более чем в  $(1 + C\tau) \leq e^{C\tau}$  раз. Для перехода от  $t^*$  к  $t$  надо сделать  $m = (t - t^*)/\tau$  шагов по времени; при этом ошибка возрастет не более чем в  $e^{Cm\tau} = e^{C(t - t^*)} < e^{C(T - t_0)}$  раз. Отсюда следует:

$$\|\delta y(t)\| \leq K \|\delta y(t^*)\|, \quad K = e^{C(T - t_0)}, \quad (49)$$

что и требовалось доказать.

Признак (48) мы будем часто использовать при доказательстве устойчивости конкретных схем.

Из (49) видно, что если константа  $C$  велика, то, хотя схема формально устойчива, фактическая ошибка может сильно возрастать в ходе расчета; в этом случае схема является *слабо устойчивой*. Очевидно, чем больше промежутки времени  $T - t_0$ , на котором ищется решение, тем меньшая величина  $C$  обеспечивает хорошую устойчивость расчета. При  $T \rightarrow \infty$  схема будет устойчивой, только если  $C = 0$ .

Если точное решение задачи сильно возрастает или убывает с течением времени, то более интересна не абсолютная ошибка, а относительная  $\|\delta y(t)\|/\|y(t)\|$ . Можно классифицировать устойчивость по нарастанию относительной ошибки. Пусть, например,  $u(x, t) \sim \exp(C_0 t)$ . Тогда разностную схему, удовлетворяющую признаку (48), будем называть слабо устойчивой при  $\exp[(C - C_0)(T - t_0)] \geq 1$ , хорошо устойчивой — в обратном случае и *асимптотически устойчивой* при  $T \rightarrow \infty$ , если  $C \leq C_0$ .

Для многослойных схем определение и признаки равномерной устойчивости по начальным данным имеют более сложный вид; мы не будем их рассматривать.

**Теорема.** Пусть двуслойная разностная схема  $A_h y = \varphi$  равномерно устойчива по начальным данным и такова, что если два разностных решения  $A_h y^k = \varphi^k$  равны на некотором слое,  $y^I = y^{I1}$ , то на следующем слое выполняется соотношение

$$\|\hat{y}^I - \hat{y}^{I1}\| \leq \alpha \tau \|\varphi^I - \varphi^{I1}\|, \quad \alpha = \text{const}. \quad (50)$$

Тогда разностная схема устойчива по правой части.

**Доказательство.** Наряду с решением  $y$  рассмотрим решение  $\tilde{y}$ , соответствующее возмущенной правой части  $A_h \tilde{y} = \tilde{\varphi}$ ; поскольку исследуется устойчивость только по правой части, то можно считать, что  $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ .

Введем последовательность сеточных функций  $\omega_m(t)$ , определенных при  $t \geq t_{m-1}$  следующими условиями:

$$\begin{aligned} \omega_1(t_0) &= y(t_0), \\ \omega_{m+1}(t_m) &= \omega_m(t_m), \quad m = 1, 2, \dots, \\ A_h \omega_m &= \begin{cases} \tilde{\varphi} & \text{при } t_{m-1} \leq t < t_m, \\ \varphi & \text{при } t_m \leq t. \end{cases} \end{aligned} \quad (51)$$

Эти функции определены так, что  $\omega_m(t) = \tilde{y}(t)$  при  $t_{m-1} \leq t \leq t_m$ . Заметим, что в тех же обозначениях можно записать  $\omega_0(t) \equiv y(t)$ .

Сравним функции  $\omega_m(t)$  и  $\omega_{m+1}(t)$ . На слое  $t_m$  они совпадают по определению. Тогда из (50) и (51) следует, что

$$\|\omega_{m+1}(t_{m+1}) - \omega_m(t_{m+1})\| \leq \alpha\tau \|\varphi - \tilde{\varphi}\|.$$

При  $t \geq t_{m+1}$  эти функции удовлетворяют разностной схеме с одной и той же правой частью  $\varphi$ , но с разными начальными данными на слое  $t_{m+1}$ . Поэтому в силу определения (47) на последнем слое  $t_M$  будут выполняться неравенства

$$\|\omega_{m+1}(t_M) - \omega_m(t_M)\| \leq K \|\omega_{m+1}(t_{m+1}) - \omega_m(t_{m+1})\| \leq \alpha\tau K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|.$$

Отсюда при помощи неравенства треугольника получим

$$\begin{aligned} \|y(t_M) - \tilde{y}(t_M)\| &\leq \sum_{m=0}^{M-1} \|\omega_{m+1}(t_M) - \omega_m(t_M)\| \leq \\ &\leq \alpha\tau MK \|\varphi - \tilde{\varphi}\| = \alpha(t_M - t_0) K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|, \end{aligned}$$

т. е. имеет место устойчивость по правой части, что и требовалось доказать.

*Следствие.* Если неравенства (48) и (50) выполнены, то разностная схема устойчива и по начальным данным, и по правой части.

*Замечание.* Теорема была доказана для конечного промежутка времени. В бесконечной по  $t$  области, если выполнено условие (50), можно доказать следующие достаточные признаки устойчивости по правой части:

а) Если при переходе со слоя на слой ошибка начальных данных не возрастает ( $C \leq 0$ ), то схема устойчива по возмущениям правой части с конечным суммарным импульсом

$$\iint |\delta\varphi(x, t)| dx dt < \varepsilon.$$

б) Если при переходе со слоя на слой ошибка начальных данных убывает как  $(1 - C\tau)$ ,  $C > 0$ , то схема устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям  $|\delta\varphi(x, t)| < \varepsilon$ .

**3. Принцип максимума.** Есть несколько способов исследования устойчивости разностных схем: принцип максимума, метод

разделения переменных, метод операторных неравенств и некоторые другие. Сейчас мы рассмотрим принцип максимума, который применяют к уравнениям переноса, а также к параболическим и эллиптическим уравнениям. Он позволяет доказывать устойчивость в  $\|\cdot\|_c$ .

Сформулируем признак устойчивости явных и неявных двухслойных линейных разностных схем. Запишем двухслойную схему в следующем виде:

$$\sum_k \alpha_k \hat{y}_{n+k} = \sum_l \beta_l y_{n+l} + \varphi_n, \quad (52)$$

где суммирование на каждом слое производится по узлам шаблона около  $n$ -го узла. Коэффициенты  $\alpha_k$  перенумеруем так, чтобы  $|\alpha_0| = \max_k |\alpha_k|$ . Тогда:

а) *схема равномерно устойчива по начальным данным, если*

$$(1 + C\tau) |\alpha_0| \geq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \sum_l |\beta_l|, \quad C = \text{const}. \quad (53)$$

б) *схема устойчива по правой части, если выполнено (53) и*

$$|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \geq \frac{\kappa}{\tau}, \quad \kappa = \text{const} > 0. \quad (54)$$

Доказательство. а) Фиксируем правую часть (52) и внесем ошибку  $\delta y$  на исходном слое. Тогда ошибка  $\delta \hat{y}$  на новом слое удовлетворяет уравнению

$$\sum_k \alpha_k \delta \hat{y}_{n+k} = \sum_l \beta_l \delta y_{n+l}.$$

Отсюда для любого узла  $n$  следует неравенство

$$|\alpha_0| \cdot |\delta \hat{y}_n| \leq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \cdot |\delta \hat{y}_{n+k}| + \sum_l |\beta_l| \cdot |\delta y_{n+l}|.$$

Применим это неравенство к узлу  $\bar{n}$ , в котором  $|\delta \hat{y}_n|$  достигает своего максимума; при этом в правой части заменим  $|\delta \hat{y}_{n+k}|$  и  $|\delta y_{n+l}|$  их максимальными значениями, что только усилит неравенство. Тогда получим

$$|\alpha_0| \max_n |\delta \hat{y}_n| \leq \max_n |\delta \hat{y}_n| \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \max_n |\delta y_n| \sum_l |\beta_l|,$$

или

$$\|\delta \hat{y}\|_c \left( |\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right) \leq \|\delta y\|_c \sum_l |\beta_l|.$$

Но в силу неравенства (53)

$$\sum_l |\beta_l| \leq (1 + C\tau) |\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \leq (1 + C\tau) \left( |\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right).$$

Поэтому

$$\|\delta \hat{y}\|_c \leq (1 + C\tau) \|\delta y\|_c,$$

т. е. выполнен признак (48). Первое утверждение доказано.

б) Зафиксируем в (52) решение на исходном слое и внесем погрешность в правую часть. Тогда погрешность решения на новом слое удовлетворяет уравнению

$$\sum_k \alpha_k \delta \hat{y}_{n+k} = \delta \varphi_n.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\alpha_0| \cdot |\delta \hat{y}_n| \leq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \cdot |\delta \hat{y}_{n+k}| + |\delta \varphi_n|.$$

Аналогично предыдущему, выберем узел  $\bar{n}$  и заменим справа все величины их максимумами. Легко получим, что

$$\|\delta \hat{y}\|_c \left( |\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right) \leq \|\delta \varphi\|_c.$$

Отсюда с учетом (54) следует, что

$$\|\delta \hat{y}\|_c \leq \frac{\tau}{\alpha} \|\delta \varphi\|_c,$$

т. е. выполнено условие (50). Второе утверждение доказано.

**Замечание 1.** Доказательство непосредственно применимо к схемам с переменными (зависящими от  $x$ ,  $t$ ) коэффициентами. Его можно обобщить на некоторые квазилинейные схемы, в которых коэффициенты зависят от  $y$ .

**Замечание 2.** Краевые условия двуслойных линейных схем также имеют форму (52). Поэтому данный признак позволяет устанавливать устойчивость по крайевым условиям.

**Замечание 3.** Принцип максимума дает достаточное условие устойчивости; невыполнение критериев (53) и (54) еще не означает неустойчивости схемы.

Изложенным методом обычно удается доказать устойчивость только схем точности  $O(\tau)$ , да и то не всех; для обоснования устойчивости схем более высокого порядка точности по  $\tau$  применяют другие методы.

**Пример.** Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом (15):

$$u_t = ku_{xx} + f, \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t).$$

Запишем для нее неявную схему (16) — (17) на равномерной сетке:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{k}{h^2} (\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}) + \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(\hat{t}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(\hat{t}).$$

Переписывая эту схему в форме (52), получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\tau} + \frac{2k}{h^2}, \quad \alpha_{-1} = \alpha_1 = \frac{k}{h^2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{при } 1 \leq n \leq N-1;$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0 \quad \text{при } n=0 \text{ и } n=N;$$

остальные коэффициенты равны нулю. Видно, что при любых соотношениях шагов по  $t$  и  $x$  условие (54) выполнено в регулярных узлах, а условие (53) — во всех узлах сетки. Следовательно, схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям.

Для эллиптических уравнений обычно дается другая формулировка принципа максимума. Кроме того, для нестационарных задач имеется ряд модификаций принципа максимума: метод роста единичной ошибки, метод индекса разностной схемы и т. д. Мы их рассматривать не будем.

**4. Метод разделения переменных.** Этот метод применяется для строгого обоснования многих линейных схем и нестрогого, но плодотворного исследования большинства нелинейных задач, возникающих в практике вычислений. При его помощи устанавливается устойчивость в  $\|\cdot\|_{l_2}$ .

Рассмотрим применение метода к линейным двуслойным схемам, записанным в канонической форме:

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (55)$$

где  $B, A$  — некоторые разностные операторы, действующие на  $y$  (или  $\hat{y}$ ) как функцию пространственной переменной. Например, для явной схемы (18) имеем

$$B = E, \quad Ay_n = -\frac{k}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}).$$

При фиксированной правой части погрешность решения удовлетворяет однородному уравнению

$$B \delta \hat{y} = (B - \tau A) \delta y. \quad (56)$$

Будем искать для этого уравнения частное решение с разделяющимися переменными

$$\delta y(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{iax_n}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (57)$$

При этом  $\delta \hat{y} = \rho_q \delta y$ , так что  $\rho_q$  есть множитель роста  $q$ -й гармоники при переходе со слоя на слой. Подставляя (57) в (56),

получим уравнение для определения  $\rho_q$ :

$$\rho_q B e^{iqx} = (B - \tau A) e^{iqx}. \quad (58)$$

Будем считать, что схема (55) имеет постоянные коэффициенты и задана на равномерной сетке. Тогда уравнение (58) после сокращения множителя  $\exp(iqx)$  не будет зависеть от координаты  $x$  (или ее индекса  $n$ ). Следовательно, величина  $\rho_q$  не будет зависеть от  $x$  или  $t$ .

**Признак устойчивости.** *Схема (55) с постоянными коэффициентами устойчива по начальным данным, если для всех  $q$  выполняется неравенство*

$$|\rho_q| \leq 1 + C\tau, \quad C = \text{const}. \quad (59)$$

**Доказательство.** Система функций  $e^{iqx}$  ( $0 \leq q \leq N-1$ ) полна и ортогональна на равномерной сетке  $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ . Разложим произвольную ошибку начальных данных  $\delta y(x, t_0)$  в ряд Фурье по этой системе (см. гл. II, § 2, п. 4):

$$\delta y(x_n, t_0) = \sum_{q=0}^{N-1} a_q e^{iqx_n}.$$

Поскольку для линейного уравнения (55) справедлив принцип суперпозиции, то метод разделения переменных дает для ошибки на слое  $t_m$  следующее выражение:

$$\delta y(x_n, t_m) = \sum_{q=0}^{N-1} a_q \rho_q^m e^{iqx_n}.$$

Используя ортогональность гармоник, получаем отсюда

$$\begin{aligned} \|\delta y(t_m)\|_{l_2}^2 &= N \sum_{q=0}^{N-1} |\rho_q|^{2m} |a_q|^2 \leq \\ &\leq \max_q |\rho_q|^{2m} N \sum_{q=0}^{N-1} |a_q|^2 = \max_q |\rho_q|^{2m} \|\delta y(t_0)\|_{l_2}^2. \end{aligned}$$

При помощи условия (59) преобразуем это неравенство к виду

$$\|\delta y(t_m)\|_{l_2} \leq (1 + C\tau)^m \|\delta y(t_0)\|_{l_2},$$

что совпадает с признаком (48). Утверждение доказано.

**Замечание 1.** Из признака устойчивости (59) и дополнительного условия (54) следует устойчивость схемы по правой части в  $\|\cdot\|_{l_2}$ .

**Замечание 2.** Фактически константа  $C$  в (59) не должна быть большой, иначе устойчивость будет слабой (см. п. 2). Поэтому при проверке этого признака обычно полагают  $C=0$ .

Признак неустойчивости. Если хотя бы для одного  $q$  величину  $|\rho_q|$  нельзя мажорировать величиной  $1 + C\tau$ , то схема (55) неустойчиза.

Доказательство. Пусть в начальных данных имеется ошибка вида  $\epsilon e^{iqx}$  с данным  $q$ . Тогда к моменту  $t = m\tau$  она возрастет в  $\rho_q^m$  раз, что по модулю больше величины  $(1 + C\tau)^m = (1 + C\tau)^{t/\tau} > Ct$  при сколь угодно большом  $C$ . Неограниченный рост ошибки означает неустойчивость схемы.

Пример. Исследуем устойчивость явной схемы (18) для уравнения теплопроводности. Для этой схемы уравнение (58) принимает вид

$$(\rho_q - 1) e^{iqx_n} = \frac{k\tau}{h^2} (e^{iq(x_n + h)} - 2e^{iqx_n} + e^{iq(x_n - h)}).$$

Отсюда вытекает, что множитель роста

$$\rho_q = 1 - \frac{4k\tau}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2}.$$

Тогда условие (59) с учетом замечания 2 приобретает вид  $-1 \leq \rho_q \leq 1$ . Это неравенство выполняется для любого  $q$ , только если

$$2k\tau/h^2 \leq 1, \text{ или } \tau \leq \frac{h^2}{2k}. \quad (60)$$

Таким образом, явная схема (18) условно устойчива.

Метод разделения переменных применим к многослойным линейным схемам с постоянными коэффициентами, в частности к схемам, аппроксимирующим задачи для дифференциальных уравнений второго порядка по времени (соответствующие примеры будут рассмотрены в главе XIII). Сейчас остановимся на двух нестрогих обобщениях этого метода.

Замораживание коэффициентов. Если линейное дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты или используется неравномерная сетка, то задача сводится к линейной разностной схеме с переменными коэффициентами. В этом случае уравнение (58) содержит неустранимую зависимость от  $n$ . Следовательно, множитель роста  $\rho_q$  также зависит от  $n$  и его нельзя считать постоянным для данной гармоники.

«Заморозим» коэффициенты схемы, т. е. возьмем в качестве постоянных коэффициентов значения коэффициентов схемы в некотором узле  $n$ , и найдем  $\rho_q$  из (58). Будем считать разностную схему устойчивой, если при любых  $q$  и  $n$  выполняется признак (59).

Этот способ оказался очень эффективным приемом исследования устойчивости схем. В настоящее время он обоснован для многих классов параболических и эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами (в ряде случаев достаточно непре-

рывности коэффициентов) и для некоторых узких классов гиперболических уравнений. В практике вычислений для любых уравнений с гладкими коэффициентами и решениями критерии устойчивости, полученные этим способом, хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

Однако способ «замороженных» коэффициентов применим не всегда. Для ряда задач с разрывными, недифференцируемыми и даже кусочно-гладкими коэффициентами построены примеры\*), в которых использование этого способа приводит к ошибочным заключениям.

**Л и н е а р и з а ц и я.** Сложные задачи математической физики приводят к нелинейным разностным схемам

$$B_1(\hat{y}) + B_2(y) = \varphi, \quad (61)$$

где  $B_1, B_2$  — нелинейные операторы, действующие на  $\hat{y}$  и  $y$  как на функции пространственной переменной. Нарастание ошибок (пока эти ошибки малы) описывается линеаризованным уравнением

$$\frac{\delta B_1(\hat{y})}{\delta \hat{y}} \delta \hat{y} + \frac{\delta B_2(y)}{\delta y} \delta y = \delta \varphi. \quad (62)$$

Обычно  $B$  и  $y$  являются  $N$ -мерными векторами; тогда  $\delta B/\delta y$  является матрицей производных  $(\partial B_i/\partial y_k)$ . Устойчивость уравнения (62), линейного относительно ошибок, можно исследовать способом «замороженных» коэффициентов. Уравнение для множителя роста  $q$ -й гармоники принимает вид

$$\left( \rho_q \frac{\delta B_1}{\delta \hat{y}} + \frac{\delta B_2}{\delta y} \right) e^{iqx} = 0. \quad (63)$$

Способ линеаризации при исследовании многих сложных разностных схем (например, схем, возникающих в задачах газодинамики) дает критерии устойчивости, хорошо подтверждаемые практикой численных расчетов. Однако он не является строго обоснованным и в некоторых случаях может привести к неверным результатам.

Метод разделения переменных можно строго обобщить на многие классы линейных схем с переменными коэффициентами (на неравномерных сетках), а также применять его для доказательства устойчивости по крайевым условиям. Для этого надо вместо гармоник  $\exp(iqx)$  использовать систему  $\gamma_q(x)$  собственных функций разностной задачи

$$\rho_q B \gamma_q(x) = (B - \tau A) \gamma_q(x)$$

и соответствующие собственные значения  $\rho_q$ . Однако точно найти спектр разностной схемы удастся лишь в сравнительно простых случаях, так что исследовать этим методом устойчивость схем для сложных задач математической физики удастся не часто.

\*) См., например, [33], стр. 383.



**5. Метод энергетических неравенств.** Метод основан на использовании энергетических норм, порождаемых самими разностными операторами. При его помощи доказана устойчивость и даны априорные оценки точности многих разностных схем с переменными коэффициентами, некоторых квазилинейных схем и т. д. Рассмотрим идею метода \*) на примере стационарной (не содержащей времени) разностной схемы

$$Ay = \varphi,$$

где разностный оператор  $A$  — линейный, самосопряженный и положительный. В этом случае существует обратный оператор  $A^{-1}$ , который тоже является линейным, самосопряженным и положительным.

При помощи положительного оператора можно ввести норму

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y) > 0 \quad \text{при } y \neq 0, \quad (64)$$

где  $(, )$  — скалярное произведение на сетке; аналогично строится норма  $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ , называемая *негативной*. Проведем цепочку преобразований:

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y) = (\varphi, A^{-1}\varphi) = (A^{-1}\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2.$$

Отсюда вытекает соотношение  $\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}}$ , которое означает устойчивость по правой части.

Пусть, например, оператор  $A = A_h$  является второй разностью, т. е. аналогом  $-d^2/dx^2$ , а  $u(x)$  и ее производные достаточно быстро убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда непрерывный аналог нормы (64) есть (сеточное выражение не так наглядно, и мы его не приводим)

$$\|u\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right) u(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx;$$

как отмечалось в п. 2, эта норма сильнее, чем  $\|\cdot\|_C$ . Оператор  $A^{-1}$  в этом случае является двойной суммой — аналогом двойного интеграла, и порожденная им норма равна

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \int_{-\infty}^x \varphi(\xi) d\xi \right)^2.$$

Это слабая норма. Из приведенных рассуждений видно, что метод энергетических неравенств для ряда задач позволяет доказывать устойчивость при использовании сильных норм для решения  $y$  и слабых норм для правой части  $\varphi$  \*\*).

\*) Подробное изложение метода см. в [30, 33].

\*\*\*) В подобных случаях нередко удается доказать сходимость схем с более высоким порядком точности, чем при использовании других методов.

Для конкретной реализации этого метода надо проверить, обладает ли оператор  $A$  требуемыми свойствами, определить скалярное произведение на сетке, построить сеточный оператор  $A^{-1}$  и проверить аппроксимацию в  $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ . Все эти действия связаны обычно с громоздкими вычислениями.

**6. Операторные неравенства.** Общая теория устойчивости разностных схем, основанная на установлении неравенств между разностными операторами, образующими схему, построена А. А. Самарским (см. [30, 33]). Она позволяет для многих классов линейных схем получить необходимые и достаточные условия устойчивости и априорные оценки точности. Рассмотрим одно из таких условий устойчивости.

Напомним некоторые свойства операторов, отображающих гильбертово пространство  $H$  в себя \*). Оператор  $A$  называется *неотрицательным* ( $A \geq 0$ ), если  $(Ax, x) \geq 0$  для любого ненулевого  $x \in H$ , называется *положительным* ( $A > 0$ ) при  $(Ax, x) > 0$  и *положительно определенным* при  $(Ax, x) \geq \varepsilon(x, x)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Неравенство  $A \geq B$  понимается в том смысле, что  $A - B \geq 0$ .

Оператор  $A$  называют самосопряженным, если  $(Ax, y) = (x, Ay)$  для любых  $x, y \in H$ . Квадратным корнем из самосопряженного неотрицательного оператора  $A$  называют такой оператор  $B$ , что  $B \cdot B = A$ ; его обозначают  $A^{1/2}$ , он существует и является самосопряженным и неотрицательным.

Исследуем устойчивость двухслойной линейной разностной схемы, записанной в канонической форме:

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi. \quad (65)$$

*Теорема. Если операторы  $A$  и  $B$  самосопряженные, не зависят от номера слоя  $n$ , и выполняется условие*

$$B \geq \frac{\tau}{2} A > 0, \quad (66)$$

*то схема (65) устойчива по начальным данным в энергетической норме  $\|\cdot\|_A$ :*

$$\|\hat{y}\|_A \leq \|y\|_A. \quad (67)$$

*Доказательство.* Для исследования устойчивости по начальным данным достаточно рассмотреть однородное уравнение (65). Полагая  $\varphi = 0$  и умножая (65) слева на  $A^{1/2}B^{-1}$ , получим

$$A^{1/2} \frac{\hat{y} - y}{\tau} + A^{1/2} B^{-1} Ay = 0.$$

\*) Более подробно о свойствах операторов см., например, в [20].

Полагая  $\eta = A^{1/2}y$  и замечая, что  $Ay = A^{1/2}\eta$ , преобразуем это уравнение в явную разностную схему:

$$\hat{\eta} = S\eta, \quad S = E - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2},$$

где  $E$  — единичный оператор; оператор  $S$  является самосопряженным.

Перепишем неравенство (66) в следующем виде:

$$0 < B^{-1} \leq \frac{2}{\tau} A^{-1}.$$

Умножая его слева и справа на положительный оператор  $A^{1/2}$ , получим

$$0 < \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \leq 2E.$$

Вычитая это неравенство из  $E$ , получим

$$-E \leq E - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \equiv S < E.$$

Это означает, что

$$\|\hat{\eta}\|_{l_2}^2 = (\hat{\eta}, \hat{\eta}) = (S\eta, S\eta) \leq (\eta, \eta) = \|\eta\|_{l_2}^2. \quad (68)$$

Норма  $\|\cdot\|_{l_2}$  просто связана с энергетической нормой:

$$\|\eta\|_{l_2}^2 = (\eta, \eta) = (A^{1/2}y, A^{1/2}y) = (Ay, y) = \|y\|_A^2. \quad (69)$$

Из (68) и (69) следует (67), что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** При доказательстве не требовалось постоянства коэффициентов схемы (65). Тем самым, признак устойчивости (66) справедлив для разностных схем с переменными коэффициентами.

В этом параграфе излагалась техника исследования устойчивости уже составленной схемы. А как надо составлять схему, чтобы она была устойчивой? Некоторые математические способы построения устойчивых схем были предложены А. А. Самарским в [30]. Высказывались идеи о рассмотрении разностных схем как некорректных задач с дискретными переменными и регуляризации их по А. Н. Тихонову.

Для ряда конкретных задач на основании физических аналогий (скорости распространения возмущений) можно предсказать, будет ли схема устойчива и как ее надо составить, чтобы она была устойчива. В следующих главах будет приведено много таких примеров.

## § 4. Сходимость

**1. Основная теорема.** В этом параграфе мы рассмотрим задачу, для дифференциального уравнения с граничными условиями

$$Au(x) = f(x), \quad x \in G, \quad Ru(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (70)$$

которая на сетке, состоящей из множества регулярных узлов  $\omega_h$  и множества нерегулярных узлов  $\gamma_h$ , аппроксимирована разностной схемой

$$A_h y(x) = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad R_h y(x) = \chi(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (71)$$

В конечном итоге нас будет интересовать близость разностного решения  $y(x)$  к точному решению  $u(x)$ ; поскольку  $y(x)$  определено только на сетке  $\omega_h + \gamma_h$ , то сравнивать эти решения надо в сеточной норме.

*Определение. Разностное решение  $y(x)$  сходится к решению  $u(x)$  задачи (70), если*

$$\|y(x) - u(x)\|_{y_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0; \quad (72)$$

*разностное решение имеет порядок точности  $p$ , если*

$$\|y(x) - u(x)\|_{y_h} = O(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (73)$$

Анализируя сходимость схемы ломаных (8.15) для обыкновенного дифференциального уравнения, мы видели, что погрешность решения вызвана погрешностью начальных данных и погрешностью аппроксимации, усиливающимися (или ослабляющимися) в ходе расчета. Интуитивно ясно, что для хорошей точности расчета достаточно, чтобы эти погрешности были малы и в ходе расчета не сильно возрастали.

Строго говоря, в любых расчетах присутствуют ошибки округления; поэтому при  $h \rightarrow 0$  надо одновременно увеличивать количество десятичных знаков, удерживаемое в расчете. Но в современных ЭВМ относительная ошибка округления на одну операцию не превышает  $10^{-10}$ , т. е. пренебрежимо мала по сравнению с ошибками аппроксимации при тех шагах  $h$ , которые фактически используются. Поэтому в большинстве случаев ошибками округления можно пренебречь.

*Определение. Разностная схема (71) корректна, если ее решение существует и единственно при любых входных данных  $\varphi$  и  $\chi$ , принадлежащих заданным классам функций, и схема устойчива.*

Строго говоря, для нелинейных схем разностное решение может быть не единственным или существовать не при всяких входных данных. В этом случае схему называют корректной в окрестности решения  $y[\varphi, \chi]$ , если (по крайней мере при достаточно малом  $h$ ) для любых  $\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}$ , достаточно близких к  $\varphi, \chi$ , в некоторой малой окрестности  $y[\varphi, \chi]$  имеется единственное решение  $\tilde{y}[\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}]$ , устойчивое по  $\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}$  в смысле определения (45).

Отметим, что если граница области  $G$  состоит из нескольких кусков  $\Gamma_k$ , то обычно операторы  $R_k$  и правые части  $\mu_k(x)$  граничных условий на этих кусках различны. Разностные операторы

$R_{hk}$  и правые части  $\chi_k$  на соответствующих множествах нерегулярных узлов  $\gamma_{hk}$  также будут различны. Для того чтобы решение разностной схемы (71) существовало, все они должны быть согласованы между собой, т. е. должны удовлетворять определенным соотношениям на линиях или в точках стыка кусков границы. Например, для первой краевой задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \mu(x), \quad 0 \leq x \leq a, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

условиями согласования будут соотношения  $\mu(0) = \mu_1(0)$ ,  $\mu(a) = \mu_2(0)$ , или, соответственно,  $\chi(0) = \chi_1(0)$ ,  $\chi(a) = \chi_2(0)$ .

*Теорема\**). Если решение  $u[f, \mu]$  задачи (70) существует, разностная схема (71) корректна и аппроксимирует задачу (70) на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

*Доказательство.* Напишем цепочку преобразований:

$$A_h u = A_h u - Au + f = A_h u - Au + f - \varphi + \varphi = -\psi(x) + \varphi(x),$$

где  $\psi(x)$  есть, по определению, невязка разностной схемы. Делая аналогичное преобразование для краевых условий, получим

$$\begin{aligned} A_h u(x) &= \varphi(x) - \psi(x), \quad x \in \omega_h, \\ R_h u(x) &= \chi(x) - v(x), \quad x \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (74)$$

Равенства (74) представляют собой разностную схему (71) с правыми частями, измененными на величину невязки. Поскольку разностная схема устойчива, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что  $\|y - u\|_{y_h} \leq \varepsilon$ , если  $\|\psi\|_{\varphi_h} \leq \delta(\varepsilon)$ ,  $\|v\|_{\chi_h} \leq \delta(\varepsilon)$ .

В силу аппроксимации для любого  $\delta > 0$  найдется такое  $h_0(\delta)$ , что  $\|\psi\|_{\varphi_h} \leq \delta$ ,  $\|v\|_{\chi_h} \leq \delta$  при  $h \leq h_0(\delta)$ .

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $h_0(\delta(\varepsilon))$ , что  $\|y - u\|_{y_h} \leq \varepsilon$  при  $h \leq h_0$ . Сходимость доказана.

*Замечание 1.* Некоторые начальные или граничные условия аппроксимируются точно; примером являются граничные условия первого рода  $u(a, t) = \mu(t)$ , если узел  $x_N$  сетки расположен на границе  $x = a$ . Устойчивости по таким условиям можно не требовать, ибо никакой ошибки в расчет они не вносят (кроме ошибки округления).

Устойчивость по правой части требуется почти во всех случаях, поскольку погрешность аппроксимации в (74) эквивалентна некоторой погрешности правой части.

\*) Ее кратко формулируют так: «Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость».

**З а м е ч а н и е 2.** Аппроксимацию часто проверяют не на решениях задачи (70), а на некотором широком классе функций, которому принадлежит решение (обычно на классе функций, непрерывных и ограниченных вместе с некоторым числом своих производных). Из замечания 2 в § 2, п. 5 следует, что такая аппроксимация достаточна для доказательства теоремы о сходимости.

**З а м е ч а н и е 3.** При исследовании аппроксимации и устойчивости конкретных разностных схем нередко используют разные нормы для одной и той же функции. Например, при установлении локальной аппроксимации для  $\varphi(x)$  берется  $\|\varphi\|_c$ , а при спектральном исследовании устойчивости —  $\|\varphi\|_{l_2}$ . Доказательство сходимости в этом случае справедливо, только если аппроксимация установлена в нормах  $\|\varphi\|$ ,  $\|\chi\|$  более сильных (или тех же самых), чем нормы, использованные для правых частей в определении устойчивости.

**З а м е ч а н и е 4.** Если аппроксимация или устойчивость условные, то сходимость имеет место при выполнении условий устойчивости и аппроксимации (т. е. при определенных соотношениях между шагами по разным переменным).

**З а м е ч а н и е 5.** Устойчивость является, как нетрудно убедиться, необходимым условием сходимости. В самом деле, если схема неустойчива, то найдутся такие сколь угодно малые ошибки входных данных, которым соответствует значительная погрешность решения. Сходимости при этом не может быть.

**П р и м е р.** Рассмотрим явную схему (18) для уравнения теплопроводности (15). В § 2, п. 3 была установлена аппроксимация этой схемы с погрешностью (25), равной  $\|\psi\|_c = O(\tau + h^2)$ . В § 3, п. 4 было доказано, что она условно устойчива в  $\|\cdot\|_{l_2}$  при  $\tau \leq h^2/(2k)$ . С учетом замечания 3 отсюда следует сходимость в норме  $\|y - u\|_{l_2}$ , если выполнено условие  $\tau \leq h^2/(2k)$ .

Отметим, что на самом деле имеет место сходимость в  $\|y - u\|_c$ ; но для доказательства этого факта надо обосновать устойчивость схемы в нормах  $\|\varphi\|_c$ ,  $\|y\|_c$ .

**2. Оценки точности.** Для линейных задач оценки погрешности, как априорные мажорантные, так и апостериорные асимптотические, можно получить на основании приведенных ниже теорем.

**Т е о р е м а 1\*).** Если условия теоремы из п. 1 выполнены, операторы  $A_h$  и  $R_{hk}$  линейные, а порядок аппроксимации равен  $p$ , то сходимость имеет порядок не ниже  $p$ .

**Доказательство.** Пусть задача (70) и разностная схема (71) линейны, а граница  $\Gamma$  состоит из кусков  $\Gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).

\*) Ее кратко формулируют так: «Для линейных схем порядок точности не ниже порядка аппроксимации».

Условие устойчивости (46) для линейной схемы принимает вид

$$\|y\|_y \leq M_0 \|\varphi\|_\varphi + \sum_{k=1}^K M_k \|\chi_k\|_{\chi_k} \quad (75)$$

(начальные условия, если задача их содержит, входят в сумму по граничным условиям). Рассмотрим погрешность разностного решения  $z(x) = y(x) - u(x)$ . Вычтем соотношение (74)

$$A_h u = \varphi - \psi, \quad R_{hk} u = \chi_k - v_k$$

из разностной схемы (71) и заметим, что благодаря линейности схемы  $A_h y - A_h u = A_h (y - u) = A_h z$ . Тогда  $z(x)$  удовлетворяет схеме с разностными операторами (71):

$$A_h z(x) = \psi(x) \quad x \in \omega_h, \quad R_{hk} z(x) = v_k(x), \quad x \in \gamma_{hk}, \quad (76)$$

где в правых частях стоят невязки. Применяя к (76) условие устойчивости (75), получим

$$\|z\|_y \leq M_0 \|\psi\|_\varphi + \sum_{k=1}^K M_k \|v_k\|_{\chi_k}. \quad (77)$$

Поскольку схема (71) имеет порядок аппроксимации  $p$ , то

$$\|\psi\|_\varphi \leq \alpha_0 h^p, \quad \|v_k\|_{\chi_k} \leq \alpha_k h^p, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (78)$$

Подставляя эти выражения в (77), получим *априорную мажорантную* оценку погрешности:

$$\|y - u\|_y \leq M h^p, \quad M = \sum_{k=0}^K M_k \alpha_k, \quad (79)$$

что доказывает теорему.

**Замечание 1.** Для доказательства требовалась линейность только разностных операторов, но фактически линейными разностными операторами можно аппроксимировать только линейные дифференциальные или интегральные операторы.

**Замечание 2.** Если условия теоремы 1 выполнены, то порядок точности может быть выше порядка аппроксимации. В таких случаях более полное исследование задачи нередко показывает, что для сходимости в данной норме  $\|\cdot\|_y$  достаточно устойчивости по более слабой норме  $\|\cdot\|_\varphi$ , в которой порядок аппроксимации выше.

**Замечание 3.** При оценках погрешности конкретных схем константы  $M_k$  определяются в ходе доказательства устойчивости; они постоянны для данной схемы. Величины  $\alpha_k$  выражаются обычно через нормы некоторых производных  $u(x)$  и тем самым зависят от решения (см. выражения невязки (25) или (26)).

**Замечание 4.** Для нелинейных схем можно сформулировать аналогичную теорему. При этом следует пользоваться опре-

делением устойчивости (45), которое можно записать так:

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \varepsilon, \text{ если } \|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \delta_0(\varepsilon), \|\chi_k - \tilde{\chi}_k\| \leq \delta_k(\varepsilon), \quad (80)$$

$$1 \leq k \leq K.$$

Тогда, если  $\delta_k(\varepsilon) = (\varepsilon/M_k)^{m_k}$ ,  $0 \leq k \leq K$ , то порядок точности будет не ниже  $q = \min_{0 \leq k \leq K} (p/m_k)$ ; при  $m_k \equiv 1$  снова приходим к теореме 1.

**Замечание 5.** Для случая многих переменных порядок аппроксимации по разным переменным может быть неодинаковым. Очевидно, порядок точности по разным переменным также может быть различным.

**Пример.** Явная схема (17)—(18) для первой краевой задачи теплопроводности (15), разобранный в примере к п. 1, имеет погрешность аппроксимации (25):

$$\|\psi\|_c \leq \frac{1}{12} kh^2 \|u_{xxxx}\|_c + \frac{1}{2} \tau \|u_{tt}\|_c.$$

Начальные данные и краевые условия аппроксимируются точно, и устойчивости по ним можно не требовать; согласно замечанию 1 в § 3, п. 4 условие устойчивости по правой части имеет вид

$$\|\delta \hat{y}\|_{l_2} \leq \tau \|\delta \varphi\|_{l_2} \quad \text{или} \quad \|\delta y(t)\|_{l_2} \leq (t - t_0) \max_t \|\delta \varphi\|_{l_2}.$$

Отсюда следует априорная оценка

$$\|y - u\|_{l_2} \leq (t - t_0) \max_t \left( \frac{1}{2} \tau \|u_{tt}\|_{l_2} + \frac{1}{12} kh^2 \|u_{xxxx}\|_{l_2} \right) = O(\tau + h^2), \quad (81)$$

т. е. схема имеет первый порядок точности по времени и второй — по пространству.

Для практических вычислений важное значение имеет следующая

**Теорема 2.** Пусть задача (70) и разностная схема (71) линейны, разностная схема корректна и аппроксимирует задачу так, что существуют

$$\bar{\psi}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} (Au - A_h u + \varphi - f), \quad x \in G, \quad (82a)$$

$$\bar{v}_k(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} (R_k u - R_{hk} u + \chi_k - \mu_k), \quad x \in \Gamma_k, \quad (82b)$$

Пусть существует решение  $\bar{z}(x)$  задачи

$$A\bar{z}(x) = \bar{\psi}(x), \quad x \in G, \quad R_k \bar{z}(x) = \bar{v}_k(x), \quad x \in \Gamma_k, \quad (83)$$

и на этом решении разностные операторы  $A_h, R_{hk}$  аппроксимируют дифференциальные операторы  $A, R_k$ . Тогда погрешность



решения (71) имеет следующую асимптотику:

$$y(x) - u(x) = h^p \bar{z}(x) + o(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0, \quad x \in \omega_h + \gamma_h. \quad (84)$$

Доказательство. Пользуясь линейностью операторов, нетрудно установить следующее равенство:

$$A_h [h^{-p}(y - u) - \bar{z}] = h^{-p}(Au - A_h u + \varphi - f) - \bar{\psi} + (A\bar{z} - A_h \bar{z});$$

аналогичные равенства записываются для граничных условий. При  $h \rightarrow 0$  правые части всех этих равенств стремятся по норме к нулю: последняя скобка — на основании предположения об аппроксимации на функции  $\bar{z}(x)$ , а остальные члены — согласно условию (82).

Тогда, благодаря устойчивости разностных операторов  $A_h, R_{hh}$ , выражение в квадратных скобках в левой части этих равенств стремится по норме к решению задачи (71) с нулевой правой частью, которое тождественно равно нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему можно обобщить на случай многих переменных, даже если порядок аппроксимации по разным переменным неодинаков. В случае двух переменных возможна следующая асимптотика погрешности:

$$y(x, t) - u(x, t) = \tau^q \bar{z}_1(x, t) + h^p \bar{z}_2(x, t) + o(\tau^q + h^p), \quad (85)$$

или иная, в зависимости от характера аппроксимации.

Теорема 2 обосновывает использование метода Рунге для апостериорной асимптотической оценки погрешности или для уточнения результата.

Например, явная схема (18) для уравнения  $u_t = ku_{xx}$  имеет невязку (26), равную  $\psi(x, t) = \left(\frac{1}{12}kh^2 - \frac{1}{2}k^2\tau\right)u_{xxxx}(x, t)$ . Поскольку решение этого уравнения дифференцируемо любое число раз, то легко проверить выполнение условий теоремы 2 и определить погрешность:

$$y(x, t) - u(x, t) = \left(\frac{kh^2}{12} - \frac{k^2\tau}{2}\right)\bar{z}(x, t) + o(\tau + h^2), \quad (86)$$

где  $\bar{z}$  удовлетворяет уравнению  $\bar{z}_t - k\bar{z}_{xx} = u_{xxxx}$  и соответствующим начальным и граничным условиям.

Возьмем сетку  $\omega^I$  с шагами  $h$  и  $\tau$  и сгущенную сетку  $\omega^{II}$  с шагами  $h/r$  и  $\tau/r^2$  (обычно полагают  $r=2$ ). На второй сетке погрешность по каждой переменной, как видно из (86), уменьшается в  $r^2$  раз. Обозначая разностные решения на этих сетках соответственно через  $y^I$  и  $y^{II}$ , определим погрешность (см. гл. III, п. 3 и гл. VIII, § 1, п. 11):

$$z^{II} = y^{II} - u \approx \frac{1}{r^2 - 1}(y^I - y^{II}).$$

Эту погрешность можно использовать для оценки точности разностного решения, а можно вычесть ее из разностного решения, тем самым уточнив его.

**Замечание 2.** Если функция  $\bar{z}(x)$  такова, что к ней самой применима теорема 2, то можно использовать рекуррентный метод Рунге, несколько раз сгущая сетку.

Изложенная в этой главе теория разностных схем применима к разностным схемам, аппроксимирующим корректно поставленные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Теория переносится на решение уравнений в частных производных методом прямых. Хотя в большинстве формулировок фигурировало только одно уравнение и одна переменная, но теория очевидным образом обобщается на системы уравнений или случай многих переменных.

Теория разностных схем применяется также для доказательства существования решения точной задачи (70) и установления его свойств. В качестве примера приведем без доказательства одно утверждение:

**Теорема 3.** Если для задачи (70) существует хотя бы одна корректная разностная схема (71), аппроксимирующая задачу на функциях  $u(x) \in U$ , то решение  $u(x)$  задачи (70) в классе  $U$  существует и единственно. Если правые части  $f(x)$ ,  $\chi(x)$  непрерывны равномерно по  $h$ , то  $u(x)$  непрерывно зависит от  $f(x)$ ,  $\mu(x)$ .

**3. Сравнение схем на тестах.** Для любой задачи даже на фиксированной сетке и шаблоне можно составить много разностных схем. Естественно, возникает вопрос: какую из схем использовать при решении реальной задачи? Как правило, традиционных оценок сходимости и точности для ответа недостаточно. Это связано с несовершенством теоретических методов исследования схем.

1) Для большинства нелинейных задач (например, газодинамических) нет доказательства сходимости или хотя бы устойчивости разностных схем. Соображения об их устойчивости и сходимости основаны на анализе линеаризованных задач.

2) Оценки точности схем являются асимптотическими при стремлении шага к нулю. Но быстродействие и память современных ЭВМ не настолько велики, чтобы можно было относительно сложные реальные задачи считать достаточно малым шагом. Например, для трехмерной задачи сетка из 27 000 узлов, соответствующая оперативной памяти ЭВМ БЭСМ-6, содержит всего 30 интервалов по каждой переменной.

Реально может оказаться, что схема первого порядка точности на грубых сетках даст более точный результат, чем схема второго порядка точности, хотя на подробных сетках соотношение будет обратным.

3) Обычно априорные оценки точности схем далеки от оптимальных. Они бывают завышены в десятки и сотни раз, и только в исключительных случаях удается получить неулучшаемые оценки. Но даже эти неулучшаемые оценки относятся к достаточно широкому классу решений, а для конкретного решения могут быть сильно завышены.

4) Даже наличие доказательства сходимости разностной схемы не гарантирует хорошего качества полученного по схеме решения. Сходимость в гильбертовой норме обеспечивает передачу только некоторых интегральных характеристик решения. Сходимость в чебышевской норме обеспечивает хорошее качество решения лишь при достаточной подробной сетке. В расчетах на грубых сетках при сходящейся схеме нередко возникает «разболтка», делающая результаты расчета фактически неприемлемыми.

Большой опыт численных расчетов показывает, что, помимо аппроксимации и устойчивости, разностные схемы должны удовлетворять добавочным критериям, обеспечивающим передачу некоторых качественных свойств решения. Хорошо известным критерием является консервативность схем или, в более общей форме, инвариантность разностных уравнений относительно определенной группы преобразований. Другие употребительные критерии — это аппроксимационная вязкость схем или диссипативность первого дифференциального приближения и монотонность схем.

Вероятно, в дальнейшем будет создана достаточно строгая качественная теория разностных схем, позволяющая ответить на многие вопросы. Но даже после создания такой теории важным элементом работы останется экспериментальное исследование схем, т. е. проверка их на небольшой системе тестов.

Тестом может служить задача, которая содержит специфические трудности данного класса задач и точное решение которой известно. Это решение может задаваться формулой или находиться численно; в качестве тестов нередко используют автомодельные решения. Для проверки схемы следует провести серию из трех или более расчетов задачи-теста с последовательным сгущением сеток и сравнить разностное решение с точным.

Точность схемы оценивают по норме погрешности разностного решения. Для более полного изучения схемы проверяют сходимость в разных нормах (обычно в  $C$  и  $L_2$ ). При этом обязательно сравнивают фактическую скорость убывания погрешности при  $h \rightarrow 0$  с теоретическим порядком точности схемы.

Возможны случаи, когда ожидаемый теоретический порядок точности не совпадает с фактическим. О чем это может свидетельствовать? Отметим некоторые типичные ситуации.

а) Метод теоретического исследования был строгим, а фактический порядок точности ниже теоретического. Возможны две причины. 1) Численный расчет был неправильным; например,

программа для ЭВМ содержала ошибки. 2) При теоретическом анализе аппроксимация определялась на функциях более гладких, чем использованное в качестве теста решение  $u(x, t)$ .

б) Метод теоретического исследования был строгим, а фактический порядок точности выше теоретического. Это означает, что теоретическое исследование было недостаточно полным. Может быть, при доказательстве устойчивости использовались более сильные нормы для правых частей, чем в действительности необходимо; или погрешность аппроксимации определялась не на решении данной задачи, а на заметно более широком классе функций.

в) Метод исследования был нестрогим; например, устойчивость нелинейной схемы изучалась методом разделения переменных. В этом случае теоретическое исследование вообще не дает ответа, а лишь позволяет сделать довольно вероятный прогноз. Сравнение же на тестах позволяет установить здесь точный характер сходимости, правда, только на отдельных примерах.

Исследовать надо не только разностные схемы, но и сетки. Разные классы задач предъявляют разные требования к сеткам. Но лишь в отдельных случаях эти требования удастся четко сформулировать; например, если точное решение имеет разрыв или другую особенность, то желательно совместить с ней узел сетки. В остальных же случаях приходится сравнивать сетки тоже на тестах. Зачастую удачный выбор сетки повышает точность расчета не меньше, чем усовершенствование разностной схемы.

## ЗАДАЧИ

1. Для уравнения (9) найти автомодельное решение вида  $u(x, t) = f(\xi)$ ,  $\xi = x/t$ , и соответствующие ему начальные и граничные условия.
2. Найти выражения невязки для случая, рассмотренного в § 1, п. 3, замечание 3.
3. Вывести разностную схему (29) и найти ее невязку.
4. Определить невязку разностного краевого условия (33) и сравнить ее с (32).
5. При доказательстве теоремы в § 3, п. 2 использовано определение равномерной устойчивости (48) для линейных схем; обобщить это определение и доказать теорему на случай нелинейных схем.
6. Доказать утверждения, сделанные в замечании к теореме из § 3, п. 2.
7. Доказать замечание 1 об устойчивости по правой части в § 3, п. 4.
8. Доказать утверждение, сделанное в замечании 4 к теореме 1 из § 4, п. 2, и дать для нелинейных схем априорную оценку точности типа (79).
9. Обобщить теорему 2 из § 4, п. 2 на случай разного порядка аппроксимации по различным переменным.