

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В главе IV изложены основные методы численного интегрирования. В § 1 выведены формулы вычисления однократных интегралов, основанные на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции: простейшие формулы трапеций и средних и некоторые формулы более высокой точности, в том числе формулы наивысшей алгебраической точности (Гаусса—Кристоффеля и Маркова). Исследованы погрешности этих формул и характер их сходимости. В § 2 рассмотрены способы интегрирования функций, для которых полиномиальная аппроксимация не обеспечивает приемлемой точности. В § 3 описанные методы перенесены на случай кратных интегралов. В § 4 изложены основы метода Монте-Карло применительно к вычислению интегралов.

## § 1. Полиномиальная аппроксимация

**1. Постановка задачи.** Пусть требуется найти определенный интеграл

$$F = \int_a^b f(x) \rho(x) dx, \quad \rho(x) > 0, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а весовая функция  $\rho(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ . Выразить интеграл через элементарные функции удается редко, а компактный и удобный для доведения до числа ответ получается еще реже. Поэтому обычно заменяют  $f(x)$  на такую аппроксимирующую функцию  $\varphi(x, a) \approx f(x)$ , чтобы интеграл от нее легко вычислялся в элементарных функциях.

Чаще всего  $f(x)$  заменяют некоторым обобщенным интерполяционным многочленом. Поскольку такая аппроксимация линейна относительно параметров, то функция при этом заменяется некоторым линейным выражением, коэффициентами которого служат значения функции в узлах:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + r(x), \quad (2)$$

где  $r(x)$  — остаточный член аппроксимации. Подставляя (2) в (1),

получим формулу численного интегрирования (*квадратурную формулу*)

$$F = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R, \quad (3)$$

$$c_i = \int_a^b \varphi_i(x) \rho(x) dx, \quad R = \int_a^b r(x) \rho(x) dx,$$

где величины  $x_i$  называют *узлами*,  $c_i$  — *весами*, а  $R$  — *погрешностью* или *остаточным членом* формулы. Интеграл приближенно заменяется суммой, похожей на интегральную сумму, причем узлы и коэффициенты этой суммы не зависят от функции  $f(x)$ .

Интерполяционный многочлен (2) может быть не только лагранжева, но и эрмитова типа; в последнем случае в сумму (3) войдут производные функции в узлах.

Лучше всего изучена замена  $f(x)$  алгебраическим многочленом; она рассматривается в этом параграфе. Обычно будем полагать  $\rho(x) \equiv 1$ . Случаи не единичного веса будут особо оговариваться.

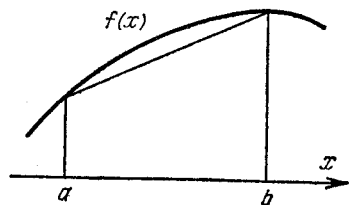


Рис. 16.

**2. Формула трапеций.** Заменяем функцию на отрезке  $[a, b]$  мно-

гочленом Лагранжа первой степени с узлами  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ . Это соответствует замене кривой на секущую. Искомый интеграл, равный площади криволинейной фигуры, заменяется на площадь трапеции (рис. 16); из геометрических соображений нетрудно написать для него *формулу трапеций*

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b - a) [f(a) + f(b)]. \quad (4)$$

Это одна из простейших квадратурных формул. Найдем ее погрешность. Для этого разложим  $f(x)$  по формуле Тейлора, выбирая середину отрезка за центр разложения и предполагая наличие у функции требуемых по ходу рассуждений непрерывных производных:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \dots, \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (a + b).$$

Погрешность есть разность точного и приближенного значений интеграла. Подставляя в (4) разложение (5), получим главный

член погрешности

$$R = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \approx -\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\bar{x}), \quad (6)$$

где члены, отброшенные при замене точного равенства приближенным, содержат старшие производные и более высокие степени длины отрезка интегрирования. Заметим, что содержащие  $f(\bar{x})$  и  $f'(\bar{x})$  члены разложения (5) уничтожились и не дали вклада в погрешность; это нетрудно было предвидеть, ибо формула трапеций по самому выводу точна для многочлена первой степени.

Вообще говоря, длина отрезка  $b-a$  не мала, поэтому остаточный член (6) может быть велик. Для повышения точности на отрезке  $[a, b]$  вводят достаточно густую сетку  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ . Интеграл разбивают на сумму интегралов по шагам сетки и к каждому шагу применяют формулу (4). Получают *обобщенную формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) (f_{i-1} + f_i),$$

$$R \approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i). \quad (7)$$

На равномерной сетке она упрощается:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right),$$

$$R \approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N h^3 f''(\bar{x}_i) \approx -\frac{1}{12} h^2 \int_a^b f''(x) dx, \quad (8)$$

$$h = x_i - x_{i-1} = \text{const.}$$

Поскольку в оценке (6) были отброшены члены, содержащие более высокие степени длины интервала, то выражение остаточного члена (8) является асимптотическим, т. е. выполняющимся при  $h \rightarrow 0$  с точностью до членов более высокого порядка малости. Но для справедливости этой оценки необходимо существование непрерывной  $f''(x)$ ; если  $f''(x)$  кусочно-непрерывна, то удается сделать лишь мажорантную оценку

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|. \quad (9)$$

Таким образом, обобщенная формула трапеций имеет второй порядок точности относительно шага сетки. На равномерной сетке это видно непосредственно, а на квазиравномерной сетке, порожденной преобразованием  $x = \xi(t)$ , остаточный член (7) можно привести к виду

$$R \approx -\frac{1}{12N^2} \int_a^b (\xi')^2 f''(x) dx, \quad (10)$$

если используемые в этой формуле производные непрерывны. Для произвольной неравномерной сетки асимптотическая оценка в виде суммы (7) справедлива, но неудобна для использования; можно пользоваться мажорантной оценкой (9), подразумевая под шагом  $h = \max(x_i - x_{i-1})$ .

**3. Формула Симпсона.** Вычислим интеграл по обобщенной формуле трапеций сначала на равномерной сетке с шагом  $h$ , а затем на сетке с вдвое более крупным шагом; вторая сетка получается из первой выбрасыванием узлов через один. Из вида остаточного члена (8) следует, что результат, полученный по формуле трапеций, можно уточнять методом Рунге. Проводя такое уточнение для отрезка, содержащего узлы  $x_0, x_1, x_2$ , получим формулу Симпсона

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{1}{3} [4F_{\text{трап}}(h) - F_{\text{трап}}(2h)] = \\ &= \frac{1}{3} \left[ 4h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right) - 2h \left( \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} h (f_0 + 4f_1 + f_2), \quad h = x_1 - x_{1-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обобщенная формула Симпсона для равномерной сетки и четного числа шагов  $N$  имеет вид

$$F \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N). \quad (12)$$

Для квазиравномерных или произвольных неравномерных сеток формул такого типа не составляют.

Исключение главного члена погрешности формулы трапеций означает, что мы перешли к аппроксимации параболой, и формула Симпсона точна для любого многочлена второй степени. Однако нетрудно проверить, что для  $f(x) = x^3$  эта формула также дает точный результат, т. е. она точна для многочлена третьей степени! Это объясняется тем, что на равномерной сетке остаточный член формулы трапеций разлагается только по четным степеням шага и однократное применение метода Рунге увеличивает порядок точности на два.

Как и для формулы трапеций, погрешность формулы Симпсона вычисляется подстановкой разложения (5), в котором теперь надо удержать большее число членов и для каждой пары интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  и  $(x_i, x_{i+1})$  за центр разложения взять узел  $x_i$ . Из предыдущего рассуждения видно, что главный вклад в погрешность дает только пятый член разложения  $(1/24)(x - x_i)^4 f^{(4)}(x_i)$ . Подставляя этот член в выражение суммарной погрешности двух соседних

интервалов, легко найдем

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \approx -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x_i).$$

После суммирования по парам соседних интервалов получим

$$R \approx -\frac{h^4}{180} \int_a^b f^{IV}(x) dx = O(h^4), \quad (13)$$

т. е. формула Симпсона имеет четвертый порядок точности, а численный коэффициент в остаточном члене очень мал. Благодаря этим обстоятельствам формула Симпсона обычно дает хорошую точность при сравнительно небольшом числе узлов (если четвертая производная функции не слишком велика).

Асимптотическая оценка (13) выведена в предположении существования непрерывной четвертой производной. Если  $f^{IV}(x)$  кусочно-непрерывна, то справедлива только мажорантная оценка, аналогичная (9).

**Пример.** Вычислим интеграл  $F = \int_0^1 e^x dx \approx 1,7183$ . В таблице 9 приведены результаты вычислений по формулам трапеций и Симпсона при разных шагах. Вторая формула обеспечивает гораздо более высокую точность при том же шаге.

Таблица 9

$h$	Трапеций	Симпсона
1	1,8591	—
0,5	1,7539	1,7189
0,25	1,7272	1,7183

Заметим, однако, что формулу Симпсона можно было вообще не вводить. Проведем расчеты по формуле трапеций на последовательности сгущающихся вдвое сеток и применим однократный процесс Рунге не к формуле, а непосредственно к найденному на каждой сетке значению интеграла. Результат будет тот же, что и при расчете по формуле Симпсона; попутно будет оценена фактическая погрешность формулы трапеций.

К самой формуле Симпсона, как следует из вида ее остаточного члена, тоже можно применять метод Рунге. Это эквивалентно применению рекуррентного процесса Рунге к формуле трапеций.

**4. Формула средних.** Если на отрезке  $[a, b]$  взять единственный узел квадратурной формулы  $x_0$ , то функция аппроксимируется многочленом нулевой степени — константой  $f(x_0)$ . Поскольку симметрия формулы численного интегрирования приводит к повышению ее точности, то выберем в качестве единственного узла середину отрезка интегрирования  $\bar{x} = \frac{1}{2}(a+b)$ . Приблизительно заменяя площадь криволинейной трапеции площадью прямоугольника (рис. 17), получим *формулу средних*

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(\bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(a+b). \quad (14)$$

Погрешность этой формулы вычислим стандартным приемом — подстановкой разложения (5); в данном случае за центр разложения надо брать середину отрезка, т. е. узел квадратурной формулы. Несложные выкладки показывают, что

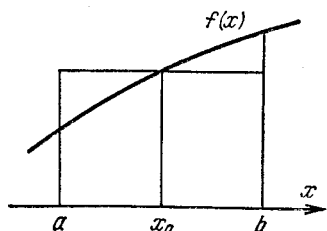


Рис. 17.

$$R = \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\bar{x}) \approx \approx \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\bar{x}). \quad (15)$$

При вычислении уничтожился не только первый, но и второй член разложения Тейлора. Это связано с симметричным построением формулы средних и означает, что формула точна для любой линейной функции.

Так же как и для формулы трапеций, для повышения точности вводится достаточно подробная сетка  $x_i$  и составляется обобщенная формула средних

Так же как и для формулы трапеций, для повышения точности вводится достаточно подробная сетка  $x_i$  и составляется обобщенная формула средних

$$F \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right), \quad R \approx \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i). \quad (16)$$

На равномерной сетке она имеет вид

$$F \approx h \sum_{i=1}^N f_{i-1/2}, \quad R \approx \frac{h^3}{24} \int_a^b f''(x) dx. \quad (17)$$

**Замечание 1.** Остаточный член формулы средних примерно вдвое меньше, чем у формулы трапеций. Поэтому если значения функции одинаково легко определяются в любых точках, то лучше вести расчет по более точной формуле средних. Формулу трапеций употребляют в тех случаях, когда функция задана только в узлах сетки, а в серединах интервалов неизвестна.

**Замечание 2.** Знаки главного члена погрешности у формул трапеций и средних разные. Поэтому, если есть расчеты по обеим формулам, то точное значение интеграла лежит, как правило, в вилке между ними. Деление этой вилки в отношении 2:1 дает уточненный результат, соответствующий формуле Симпсона.

**Замечание 3.** К формуле средних тоже можно применять метод Рунге и либо непосредственно уточнять значение интеграла, либо строить формулы повышенной точности. Те формулы, которые при этом будут получаться, и те, которые были рассмотрены в предыдущих пунктах, — частные случаи так называемых формул Котеса.

**5. Формула Эйлера.** Аппроксимация подынтегральной функции интерполяционным многочленом Эрмита приводит к квадратурным формулам, содержащим производные в узлах. Мы не будем рассматривать общий случай и выведем только формулу с первой производной. Для этого приближенно выразим остаточный член формулы трапеций (6) через значения производных в узлах

$$R_{\text{трап}} \approx -\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\bar{x}) \approx \frac{1}{12} (b-a)^2 [f'(a) - f'(b)]. \quad (18)$$

Прибавляя эту величину к правой части формулы трапеций, получим *формулу Эйлера* (или Эйлера — Маклорена)

$$F \approx \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)] + \frac{1}{12} (b-a)^2 [f'(a) - f'(b)]. \quad (19)$$

Остаточный член этой формулы вычислим стандартной постановкой разложения Тейлора для  $f(x)$ . Предполагая существование непрерывной четвертой производной, выпишем в формуле (5) пять членов разложения и подставим их в выражение погрешности. Выполнив выкладки, получим асимптотическую оценку

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)] - \frac{1}{12} (b-a)^2 [f'(a) - f'(b)] \approx \\ &\approx \frac{1}{720} (b-a)^5 f^{IV}(\bar{x}). \end{aligned} \quad (20)$$

Видно, что из-за симметрии формулы уничтожился член, содержащий  $f'''(x)$ ; значит, формула Эйлера точна для многочлена третьей степени. Ее остаточный член имеет тот же вид, что и остаточный член формулы Симпсона; но его численный коэффициент в пересчете на один интервал оказывается вчетверо меньше.

Отметим, что остаточный член (20) можно выразить, аналогично (18), через разности третьих производных в узлах и т. д. Так строят формулы Эйлера — Маклорена высших порядков, но в практических вычислениях они применяются редко, и мы не будем их рассматривать.

Обобщенную формулу Эйлера можно написать на произвольной сетке. Особенно простой вид приобретает формула на равномерной сетке, ибо производные во внутренних узлах сетки при этом взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned} F &\approx h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right) + \frac{1}{12} h^2 (f'_0 - f'_N), \\ R &\approx \frac{1}{720} h^4 \int_a^b f^{IV}(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Это показывает, что небольшая добавка к формуле трапеций сильно увеличивает точность, повышая ее с  $O(h^2)$  до  $O(h^4)$ .

Если в таблице заданы значения только самой функции, а не ее производных, то обобщенную формулу Эйлера можно применять, подставляя разностные выражения для  $f'_0, f'_N$ . Но эти выражения должны иметь второй порядок точности, чтобы соответствовать общей точности формулы (получающиеся при этом формулы называются *формулами Грегори*). Если заменить производные односторонними разностями  $f'_0 \approx (f_1 - f_0)/h$ ,  $f'_N \approx (f_N - f_{N-1})/h$ , то общий порядок точности понижается до третьего.

**6. Процесс Эйткена.** У всех рассмотренных выше обобщенных формул на равномерных и квазиравномерных сетках ошибку можно разложить в ряд по степеням шага типа (3.17). Значит, к ним ко всем применим метод Рунге. Но для его применения надо знать, каков порядок точности исходной формулы.

Предположим, что порядок точности  $p$  существует, но неизвестен нам. Оказывается, и в этом случае можно уточнить результат, если расчеты проведены на трех (или более) сетках.

Чтобы упростить алгоритм расчета, выберем три сетки с постоянным отношением шагов, т. е. с шагами  $h_1 = h$ ,  $h_2 = qh$ ,  $h_3 = q^2h$ . Обозначим приближенное значение интеграла на  $k$ -й сетке через  $F_k$  и ограничимся главным членом погрешности; тогда можно написать

$$F = F_k + \alpha h_k^p, \quad k = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Это система трех уравнений для определения неизвестных  $F$ ,  $\alpha$ ,  $p$ . Вводя вспомогательные обозначения  $\beta = \alpha h^p$ ,  $\gamma = q^p$ , преобразуем эту систему к следующему виду:

$$F - F_1 = \beta, \quad F - F_2 = \beta\gamma, \quad F - F_3 = \beta\gamma^2. \quad (23)$$

Перемножая крайние уравнения (23) и сравнивая с квадратом среднего уравнения, получим  $\beta^2\gamma^2 = (F - F_1)(F - F_3) = (F - F_2)^2$ ; отсюда легко получить уточненное значение интеграла

$$F = F_1 + (F_1 - F_2)^2 / (2F_2 - F_1 - F_3). \quad (24)$$

Попарно вычитая уравнения (23) друг из друга, получим

$$F_2 - F_1 = \beta(1 - \gamma), \quad F_3 - F_2 = \beta\gamma(1 - \gamma),$$

или

$$q^p = \gamma = (F_3 - F_2) / (F_2 - F_1).$$

Следовательно, эффективный порядок точности исходной формулы (22) равен

$$p = (\ln q)^{-1} \ln [(F_3 - F_2) / (F_2 - F_1)]. \quad (25)$$

Описанный алгоритм был предложен Эйткеном в 1937 г. для ускорения сходимости итерационных процессов последовательного приближения, в которых ошибка убывает примерно по геометрической прогрессии (см. главу V, § 2).



Погрешность численного интегрирования при изменении шага в  $q$  раз меняется приблизительно в  $q^p$  раз; поэтому если сетки последовательно сгущаются в одно и то же число раз, то ошибка убывает именно по требуемому закону.

**Замечание.** Вычислять уточненное значение следует именно по формуле (24), не преобразовывая ее. В данной записи из  $F_1$  вычитается поправка, в которой числитель и знаменатель имеют одинаковый порядок малости, поэтому заметной потери точности не происходит. Если же привести все члены в формуле к общему знаменателю, то в вычислениях придется удерживать много знаков, чтобы избежать потери точности при округлениях.

**Пример.** Рассмотрим вычисление интеграла  $F = \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3$ .

У подынтегральной функции даже первая производная не ограничена, поэтому все приведенные ранее априорные оценки погрешности неприменимы. Мы не знаем, каков здесь эффективный порядок точности каждой из рассмотренных ранее формул численного интегрирования. Составим таблицу 10 значений функции и вычислим интеграл по формулам трапеций и Симпсона при разных шагах (таблица 11).

Таблица 10

$x$	$f(x) = \sqrt{x}$
0,00	0,0000
0,25	0,5000
0,50	0,7071
0,75	0,8660
1,00	1,0000

Таблица 11

$h$	Трапеций	Симпсон	Эйткен
1,00	0,5000	—	—
0,50	0,6036	0,6381	—
0,25	0,6433	0,6565	0,6680

Видно, что обе формулы дают результаты невысокой точности. Плохая точность формулы Симпсона означает, что формула трапеций фактически имеет не второй порядок точности и уточнение методом Рунге здесь бессмысленно. А уточнение первого столбца таблицы процессом Эйткена существенно улучшает результат; попутно выясняется, что в данном примере эффективный порядок точности формулы трапеций  $p \approx 1,38$ .

Эффективный порядок точности оказался не целым числом! С этим приходится встречаться, если функция имеет особенность, а формула интегрирования явно этого не учитывает, или если особенность имеет сама формула (это возможно в нелинейных формулах интегрирования, рассмотренных в § 2).

Если никаких особенностей нет, то эффективный порядок точности может только слегка отличаться от теоретического благодаря наличию в погрешности не только главного члена, но и членов более высокого порядка малости. В этом случае при  $h \rightarrow 0$  эффективный порядок стремится к теоретическому.

На этом основан быстрый метод контроля программ для ЭВМ. Зададим функцию, не имеющую особенностей, проведем расчеты на сгущающихся сетках и проверим, согласуется ли эффективный порядок точности с теоретическим. Сильное расхождение свидетельствует об ошибке в программе.

**7. Формулы Гаусса — Кристоффеля.** Параметрами формулы интегрирования (3) являются узлы и веса. Однако, строя формулы трапеций, Симпсона, Эйлера, мы заранее задавали узлы и по ним находили веса. Поэтому мы не полностью использовали возможности общей формулы. Только в формуле средних мы подобрали положение узла из соображений симметрии, что привело к существенному улучшению формулы.

Формула (3) с  $n$  узлами содержит всего  $2n$  параметров; столько же коэффициентов у многочлена степени  $2n - 1$ . Значит, параметры можно подобрать так, чтобы квадратурная формула (3)

$$F = \int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$$

была точна для любого многочлена степени не выше  $2n - 1$  \*). Покажем, как находятся узлы и веса этих формул.

Будем считать, что вес положителен  $\rho(x) > 0$  и непрерывен на  $(a, b)$ ; он может обращаться в нуль или в бесконечность

на концах отрезка так, чтобы существовал  $\int_a^b \rho(x) dx$ . Известно \*\*),

что при выполнении этих условий существует полная система алгебраических многочленов  $P_m(x)$ , ортогональных на  $[a, b]$  с заданным весом:

$$\int_a^b P_k(x) P_m(x) \rho(x) dx = \delta_{km} \|P_k(x)\|_{L_2}^2. \quad (26)$$

Все нули этих многочленов действительны и расположены на интервале  $(a, b)$ .

Составим по узлам интегрирования многочлен  $n$ -й степени

$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ . Функция  $f(x) = \omega_n(x) P_m(x)$  при  $m \leq n - 1$

есть многочлен степени не выше  $2n - 1$ ; значит, для нее формула Гаусса — Кристоффеля точна. Тогда получим

$$\int_a^b \omega_n(x) P_m(x) \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \omega_n(x_k) P_m(x_k) = 0, \quad (27)$$

\*) Первую такую формулу для  $\rho(x) \equiv 1$  построил Гаусс. Случай произвольного веса рассмотрел Кристоффель.

\*\*\*) См. например, [24].

так как  $\omega_n(x_k) = 0$ . Значит, многочлен  $\omega_n(x)$  ортогонален всем многочленам  $P_m(x)$  степени  $m \leq n-1$ .

Если разложить  $\omega_n(x)$  в ряд по нашим ортогональным многочленам и этот ряд подставить в условие ортогональности (27), то получим

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k P_k(x),$$

$$0 = \int_a^b \omega_n(x) P_m(x) \rho(x) dx = b_m \|P_m\|^2, \quad m \leq n-1,$$

т. е. все коэффициенты разложения  $b_m = 0$  при  $m \leq n-1$ . Это значит, что  $\omega_n(x)$  с точностью до численного множителя совпадает с  $P_n(x)$ . Значит, узлами формулы Гаусса — Кристоффеля являются нули многочленов соответствующей степени  $P_n(x)$ , ортогональных на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x)$ .

Веса интегрирования нетрудно определить, если узлы уже найдены. Функция

$$\psi_m(x) = \prod_{k=1, k \neq m}^n (x - x_k)/(x_m - x_k)$$

есть многочлен степени  $n-1$ , т. е. для нее формула Гаусса — Кристоффеля точна. Подставляя ее в формулу (3) и учитывая, что эта функция равна нулю во всех узлах, кроме  $m$ -го, получим веса формулы Гаусса — Кристоффеля

$$c_m = \int_a^b \rho(x) \left\{ \prod_{k=1, k \neq m}^n (x - x_k)/(x_m - x_k) \right\} dx. \quad (28)$$

Из этого выражения ничего нельзя сказать о знаке веса. Но если подставить в формулу интегрирования многочлен  $\psi_m^2(x)$  степени  $2n-2$ , для которого формула также точна, то получим соотношение

$$c_m = \int_a^b \psi_m^2(x) \rho(x) dx > 0,$$

из которого видно, что все веса положительны. Подставляя в формулу Гаусса  $f(x) = 1$ , получим соотношение

$$\sum_{k=1}^n c_k = \int_a^b \rho(x) dx, \quad (29)$$

из которого следует равномерная ограниченность весов.

Для наиболее употребительных весовых функций  $\rho(x)$  узлы и веса формул Гаусса — Кристоффеля приведены в Приложении вместе с соответствующими ортогональными многочленами.

Формулы Гаусса — Кристоффеля называют также формулами высшей алгебраической точности, поскольку для произвольного многочлена степени выше  $2n - 1$  формула (3) с  $n$  узлами уже не может быть точной.

Заметим, что в принципе можно не обращаться к ортогональным многочленам, а просто подставить в (3) функции вида  $f(x) = x^m$  и получить систему уравнений для определения узлов и весов интегрирования

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k^m = M_m, \quad 0 \leq m \leq 2n - 1, \quad (30)$$

$$M_m = \int_a^b x^m \rho(x) dx.$$

(Величины  $M_m$  называются моментами весовой функции.) Однако это нелинейная система; найти и исследовать ее решение очень трудно даже при небольших  $n$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Собственно формула Гаусса соответствует  $\rho(x) = 1$ . Линейным преобразованием аргумента можно перейти к отрезку  $a = -1$ ,  $b = 1$ . На нём ортогональны с единичным весом многочлены Лежандра. Если обозначить их узлы и соответствующие веса через  $\xi_k, \gamma_k$ , то обратным линейным преобразованием можно получить узлы и веса для произвольного отрезка

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)\xi_k,$$

$$c_k = \frac{1}{2}(b - a)\gamma_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (31)$$

В частности, при  $n = 1$  получаем формулу средних. Погрешность формулы Гаусса (выражение для которой мы приводим без вывода) пропорциональна той производной, которая соответствует нижней неучтенной степени аргумента; верхняя граница погрешности равна

$$\max |R| = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} M_{2n} \approx \frac{b-a}{2,5\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} M_{2n},$$

$$M_{2n} = \max_{[a, b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

Формула Гаусса рассчитана на функции, имеющие достаточно высокие производные, причем не слишком большие по абсолютной величине. Для таких функций формула обеспечивает очень высокую точность при небольшом числе узлов, ибо численный коэффициент в остаточном члене быстро убывает с ростом  $n$ .

б) Формула Эрмита позволяет интегрировать на отрезке  $[-1, +1]$  с весом  $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ . При этих условиях ортогональны многочлены Чебышева первого рода  $T_n(x)$ . Соответствующие

узлы и веса интегрирования равны

$$\xi_k = \cos[\pi(k - 1/2)n], \quad \gamma_k = \pi/n, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (32)$$

Отметим, что веса во всех узлах одинаковы. На произвольный отрезок эти узлы и веса преобразуются так же, как в формуле Гаусса. Погрешность формулы Эрмита не превышает

$$\max |R| = \pi M_{2n} / [2^{n-1} (2n)!].$$

в) По формулам Гаусса — Кристоффеля возможно вычисление несобственных интегралов на полупрямой  $0 \leq x < \infty$ ; если весовая функция равна  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ , то ортогональными будут многочлены Лагерра  $L_n^\alpha(x)$ . То же относится к интегралам на всей прямой  $-\infty < x < +\infty$  при весе  $\rho(x) = e^{-x^2}$ , только ортогональными будут многочлены Эрмита. Соответствующие примеры имеются в § 2.

**8. Формулы Маркова.** Потребуем, чтобы квадратурная формула (3) была точна для многочлена как можно более высокой степени при дополнительном условии, что одна или обе границы также являются узлами интегрирования. Очевидно, если число узлов равно  $n$  и одна из границ — узел, то формула может быть точна для многочлена степени  $2n - 2$ ; если обе границы являются узлами — то для многочлена степени  $2n - 3$ .

Соответствующие формулы называют формулами Маркова. Они рассчитаны на гладкие функции и по точности мало уступают формулам Гаусса — Кристоффеля (для той же точности в формулах Маркова надо брать на один узел больше).

Общие формулы разбирать не будем. Приведем только таблицу 12 узлов и весов для случая, когда оба конца отрезка являются узлами, а весовая функция  $\rho(x) = 1$ ; для простоты положим  $a = -1$ ,  $b = +1$ , ибо преобразовать узлы и веса для произвольного отрезка можно по формулам (31). Отметим, что в этом случае формула Маркова при  $n = 2$  совпадает с формулой трапеций, а при  $n = 3$  — с формулой Симпсона.

Т а б л и ц а 12

$n$	$\xi_k$	$\gamma_k$
2	-1; 1	1; 1
3	-1; 0; 1	1/3; 4/3; 1/3
4	-1; -1/5; 1/5; 1	1/6; 5/6; 5/6; 1/6
5	-1; -3/7; 0; 3/7; 1	1/10; 49/90; 64/90; 49/90; 1/10

**З а м е ч а н и е 1.** Формулы Маркова и формулы Гаусса — Кристоффеля рассчитаны на получение очень высокой точности уже при небольшом числе узлов  $n \approx 4 - 10$ . Поэтому для них не строят обобщенных формул типа (7); исключениями являются только перечисленные выше формулы средних, трапеций и Симпсона.

**З а м е ч а н и е 2.** В математической литературе подробно разбираются так называемые квадратурные формулы Чебышева. Это формулы типа (3), в которых все веса одинаковы и равны

$c_k = (b - a)/n$ , а положение узлов подбирается так, чтобы формула была точна для многочлена как можно более высокой степени. Однако серьезного практического значения эти формулы не имеют. Для функций высокой гладкости удобнее формулы Гаусса, а для недостаточно гладких функций — обобщенные формулы трапеций и средних.

**9. Сходимость квадратурных формул.** Стремится ли сумма (3) при  $n \rightarrow \infty$  к точному значению интеграла, и если стремится, то с какой скоростью?

Обобщенная формула средних (16) является интегральной суммой. Следовательно, для любой непрерывной функции она сходится к точному значению интеграла при стремлении к нулю  $\max(x_i - x_{i-1})$ . Это справедливо и для обобщенной формулы трапеций (7). Она тоже является интегральной суммой, соответствующей несколько иному выбору интервалов: нулевой интервал — от  $x_0$  до  $x_{1/2}$ , первый — от  $x_{1/2}$  до  $x_{3/2}$ , второй — от  $x_{3/2}$  до  $x_{5/2}$  и т. д.

Обобщенная формула Симпсона получается линейной комбинацией двух обобщенных формул трапеций на равномерной сетке. При сгущении сетки каждая из последних формул сходится к общему пределу — точному значению интеграла. Значит, и формула Симпсона сходится для любой непрерывной функции.

Более тонкими рассуждениями можно доказать сходимость формул Гаусса — Кристоффеля при  $n \rightarrow \infty$  для любой непрерывной функции.

Значительно сложнее вопрос о скорости сходимости; он связан с оценкой остаточного члена формул. Напомним, что если  $R = O(h^p)$ , то мы называем формулу сходящейся с  $p$ -м порядком точности.

В большинстве квадратурных формул мы находили вид главного члена погрешности; он выражался через интеграл от некоторой производной функции. Попутно мы отмечали, что если заменить под интегралом производную на максимум ее модуля,

т. е. заменить  $\int_a^b f^{(p)}(x) dx \sim (b - a) M_p$ , то мы получим мажорантную оценку погрешности. Такие оценки определяют скорость сходимости. Согласно этим оценкам погрешность формул средних и трапеций есть  $O(h^2)$ , а формулы Симпсона —  $O(h^4)$ .

Эти оценки пригодны, если функция имеет ту производную, которая входит в оценку остаточного члена, причем эта производная соответственно непрерывна или кусочно-непрерывна. Наличие у функции более высоких производных не улучшает оценку. Зато если у функции нет требуемой ограниченной производной, то сходимость может быть хуже, как мы видели в примере из п. 6.

Скорость сходимости наиболее распространенных квадратурных формул для недостаточно гладких функций сейчас хорошо изучена. В таблице 13 приведены полученные в [25] мажорантные оценки погрешности некоторых формул на классе функций, имеющих на  $[a, b]$  кусочно-непрерывную  $p$ -ю производную, ограниченную по модулю константой  $M_p$  (примерно такие же оценки получаются, если  $f^{(p)}(x)$  не ограничена, но интегрируема с квадратом). Стрелка в таблице 13 означает перенос оценки из предыдущего столбца.

Таблица 13

Формула \ $p$	1	2	3	4	Много
Трапеций	$\frac{b-a}{4} h M_1$	$\frac{b-a}{12} h^2 M_2$	→	→	→
Средних	$\frac{b-a}{4} h M_1$	$\frac{b-a}{24} h^2 M_2$	→	→	→
Симпсона	$\frac{5}{18} (b-a) h M_1$	$\frac{4}{81} (b-a) h^2 M_2$	$\frac{b-a}{72} h^3 M_3$	$\frac{b-a}{180} h^4 M_4$	→
Гаусса при $n=4, b-a=2$	$0,276 M_1$	$0,022 M_2$	$0,0024 M_3$	$0,0003 M_4$	$10^{-8} M_8$

Из таблицы 13 видно, что для функций малой гладкости, имеющих лишь первую или вторую производную, лучшие результаты дает обобщенная формула средних. Для функций высокой гладкости выгодны формулы Гаусса (отметим, что для функций малой гладкости формулы Гаусса дают примерно ту же точность, что и простейшие формулы, но формулы Гаусса с большим числом узлов довольно сложны и поэтому невыгодны для таких функций). Простой и рекуррентный метод Рунге для обобщенных формул также целесообразно применять только при достаточно высокой гладкости функций: если существует кусочно-непрерывная ограниченная  $f^{(p)}(x)$ , то можно рассчитывать лишь на точность  $O(h^p)$ .

Рассмотрим корректность численного интегрирования. Существование и единственность суммы (3) очевидно, и надо исследовать только устойчивость. Во всех рассмотренных выше формулах веса положительны, поэтому при варьировании подынтегральной функции вариация суммы не превышает

$$|\delta F| = \left| \sum_{k=0}^n c_k \delta f_k \right| \leq \left( \sum_{k=0}^n |c_k| \right) \cdot \max_k |\delta f_k| \leq \| \delta f \|_C \int_a^b \rho(x) dx,$$

так что устойчивость по входным данным есть.

Строго говоря, квадратурные формулы (3) неустойчивы относительно ошибок округления. Эти ошибки носят случайный

характер, но в среднем растут, как  $\sqrt{n}$ , при увеличении числа узлов, так что график полной ошибки похож на пунктирную линию на рис. 15. Но эта неустойчивость слабая, и она проявляется только при расчете с небольшим (3—5) числом цифр.

## § 2. Нестандартные формулы

**1. Разрывные функции.** Пусть функция и ее производные кусочно-непрерывны; в точках разрыва подразумевается существование односторонних производных всех требуемых порядков.

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на отрезки так, чтобы на этих отрезках функция и некоторое число  $p$  ее низших производных были непрерывны; на концах этих отрезков в качестве значений функции и производных возьмем соответствующие односторонние пределы.

Представим интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам непрерывности. Применим к каждому отрезку квадратурную формулу порядка точности  $q$ ,  $q \leq p$ . Если одновременно и одинаково сгущать сетки на всех отрезках непрерывности, то порядок точности ответа будет  $q$ , как и для непрерывных достаточно гладких функций. В этом случае методом Рунге — Ромберга можно повысить порядок точности до  $p$ .

Если же применять квадратурные формулы к разрывным или не гладким функциям, не выделяя особые точки указанным образом, то при сгущении сетки сходимость хотя и будет, но с невысокой скоростью и без четко выраженного порядка точности. Мажорантную оценку ошибки вида  $O(h^v)$  при этом обычно можно найти, но асимптотической оценки вида  $R \approx \alpha h^v$ , как правило, не существует. При этом применять метод Рунге или процесс Эйткена будет нельзя.

**Пример.** Рассмотрим

$$F = \int_{-1}^2 (x |x|) dx = (7/3).$$

Здесь подынтегральная функция непрерывная и гладкая, но вторая производная имеет разрыв при  $x=0$ . Если для этой функции выделить отрезки непрерывности, то формула Симпсона дает точный ответ. Если же сгущать равномерную сетку делением пополам, то точка  $x=0$  никогда не будет узловой и следует ожидать плохой сходимости. Это подтверждается расчетами, приведенными в таблице 14.

**2. Нелинейные формулы.** Ранее мы видели, что нелинейная аппроксимация может существенно повысить точность расчетов, особенно для быстропеременных функций. В случае интегрирования подбор подходящего приближения становится очень слож-



ным, ибо интеграл от аппроксимирующей функции должен точно вычисляться, иначе метод будет практически бесполезен.

Таблица 14

Формула \ $h$	3	3/2	3/4	3/8	0
Трапеций	4,5000	2,6250	2,4375	2,3555	2,3333
Симпсона	—	2,0000	2,3750	2,3282	2,3333

Обычно стараются найти выравнивающие переменные, в которых уже два свободных параметра обеспечивали бы удовлетворительную аппроксимацию. На отрезке  $[a, b]$  вводят сетку и на каждом интервале сетки функцию заменяют нелинейной интерполяционной функцией, в которой параметры выражены через табличные значения функции. Например, если функция близка к экспоненте, то согласно (2.19)

$$f(x) \approx f_{i-1} \exp[(x - x_{i-1}) \ln(f_i/f_{i-1})/(x_i - x_{i-1})], \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Если на каждом интервале проинтегрировать это выражение вместо исходной функции, то получим обобщенную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) (f_i - f_{i-1}) / \ln(f_i/f_{i-1}). \quad (33)$$

Разумеется, для неэкспоненциальных функций эта формула не обеспечит хорошей точности.

Такие формулы напоминают обобщенную формулу трапеций, ибо они построены при помощи двухпараметрической интерполяции лагранжева типа, которая для каждого интервала сетки выполняется отдельно. Если воспользоваться интерполяцией эрмитова типа, то получим формулы, сходные с обобщенной формулой средних. Например, если по-прежнему считать  $f(x) \approx \approx \alpha e^{\beta x}$  и потребовать правильной передачи функции и производной в точке  $x_{i-1/2}$ , то получим  $\beta_i = f_{i-1/2}'/f_{i-1/2}$ ,  $\alpha_i = f_{i-1/2} \times \times \exp(-\beta_i x_{i-1/2})$ . Использование этой аппроксимации на каждом шаге дает такую квадратурную формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f_{i-1/2} \{ \exp[\beta_i (x_i - x_{i-1/2})] - - \exp[-\beta_i (x_{i-1/2} - x_{i-1})] \}, \quad \beta_i = f_{i-1/2}'/f_{i-1/2}. \quad (34)$$

Эта и предыдущая формулы написаны для произвольной сетки.

Можно показать, что если исходная и аппроксимирующая функции имеют непрерывные вторые производные, то формулы

такого типа имеют второй порядок точности. Оценим, например, погрешность формулы (34). Для этого разложим на интервале  $(x_{i-1}, x_i)$  функцию  $\varphi(x) = \ln f(x)$  в ряд Тейлора

$$\varphi(x) = \varphi_{i-1/2} + (x - x_{i-1/2}) \varphi'_{i-1/2} + \frac{1}{2} (x - x_{i-1/2})^2 \varphi''_{i-1/2} + \dots$$

Используемые здесь производные можно найти, поскольку  $\varphi'(x) = d(\ln f)/dx = f'(x)/f(x)$  и т. д. Возвращаясь к функции  $f(x)$  и учитывая, что  $|\varphi''(x)| \ll 1$  в силу исходного предположения о почти экспоненциальном виде функции, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\varphi(x)} = \\ &= f_{i-1/2} \exp \left\{ (x - x_{i-1/2}) \varphi'_{i-1/2} + \frac{1}{2} (x - x_{i-1/2})^2 \varphi''_{i-1/2} + \dots \right\} = \\ &= f_{i-1/2} e^{(x - x_{i-1/2}) \varphi'_{i-1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} (x - x_{i-1/2})^2 \varphi''_{i-1/2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Если проинтегрировать последнее выражение по отрезку  $[x_{i-1}, x_i]$  и просуммировать по всем отрезкам, то единица в квадратных скобках приведет к квадратурной формуле (34), а второй член даст главную часть погрешности

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_{i-1/2} \varphi''_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1/2}) e^{(x - x_{i-1/2}) \varphi'_{i-1/2}} dx \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^N A_i(f, f', f'', x) \cdot (x_i - x_{i-1})^3, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $A_i$  выражаются некоторым образом через значения интегрируемой функции и ее производных. Заменяя эти коэффициенты их максимальными значениями, получим оценку погрешности

$$|R| \leq \max_i |A_i| \cdot \max_k (x_k - x_{k-1})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) = O(\max_i h_i^3),$$

что и требовалось доказать.

Нелинейные формулы повышенного порядка точности, аналогичные формулам Симпсона или Гаусса, не употребляют, ибо их слишком сложно строить. Повышенный порядок точности получают (разумеется, если функции имеют требуемые непрерывные производные) таким приемом: строят подходящую несложную нелинейную формулу невысокого порядка точности и проводят по ней расчеты на последовательности сгущающихся равномерных или квазиравномерных сеток; полученные результаты уточняют методом Рунге — Ромберга или процессом Эйткена. Однако этот прием применим только при не очень крупном шаге (см. п. 3).

Отметим, что линейные однородные квадратурные формулы (3) имеют те же свойства, что и сам интеграл: при умножении функции на число сумма умножается на то же число, а при сложении функций соответствующие квадратурные суммы складываются. Для нелинейных квадратурных формул эти свойства могут не выполняться (то же относится к задачам интерполяции и дифференцирования). Например, формулы (33) и (34) не аддитивны.

**3. Метод Филона.** В радиотехнических задачах часто встречаются функции  $f(x)$ , описывающие несущее высокочастотное колебание  $e^{i\omega x}$  с модулированной амплитудой. Это быстропеременные функции, и их производные  $f^{(p)}(x) \sim \omega^p$  велики. Поэтому при интегрировании их по формулам § 1 приходится брать настолько мелкий шаг, чтобы выполнялось условие  $\omega h \ll 1$ , т. е. чтобы одна осцилляция содержала бы много узлов интегрирования. Это приводит к большому объему вычислений.

Для уменьшения объема вычислений надо использовать априорные сведения о подынтегральной функции. Такие функции можно представить в виде  $f(x) = y(x) \exp(i\omega x)$ , где частота  $\omega$  известна, а амплитуда  $y(x)$  мало меняется за период основного колебания. Выбирая для  $y(x)$  несложные полиномиальные аппроксимации, можно получить квадратурные формулы, называемые формулами Филона [45].

Построим, например, аналог формулы средних. Для этого при вычислении интеграла по отдельному интервалу сетки заменим амплитуду ее значением в середине интервала. Погрешность этой замены определим, разлагая амплитуду по формуле Тейлора

$$y(x) \approx y_{k-1/2}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k,$$

$$r(x) = y(x) - y_{k-1/2} \approx (x - x_{k-1/2}) \left( \frac{dy}{dx} \right)_{k-1/2}.$$

Умножим амплитуду на несущую частоту, проинтегрируем по интервалу  $(x_{k-1}, x_k)$  и сложим интегралы по всем интервалам. После несложных выкладок получим квадратурную формулу

$$F = \int_{x_0}^{x_N} y(x) e^{i\omega x} dx \approx \frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^N f_{k-1/2} \sin\left(\frac{\omega}{2} h_k\right), \quad h_k = x_k - x_{k-1}, \quad (35)$$

и ее погрешность

$$R = \int_{x_0}^{x_N} r(x) e^{i\omega x} dx \approx$$

$$\approx \frac{2i}{\omega^2} \sum_{k=1}^N y'_{k-1/2} \left( \sin \frac{\omega h_k}{2} - \frac{\omega h_k}{2} \cos \frac{\omega h_k}{2} \right) \exp(i\omega x_{k-1/2}). \quad (36)$$

Если шаг интегрирования настолько мал, что  $\omega h \ll 1$ , то тригонометрические функции в этих формулах можно разложить в быстро сходящиеся ряды. При этом нетрудно видеть, что формула (35) действительно переходит в обобщенную формулу средних (16), и то же имеет место для погрешности.

Для формулы средних погрешность есть малая величина  $O(h^2)$ . Однако для квадратурной формулы (35) малость шага гарантирует малость погрешности, только если  $\omega h \lesssim 1$ , что при высокой несущей частоте требует очень малого шага  $h < \omega^{-1}$ . Если же шаг не настолько мал и удовлетворяет условию  $\omega^{-1} < h \ll 1$ , то погрешность по порядку величины есть  $R = O(N\omega^{-2}y'_x)$ . Следовательно, для малости погрешности (36) необходимо, чтобы амплитуда была почти постоянна, т. е. ее производная должна быть малой. Кроме того, можно сделать важный вывод: *если  $\omega h > 1$ , то метод Рунге — Ромберга для уточнения результата применять нельзя*, ибо при этом зависимость погрешности от шага носит сложный (не степенной) характер.

Поэтому для построения формул Филона высокой точности приходится использовать более сложные аппроксимации амплитуды. Например, воспользуемся линейным приближением

$$y(x) \approx y_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k.$$

Умножая на несущую частоту и интегрируя по одному интервалу, легко получим

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} y(x) e^{i\omega x} dx \approx \frac{f_k - f_{k-1}}{i\omega} + \frac{2i}{\omega^2 h_k} (y_k - y_{k-1}) e^{i\omega x_k - 1/2} \sin \frac{\omega h_k}{2};$$

суммирование по всем интервалам сетки дает

$$F \approx \frac{f_N - f_0}{i\omega} + \frac{2i}{\omega^2} \sum_{k=1}^N \frac{\sin \frac{\omega h_k}{2}}{h_k} (y_k - y_{k-1}) e^{i\omega x_k - 1/2}. \quad (37)$$

Для равномерной сетки эту формулу удобнее представить в виде

$$F \approx \frac{4}{\omega^2 h} \sin^2 \frac{\omega h}{2} \sum_{k=1}^{N-1} f_k + \left( \frac{1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-i\omega h}}{\omega^2 h} \right) f_N - \left( \frac{1}{i\omega} + \frac{e^{i\omega h} - 1}{\omega^2 h} \right) f_0. \quad (38)$$

Легко проверить, что при  $\omega h \lesssim 1$  полученные квадратурные формулы переходят в обобщенную формулу трапеций. Если же  $\omega h > 1$ , то погрешность этих формул по порядку величины равна  $R = O(N\omega^{-3}y''_{xx})$ ; она мала, если закон изменения амплитуды близок к линейному.

Аналогично строятся формулы Филона для квадратичного или более сложных законов изменения амплитуды.

Если амплитуда почти постоянна или почти линейна и т. д., то применение соответствующей формулы Филона нередко позволяет интегрировать довольно крупным шагом  $h > \omega^{-1}$  (например, шагом, равным длине несущей волны или еще более крупным). Описанные же в § 1 полиномиальные формулы требовали бы гораздо более мелкого шага  $h \ll \omega^{-1}$ , т. е. большего объема вычислений.

Однако формулы (35) — (38) годятся только в том случае, если несущая частота постоянна. Если частота «плывет» (например, при фазовой модуляции колебаний), то надо составлять другие формулы.

**4. Переменный предел интегрирования.** Пусть надо вычислить

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) \rho(\xi) d\xi.$$

В принципе при каждом значении  $x$  его можно рассматривать как интеграл с постоянными пределами и вычислять одним из приведенных выше способов. Однако если надо определять интеграл для очень многих значений  $x$ , то это невыгодно. Целесообразнее выбрать сетку и численным интегрированием высокой точности составить таблицу значений интеграла на этой сетке  $F_n = F(x_n)$ . Тогда

$$F(x) = F_n + \int_{x_n}^x f(\xi) \rho(\xi) d\xi, \quad x_n \leq x < x_{n+1},$$

и последний интеграл можно вычислять по простым формулам, ибо промежуток интегрирования мал.

Возможен другой способ. Имея таблицу  $F(x_n)$ , можно находить  $F(x)$  интерполяцией по этой таблице. Так как одновременно всюду известна производная интеграла  $F'(x) = f(x) \rho(x)$ , то можно воспользоваться эрмитовой интерполяцией, обеспечивающей высокую точность.

**5. Несобственные интегралы.** Для интегралов с бесконечными пределами есть несколько приемов вычисления.

Прием 1 — введение такой замены переменных, чтобы превратить пределы интегрирования в конечные. Например, для интеграла

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad a > 0,$$

замена  $x = a/(1-t)$  превращает полупрямую  $[a, \infty)$  в отрезок  $[0, 1]$ . Если после преобразования подынтегральная функция

вместе с некоторым числом производных остается ограниченной, то можно находить интеграл стандартными численными методами.

Прием 2 — обрезание верхнего предела. Выберем настолько большое  $b$ , чтобы

$$\int_b^{\infty} f(x) dx$$

был меньше допустимой ошибки вычислений. Тогда его можно отбросить, а

$$\int_a^b f(x) dx$$

вычислить по квадратурной формуле. Вблизи верхнего предела подынтегральная функция мала, поэтому вычисление выгодно вести на квазиравномерных сетках, шаг которых велик при  $x \approx b$ . Для уменьшения объема вычислений целесообразно приближенно вычислить отброшенную часть интеграла и учесть как поправку; это позволяет выбрать меньшее значение  $b$ .

Прием 3 — использование формул Гаусса — Кристоффеля. Из подынтегральной функции надо выделить положительный множитель, который можно рассматривать как вес для данных пределов интегрирования. Например, дадим способ вычисления интегральной экспоненты (2.50). Сдвигая нижний предел, приведем интеграл к форме

$$\text{Ei}(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+t)}}{x+t} dt = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

Рассматривая  $e^{-t}$  как весовую функцию и обозначая через  $\xi_i$ ,  $\gamma_i$  нули многочленов Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(t)$  и соответствующие веса квадратурной формулы, получим

$$\text{Ei}(x) \approx e^{-x} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{x + \xi_i}. \quad (39)$$

Это выражение можно использовать как аппроксимирующую формулу. Например, одному и двум узлам интегрирования соответствуют

$$\text{Ei}(x) \approx \frac{e^{-x}}{x+1}, \quad \text{Ei}(x) \approx \frac{(x+3)e^{-x}}{x^2+4x+2}.$$

Если первая из этих формул пригодна лишь при больших аргументах, то вторая дает удовлетворительную точность  $\sim 5\%$  уже при  $x=1$ , а при больших аргументах точность еще лучше.

Прием 4 — построение нелинейных квадратурных формул, применимых на бесконечном интервале. Например, формула (34) при  $\beta_i < 0$  допускает стремление  $x_i$  к бесконечности, если  $x_{i-1/2}$

остается конечным. Для практического применения таких формул удобно ввести квазиравномерную сетку на  $[a, \infty)$ , ибо ее последний интервал обладает требуемым свойством: его правая граница удалена в бесконечность, а середина остается конечной. Кроме того, на квазиравномерных сетках можно уточнять результат методом Рунге — Ромберга.

Если пределы интегрирования конечны, значит,  $f(x)$  обращается в бесконечность в каких-то точках отрезка  $[a, b]$ . Будем считать, что вблизи особой точки  $|f(x)| \leq M \cdot |x - \bar{x}|^\alpha$ , где  $-1 < \alpha < 0$ ; случай  $\alpha \leq -1$ , когда интеграл существует в смысле главного значения, надо разбирать отдельно. Особые точки разбивают отрезок на части. Рассмотрим приемы вычисления интеграла по отдельному отрезку, у которого особыми точками являются только одна или обе границы.

**Прием 1** — аддитивное выделение особенности. Постараемся разбить подынтегральную функцию на сумму  $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — ограниченная функция, а  $\psi(x)$  интегрируется аналитическими методами. Тогда  $\int_a^b \psi(x) dx$  вычисляем точно, а  $\int_a^b \varphi(x) dx$  находим обычными численными методами. Заметим, что обычно разбиение на сумму делается выделением особенности в наиболее простом виде. Например, если  $f(x) = 1/\sqrt{x(1+x^2)}$ , а интеграл вычисляется от точки  $x=0$ , то основная особенность имеет вид  $\psi(x) = 1/\sqrt{x}$ ; если положить  $\varphi(x) = f(x) - \psi(x) = 1/\sqrt{x(1+x^2)} - 1/\sqrt{x}$ , то полученная функция будет ограничена, что и требуется.

**Прием 2** — мультипликативное выделение особенности. Представим подынтегральную функцию в виде  $f(x) = \varphi(x)\rho(x)$ , где  $\varphi(x)$  ограничена, а  $\rho(x)$  положительна и интегрируема на отрезке. Тогда можно рассматривать  $\rho(x)$  как весовую функцию и применять квадратурные формулы Гаусса — Кристоффеля. Если на обоих концах отрезка функция имеет особенности степенного вида, то узлами интегрирования будут нули многочленов Якоби. Например,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_i}, \quad x_i = \cos \frac{\pi}{n} \left( i - \frac{1}{2} \right). \quad (40)$$

Здесь использовались многочлены Чебышева первого рода (см. Приложение).

**Прием 3** — построение нестандартных квадратурных формул, явно учитывающих характер особенности. Так, для приведенного выше интеграла (40) на отдельном интервале сетки  $(x_{i-1}, x_i)$  можно аппроксимировать подынтегральную функцию выражением  $\exp(x_i - 1/2)/\sqrt{1-x^2}$ , поскольку числитель — медленно меняющаяся

гладкая функция и основная особенность связана со знаменателем. Эта аппроксимация легко интегрируется и приводит к квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^N (\arcsin x_i - \arcsin x_{i-1}) e^{x_i - 1/2},$$

$$x_0 = -1, \quad x_N = 1. \quad (41)$$

По погрешности аппроксимации подынтегральной функции можно заключить, что остаточный член этой формулы на произвольной сетке не превышает  $O(h_{\max}^2)$ . На специальной сетке  $x_i = \cos \frac{\pi i}{n}$  эта формула еще более точна, ибо при этом она переходит в квадратурную формулу Гаусса — Кристоффеля (40), но это уже случайное обстоятельство. Обычно хорошо составленная нестандартная формула имеет один и тот же порядок точности на равномерных и неравномерных сетках.

### § 3. Кратные интегралы

**1. Метод ячеек.** Рассмотрим двукратный интеграл по прямоугольнику  $G$  ( $a \leq x \leq b$ ,  $\alpha \leq y \leq \beta$ ). По аналогии с формулой средних можно приближенно заменить функцию на ее значение в центральной точке прямоугольника. Тогда интеграл легко вычисляется:

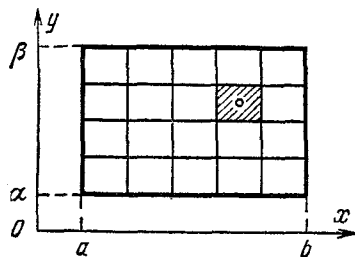


Рис. 18.

$$\iint_{\alpha a}^{\beta b} f(x, y) dx dy \approx S f(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$S = (b - a)(\beta - \alpha), \quad (42)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(a + b), \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Для повышения точности можно разбить область на прямоугольные ячейки (рис. 18). Приближенно вычисляя интеграл в каждой ячейке по формуле средних и обозначая через  $S_i$ ,  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$  соответственно площадь ячейки и координаты ее центра, получим

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_i S_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \quad (43)$$

Справа стоит интегральная сумма; следовательно, для любой непрерывной  $f(x, y)$  она сходится к значению интеграла, когда периметры всех ячеек стремятся к нулю.



Оценим погрешность интегрирования. Формула (42) по самому ее выводу точна для  $f(x, y) = \text{const}$ . Но непосредственной подстановкой легко убедиться, что формула точна и для любой линейной функции, т. е. она соответствует аппроксимации поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостью. В самом деле, разложим функцию по формуле Тейлора

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \xi f'_x + \eta f'_y + \frac{1}{2} \xi^2 f''_{xx} + \xi \eta f''_{xy} + \frac{1}{2} \eta^2 f''_{yy} + \dots, \quad (44)$$

где  $\xi = x - \bar{x}$ ,  $\eta = y - \bar{y}$ , а все производные берутся в центре ячейки. Подставляя это разложение в правую и левую части квадратурной формулы (42) и сравнивая их, аналогично одномерному случаю легко получим выражение погрешности этой формулы

$$R \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, y) dx dy - S f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \approx \frac{1}{24} S [(b-a)^2 f''_{xx} + (\beta-\alpha)^2 f''_{yy}], \quad (45)$$

ибо все члены разложения, нечетные относительно центра симметрии ячейки, взаимно уничтожаются.

Пусть в обобщенной квадратурной формуле (43) стороны прямоугольника разбиты соответственно на  $N$  и  $M$  равных частей. Тогда погрешность интегрирования (45) для единичной ячейки равна

$$R_i \approx \frac{1}{24} S_i \left[ \left( \frac{b-a}{N} \right)^2 f''_{xx} + \left( \frac{\beta-\alpha}{M} \right)^2 f''_{yy} \right]_i.$$

Суммируя это выражение по всем ячейкам, получим погрешность обобщенной формулы

$$R \approx \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{b-a}{N} \right)^2 \iint_G f''_{xx} dx dy + \left( \frac{\beta-\alpha}{M} \right)^2 \iint_G f''_{yy} dx dy \right] = = O(N^{-2} + M^{-2}), \quad (46)$$

т. е. формула имеет второй порядок точности. При этом, как и для одного измерения, можно применять метод Рунге — Ромберга, но при одном дополнительном ограничении: сетки по каждой переменной сгущаются в одинаковое число раз, т. е. отношение  $N/M$  остается постоянным.

Обобщим формулу ячеек на более сложные области. Легко сообразить, что для линейной функции  $f(x, y)$  формула типа (42) будет точна в области произвольной формы, если под  $S$  подразумевать площадь области, а под  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — координаты центра

тяжести, вычисляемые по обычным формулам

$$S = \iint_G dx dy, \quad \bar{x} = \frac{1}{S} \iint_G x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_G y dx dy. \quad (47)$$

Разумеется, практическую ценность это имеет только для областей простой формы, где площадь и центр тяжести легко определяются; например, для треугольника, правильного многоугольника, трапеции. Но это значит, что обобщенную формулу (43) можно применять к областям, ограниченным ломаной линией, ибо такую область всегда можно разбить на прямоугольники и треугольники.

Для области с криволинейной границей формулу (43) применяют иным способом. Наложим на область  $G$  прямоугольную сетку (рис. 19). Те ячейки сетки, все точки которых принадлежат области, назовем *внутренними*; если часть точек ячейки принадлежит области, а часть — нет, то назовем ячейку *граничной*. Площадь внутренней ячейки равна произведению ее сторон. Площадью граничной ячейки будем считать площадь той ее части, которая попадает внутрь  $G$ ; эту площадь вычислим приближенно, заменяя в пределах данной ячейки истинную границу области на хорду. Эти площади подставим в (43) и вычислим интеграл.

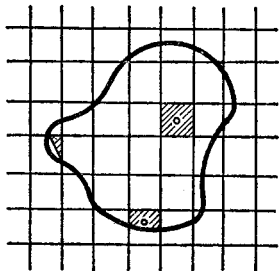


Рис. 19.

Оценим погрешность формулы (43). В каждой внутренней ячейке ошибка составляет  $O(N^{-2})$  по отношению к значению интеграла по данной ячейке. В каждой граничной ячейке относительная ошибка есть  $O(N^{-1})$ , ибо центр прямоугольной ячейки не совпадает с центром тяжести входящей в интеграл части. Но самих граничных ячеек примерно в  $N$  раз меньше, чем внутренних. Поэтому при суммировании по ячейкам общая погрешность будет  $O(N^{-2})$ , если функция дважды непрерывно дифференцируема, а граница области есть кусочно-гладкая кривая; это означает второй порядок точности.

Вычисление площади граничной ячейки довольно трудоемко, ибо требует определения положения границы внутри ячейки. Можно вычислять интегралы по граничным ячейкам более грубо или вообще не включать их в сумму (43). Погрешность при этом будет  $O(N^{-1})$ , и для хорошей точности потребуется более подробная сетка.

Метод ячеек переносится на большее число измерений. Мы видели, что к области произвольной формы его трудно применять; поэтому всегда желательно заменой переменных преобразо-

вать область интегрирования в прямоугольный параллелепипед (это относится практически ко всем методам вычисления кратных интегралов).

**2. Последовательное интегрирование.** Снова рассмотрим интеграл по прямоугольнику, разбитому сеткой на ячейки (рис. 18). Его можно вычислить последовательным интегрированием

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy,$$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Каждый однократный интеграл легко вычисляется на данной сетке по квадратурным формулам типа (3). Последовательное интегрирование по обоим направлениям приводит к кубатурным формулам, которые являются *прямым произведением* одномерных квадратурных формул

$$F(y_j) \approx \sum_i c_{ij} f(x_i, y_j), \quad I \approx \sum_j \bar{c}_j F(y_j),$$

или

$$I \approx \sum_{i, j} c_{ij} f(x_i, y_j), \quad c_{ij} = c_i \bar{c}_j. \quad (48)$$

Например, если по каждому направлению выбрана обобщенная формула трапеций, а сетка равномерная, то веса кубатурной формулы равны  $c_{ij}/(h_x h_y) = 1, 1/2$  и  $1/4$  соответственно для внутренних, граничных и угловых узлов сетки. Легко показать, что для дважды непрерывно дифференцируемых функций эта формула имеет второй порядок точности и к ней применим метод Рунге — Ромберга.

Вообще говоря, для разных направлений можно использовать квадратурные формулы разных порядков точности  $p$  и  $q$ . Тогда главный член погрешности имеет вид  $R = O(h_x^p + h_y^q)$ . Это надо учитывать в методе Рунге: при сгущении сеток надо сохранять отношение  $h_x^p/h_y^q$  постоянным, чтобы закон убывания погрешности был известным. Многократно сгущать сетку при этом условии нелегко, если  $p \neq q$ ; поэтому желательно для всех направлений использовать квадратурные формулы одинакового порядка точности.

Можно подобрать веса и положение линий сетки так, чтобы каждая одномерная квадратурная формула была точна для многочлена максимальной степени, т. е. была бы формулой Гаусса;

тогда

$$c_{ij} = \frac{1}{4} (b-a) (\beta - \alpha) \gamma_i \gamma_j, \quad x_i = \frac{1}{2} (a+b) + \frac{1}{2} (b-a) \xi_i, \quad (49)$$

$$y_j = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \xi_j, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

где  $\xi, \gamma$  — нули многочленов Лежандра и соответствующие веса. Эти формулы рассчитаны на функции высокой гладкости и дают для них большую экономию в числе узлов по сравнению с более простыми формулами. Например, для  $m$  измерений кубатурная формула Симпсона с  $3^m$  узлами и формула (48)—(49) с  $2^m$  узлами дают примерно одинаковую точность, хотя формула Гаусса при  $m=2$  имеет вдвое меньше узлов, а при  $m=3$  — втрое меньше, чем кубатурная формула Симпсона.

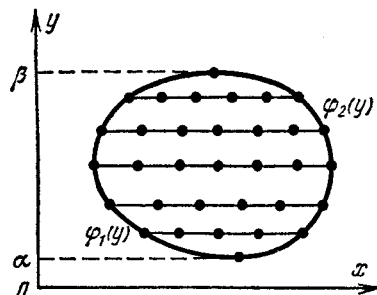


Рис. 20.

Произвольная область. Метод последовательного интегрирования можно применять к области произвольной формы, например, с криволинейной границей. Для этого проведем через область хорды, параллельные оси  $x$ , и на них введем узлы, расположенные на каждой хорде так, как нам требуется (рис. 20). Представим интеграл в виде

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy,$$

$$F(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Сначала вычислим интеграл по  $x$  вдоль каждой хорды по какой-нибудь одномерной квадратурной формуле, используя введенные узлы. Затем вычислим интеграл по  $y$ ; здесь узлами будут служить проекции хорд на ось ординат.

При вычислении интеграла по  $y$  имеется одна тонкость. Если область ограничена гладкой кривой, то при  $y \rightarrow \alpha$  длина хорды стремится к нулю не линейно, а как  $\sqrt{y-\alpha}$ ; значит, вблизи этой точки  $F(y) \sim \sqrt{y-\alpha}$ . То же будет при  $y \rightarrow \beta$ . Поэтому интегрировать непосредственно  $F(y)$  по формулам высокого порядка точности бессмысленно. Целесообразно выделить из  $F(y)$  основную особенность в виде веса  $\rho(y) = \sqrt{(\beta-y)(y-\alpha)}$ , которому соответствуют ортогональные многочлены Чебышева второго рода

(см. Приложение). Тогда второе интегрирование выполняется по формулам Гаусса — Кристоффеля

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy \approx \sum_{j=1}^n \frac{\beta - \alpha}{2} \gamma_j \psi \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \xi_j \right), \quad (50)$$

где  $\psi(y) = F(y)/\rho(y)$ , а  $\xi_j = \cos[\pi j/(n+1)]$  и  $\gamma_j$  — нули и веса многочленов Чебышева второго рода.

Чтобы можно было применять эту формулу, надо ординаты хорд на рис. 20 заранее выбрать в соответствии с узлами (50). Если это не было сделано, то придется ограничиться интегрированием  $F(y)$  по обобщенной формуле трапеций, причем ее эффективный порядок точности в этом случае будет ниже второго (см. пример в § 1, п. 6).

Кроме методов ячеек и последовательного интегрирования есть другие методы, в которых используется кубатурная формула вида  $I \approx \sum_i c_i f(r_i)$ .

Можно поставить задачу — найти оптимальные узлы и веса, т. е. дающие минимальную погрешность на заданном классе функций. Частный случай этой задачи — нахождение весов и узлов, при которых формула точна для  $m$ -мерного многочлена максимальной степени.

Оптимальные узлы и веса удастся найти только для областей наиболее простой формы, таких как квадрат, круг, сфера. Зато их использование заметно уменьшает объем расчетов. Это хорошо видно из таблицы 15, в клетках которой приведены минимальные числа узлов, при которых  $m$ -мерная кубатурная формула может быть точна для многочлена степени  $n$  при последовательном интегрировании по формулам Гаусса и при использовании оптимальных  $m$ -мерных коэффициентов.

Таблица 15

		$n$								
		0	1	2	3	4	5	6	7	
1	Последовательные Гаусса и оптимальные	1	1	2	2	3	3	4	4	
	2	1	1	4	4	9	9	16	16	
2	Последовательные Гаусса	1	1	2	4	5	7	10	12	
	Оптимальные	1	1	8	8	27	27	64	64	
3	Последовательные Гаусса	1	1	3	5	9	14	21	30	
	Оптимальные	1	1	8	8	27	27	64	64	

## § 4. Метод статистических испытаний

1. Случайные величины. Пусть мы измеряем значение некоторой величины  $\xi$  (например, отклонение при стрельбе), на которую влияет большое число различных факторов. Мы не можем

учесть их действие, поэтому заранее не известно, какое значение примет эта величина.

Величину  $\xi$  называют *случайной с плотностью распределения*  $\rho(x)$ , если вероятность того, что величина примет значения между  $x_1$  и  $x_2$ , равна  $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$ . По смыслу вероятности,  $\rho(x)$  неотрицательна и нормирована

$$\rho(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (51)$$

Очевидно, если значения  $\xi$  всегда заключены между  $a$ ,  $b$ , то  $\rho(x) = 0$  вне указанных пределов и интеграл (51) надо брать только по отрезку  $[a, b]$ . Величина  $\xi$  может быть дискретной, т. е. принимать только определенные значения  $x_i$  с вероятностями  $\rho_i$  (например, уровни энергии квантовой системы). Дискретную величину можно формально объединить с непрерывной, если положить

$$\rho(x) = \sum_i \rho_i \delta(x - x_i), \quad \rho_i > 0, \quad \sum_i \rho_i = 1,$$

где  $\delta(x - x_i)$  есть  $\delta$ -функция.

Если по значениям случайной величины вычисляется какая-либо функция  $f(\xi)$ , то значения этой функции также являются случайными величинами. Такую функцию иногда называют *случайной*.

**Равномерно распределенная величина.** Рассмотрим следующую случайную функцию:

$$\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \rho(x) dx. \quad (52)$$

Она принимает значения  $0 \leq \gamma \leq 1$  и монотонно зависит от  $\xi$ . Вероятность того, что  $\gamma$  лежит между  $\gamma_1 = \gamma(\xi_1)$  и  $\gamma_2 = \gamma(\xi_2)$ , равна вероятности того, что  $\xi$  лежит между  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . А последняя вероятность есть  $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(x) dx = \gamma_2 - \gamma_1$ , т. е. она равна длине интервала по  $\gamma$  и не зависит от положения этого интервала. Это значит, что  $\gamma(\xi)$  с равной вероятностью принимает любое значение на отрезке  $[0, 1]$ . Поэтому ее называют *случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке  $[0, 1]$* . Плотность распределения  $\gamma$  равна  $\bar{\rho}(\gamma) = 1$  при  $0 \leq \gamma \leq 1$  и  $\bar{\rho}(\gamma) = 0$  вне этого отрезка.

**2. Разыгрывание случайной величины.** Из всех случайных величин проще всего разыгрывать (моделировать) равномерно распределенную величину  $\gamma$ . Рассмотрим, как это делается.

Возьмем какое-то устройство, на выходе которого с вероятностью  $1/2$  могут появляться цифры 0 или 1; появление той или другой цифры должно быть случайным. Таким устройством может быть бросаемая монета, игральная кость (четно — 0, нечетно — 1) или специальный генератор, основанный на подсчете числа радиоактивных распадов или всплесков радишума за определенное время (четно или нечетно).

Запишем  $\gamma$  как двоичную дробь  $\gamma_{11} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  и на место последовательных разрядов будем ставить цифры, выдаваемые генератором: например,  $\gamma_{11} = 0,010110\dots$  Поскольку в первом разряде с равной вероятностью могут стоять 0 или 1, это число с равной вероятностью лежит в левой или правой половине отрезка  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Поскольку во втором разряде тоже 0 и 1 равновероятны, число с равной вероятностью лежит в каждой половине этих половин и т. д. Значит, двоичная дробь со случайными цифрами действительно с равной вероятностью принимает любое значение на отрезке  $0 \leq \gamma < 1$ .

Строго говоря, разыграть можно только конечное количество разрядов  $k$ . Поэтому распределение будет не вполне требуемым; математическое ожидание  $M\gamma$  окажется меньше  $1/2$  на величину  $\sim 2^{-k-1}$  (ибо значение  $\gamma = 0$  возможно, а значение  $\gamma = 1$  невозможно). Чтобы этот фактор не сказывался, следует брать много-разрядные числа; правда, в методе статистических испытаний точность ответа обычно не бывает выше  $0,1\% = 10^{-3}$ , а условие  $\varepsilon < 2^{-k}$  дает  $k > 10$ , что на современных ЭВМ перевыполнено с большим запасом.

Псевдослучайные числа. Реальные генераторы случайных чисел не свободны от систематических ошибок: несимметричность монеты, дрейф нуля и т. д. Поэтому качество выдаваемых ими чисел проверяют специальными тестами. Простейший тест — вычисление для каждого разряда частоты появления нуля; если частота заметно отлична от  $1/2$ , то имеется систематическая ошибка, а если она слишком близка к  $1/2$ , то числа не случайные — есть какая-то закономерность. Более сложные тесты — это вычисление коэффициентов корреляции последовательных чисел

$$\kappa = \sum_i (\gamma_i - 1/2) (\gamma_{i+1} - 1/2)$$

или групп разрядов внутри числа; эти коэффициенты должны быть близкими к нулю.

Если какая-то последовательность чисел удовлетворяет этим тестам, то ее можно использовать в расчетах по методу статистических испытаний, не интересуясь ее происхождением. Разработаны алгоритмы построения таких последовательностей; символи-

чески их записывают рекуррентными формулами

$$\begin{aligned}\gamma_i &= f(\gamma_{i-1}) \text{ или} \\ \gamma_i &= f(\gamma_{i-1}, \gamma_{i-2}, \dots, \gamma_{i-k}).\end{aligned}\quad (53)$$

Такие числа называют *псевдослучайными* и вычисляют на ЭВМ. Это обычно удобнее, чем использование специальных генераторов. Но для каждого алгоритма есть свое предельное число членов последовательности, которое можно использовать в расчетах; при большем числе членов теряется случайный характер чисел, например — обнаруживается периодичность.

Первый алгоритм получения псевдослучайных чисел был предложен Нейманом. Возьмем число из  $2r$  цифр (для определенности десятичных) и возведем его в квадрат. У квадрата оставим  $2r$  средних цифр, откинув  $r$  последних и  $r$  (или  $r-1$ ) первых. Полученное число снова возведем в квадрат и т. д. Значения  $\gamma_i$  получаются умножением этих чисел на  $10^{-2r}$ . Например, положим  $r=1$  и выберем начальное число 46; тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 46 \rightarrow 2116 \rightarrow \underline{121} \rightarrow \underline{144} \rightarrow \underline{196} \rightarrow \underline{361} \rightarrow \underline{1296} \dots \\ \gamma = 0,46 \quad 0,11 \quad 0,12 \quad 0,14 \quad 0,19 \quad 0,36 \quad 0,29 \dots \end{array} \right.$$

Но распределение чисел Неймана недостаточно равномерно (преобладают значения  $\gamma < 1/2$ , что хорошо видно на приведенном примере), и сейчас их редко употребляют.

*Наиболее употребителен сейчас несложный и неплохой алгоритм, связанный с выделением дробной части произведения*

$$\gamma_i = \{A\gamma_{i-1}\}, \quad (54)$$

где  $A$  — очень большая константа (фигурная скобка обозначает дробную часть числа). Качество псевдослучайных чисел сильно зависит от выбора величины  $A$ : это число в двоичной записи должно иметь достаточно «случайный» вид, хотя его последний разряд следует брать единицей. Величина  $\gamma_0$  слабо влияет на качество последовательности, но было отмечено, что некоторые значения оказываются неудачными.

При помощи экспериментов и теоретического анализа исследованы и рекомендуются такие значения:  $A=5^{13}$  и  $\gamma_0=2^{-36}$  для БЭСМ-4;  $A=5^{17}$  и  $\gamma_0=2^{-40}$  для БЭСМ-6. Для некоторых американских ЭВМ рекомендуются  $A=5^{17}$  и  $\gamma_0=2^{-42}$ ; эти цифры связаны с количеством разрядов в мантиссе и порядке числа, поэтому для каждого типа ЭВМ они свои.

Замечание 1. В принципе формулы типа (54) могут давать очень длинные хорошие последовательности, если записывать их в нерекуррентном виде  $\gamma_n = \{A^n \gamma_0\}$  и все умножения выполнять без округления. Обычное округление на ЭВМ ухудшает качество псевдослучайных чисел, но тем не менее до  $10^5$  членов последовательности обычно годятся.



**Замечание 2.** Качество последовательности улучшается, если ввести в алгоритм (54) небольшие случайные возмущения; например, после нормализации числа  $\gamma_i$  полезно засылать в последние двоичные разряды его мантиссы двоичный порядок числа  $A\gamma_{i-1}$ .

Строго говоря, закономерность псевдослучайных чисел должна быть незаметна по отношению к требуемому частному применению. Поэтому в несложных или удачно сформулированных задачах можно использовать последовательности не очень хорошего качества, но при этом необходимы специальные проверки.

**Произвольное распределение.** Для разыгрывания случайной величины с неравномерным распределением  $\rho(x)$  можно воспользоваться формулой (52). Разыграем  $\gamma$  и определим  $\xi$  из равенства

$$\gamma_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} \rho(x) dx.$$

Если интеграл берется в конечном виде и формула несложна, то это наиболее удобный способ. Для некоторых важных распределений — Гаусса, Пуассона — соответствующие интегралы не берутся и разработаны специальные способы разыгрывания.

**3. Вычисление интеграла.** Значение случайной функции  $f(\xi)$  заключено между  $f(x)$  и  $f(x+dx)$ , если  $\xi$  заключено между  $x$  и  $x+dx$ ; вероятность этого события равна  $\rho(x) dx$ . Нетрудно понять, что математическое ожидание случайной функции и ее дисперсия соответственно равны

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (55)$$

$$Df(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - Mf(\xi)]^2 \rho(x) dx = Mf^2(\xi) - [Mf(\xi)]^2. \quad (56)$$

Таким образом, *одномерный интеграл можно рассматривать как математическое ожидание случайной функции  $f(\xi)$ , аргумент которой есть случайная величина с плотностью распределения  $\rho(x)$ . На этом основан первый способ статистического вычисления интегралов.*

Математическое ожидание можно приближенно вычислить на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей; *если  $\eta$  есть случайная величина, то среднее арифметическое многих испытаний*

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i$$

тоже есть случайная величина с тем же математическим ожиданием  $M\xi_N = M\eta$ , причем при  $N \rightarrow \infty$  распределение  $\xi_N$  стремится к гауссову (нормальному) распределению с дисперсией  $D\xi_N = \frac{1}{N} D\eta$ .

При большом числе испытаний дисперсия  $\xi_N$  мала, т. е. значение среднеарифметического с хорошей вероятностью будет близко к математическому ожиданию. Поэтому можно положить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i), \quad (57)$$

где  $\xi$  — случайная величина с плотностью распределения  $\rho(x)$ . Оценим дисперсию отдельного испытания по формуле (56), заменяя в ней математические ожидания на суммы типа (57); тогда дисперсия среднеарифметического приближенно равна

$$\Delta_N \approx \frac{1}{N} Df(\xi) \approx \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(\xi_i) - \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \right]^2 \right\}. \quad (58)$$

Появление делителя  $N-1$  вместо  $N$  перед фигурной скобкой обосновывается в теории вероятностей; правда, это существенно только при очень малых числах испытаний.

Ответ в методе статистических испытаний носит вероятностный характер и в принципе может сколь угодно сильно отличаться от точного значения интеграла. Однако, согласно свойствам нормального распределения, с вероятностью 99,7% ошибка не превосходит  $3\sqrt{\Delta_N}$ . Вероятной называют ошибку  $0,675\sqrt{\Delta_N}$ , соответствующую 50%-ной вероятности; реальная ошибка обычно близка к этой величине — примерно вдвое больше или меньше. Таким образом, выполняя расчеты по формулам (57) — (58), мы одновременно с интегралом получаем неплохую апостериорную оценку ошибки.

При увеличении числа испытаний  $N$  погрешность ответа будет убывать примерно, как  $1/\sqrt{N}$ . Скорости современных ЭВМ позволяют использовать в расчетах  $N \sim 10^6$ ; поэтому на точность выше 0,1% в методе статистических испытаний трудно рассчитывать. В сложных задачах погрешность возрастает до 1—10%.

Поскольку погрешность имеет вероятностный характер, то зависимость  $1/\sqrt{N}$  относится не к самой погрешности, а лишь к ширине доверительного интервала. Поэтому нельзя приписывать методу статистических испытаний строгий порядок точности (вроде  $p = 1/2$ ) и нельзя применять метод Рунге — Ромберга к расчетам, сделанным с различными  $N$ .

Второй способ статистического вычисления применяется к интегралам вида  $\int_0^1 f(x) dx$ , причем на отрезке интегрирования  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Произвольный интеграл можно привести к такому виду линейной заменой масштабов.

Возьмем случайные числа  $\gamma_i$ , равномерно распределенные на единичном отрезке. Будем рассматривать последовательные пары чисел  $(\gamma_{2i}, \gamma_{2i+1})$  как координаты  $(x_i, y_i)$  точек в единичном квадрате на плоскости  $x, y$  (рис. 21). Эти точки будут случайными и равномерно распределенными в этом квадрате. Поэтому вероятность попадания точки под кривую  $y = f(x)$  равна площади, заключенной под кривой, т. е. искомому интегралу. Условие попадания точки под кривую есть  $\gamma_{2i+1} < f(\gamma_{2i})$ ; та доля общего числа испытаний, которая удовлетворяет этому условию, дает приближенное значение интеграла.

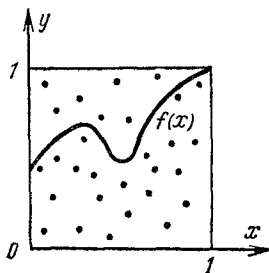


Рис. 21.

**4. Уменьшение дисперсии.** Точность метода статистических испытаний можно увеличить, выбирая специальную случайную величину. Обозначим  $g(x) = f(x) \rho(x)$ , тогда исходный интеграл примет вид  $F = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ . Положим  $g(x) = \bar{f}(x) \bar{\rho}(x)$ , где функция  $\bar{\rho}(x) \geq 0$  и нормирована на единицу, так что ее можно считать плотностью распределения некоторой случайной величины. Как надо выбрать  $\bar{\rho}(x)$ , чтобы сделать вычисления наиболее точными, т. е. дисперсию результата — минимальной?

В дисперсии отдельного испытания (56) последнее слагаемое  $[Mf(\xi)]^2$  равно квадрату искомого интеграла и тем самым не зависит от выбора  $\bar{\rho}(x)$ . Значит, надо требовать

$$M\bar{f}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}^2(x) \bar{\rho}(x) dx = \min.$$

Добавляя условие нормировки плотности, перепишем эту задачу следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g^2(x)/\bar{\rho}(x)] dx = \min, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho}(x) dx = 1.$$

Приравняем нулю вариационные производные по плотности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g(x)/\bar{\rho}(x)]^2 \delta\bar{\rho}(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\bar{\rho}(x) dx = 0.$$

Очевидно, для равенства вариационных производных нулю необходимо и достаточно, чтобы  $[g(x)/\bar{\rho}(x)]^2 = \text{const}$ , или  $\bar{\rho}(x) = c|g(x)|$ . При этом дисперсия не только минимальна, но даже равна нулю, если  $g(x)$  знакопостоянно. В самом деле, тогда  $\bar{f}(x) \equiv 1$ , и даже одно испытание сразу даст точный результат.

Конечно, на практике взять  $\bar{\rho}(x) = c|g(x)|$  не удастся. Для разыгрывания случайной величины с такой плотностью необходимо решить уравнение

$$\gamma_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} |g(x)| dx,$$

т. е. вычислить искомый интеграл, да еще с переменным верхним пределом! Поэтому обычно подбирают  $\bar{\rho}(x)$  так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\xi_i} \bar{\rho}(x) dx$$

просто вычислялся, а само  $\bar{\rho}(x)$  было по возможности ближе к  $g(x)$ .

Смысл увеличения точности нетрудно понять. Если  $\bar{\rho}(x) \sim |g(x)|$ , то  $\bar{f}(x)$  почти постоянна и все отдельные испытания дают близкие результаты.

Пример. Вычислим

$$F = \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Положим  $\rho(x) = cxe^{-x^2}$ , где константу  $c = 2e$  определим из условия нормировки. Случайную величину с такой плотностью разыграем по формуле

$$\gamma_i = \int_{\xi_i}^{+\infty} \rho(x) dx = e^{1-\xi_i^2}, \quad \xi_i = \sqrt{1 - \ln \gamma_i}.$$

Здесь удобнее считать переменным нижний предел интегрирования, что также допустимо. Теперь легко получаем

$$F = \frac{1}{2e} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \rho(x) dx \approx \frac{1}{2eN} \sum_{i=1}^N (1 - \ln \gamma_i)^{-1/2},$$

$$\Delta_N \approx \frac{1}{N-1} \left[ \frac{1}{2eN} \sum_{i=1}^N (1 - \ln \gamma_i)^{-1} - F^2 \right].$$

Приемы уменьшения дисперсии позволяют уменьшать объем вычислений; они широко применяются не только при вычислении интегралов. Например, Бюффон заметил, что можно определить число  $\pi$ , бросая иглу на сетку параллельных линий и регистри-

руя процент случаев, когда игла пересекается с линией (рис. 22). Но для получения трех верных знаков требуется примерно  $10^4$  испытаний. Оказывается, если брать скрепленные крестом иголки, то для той же точности надо в 25 раз меньше испытаний, а три скрепленные снежинкой иголки дают экономию в 135 раз.

**Замечание.** Нередко подынтегральная функция имеет на разных участках существенно разное поведение, и ввести хороший единый вес на всем отрезке интегрирования не удастся. Тогда выгодно представить интеграл в виде суммы интегралов по отдельным участкам и вычислять каждый из них со своим весом. Это уменьшает дисперсию результата.

**5. Кратные интегралы.** Второй способ легко обобщается на многомерные интегралы  $I = \int_G f(x, y, z) dx dy dz$  по единичному

кубу  $G$  (для определенности мы выбираем трехмерное пространство), если  $0 \leq f(x, y, z) \leq 1$  внутри этого куба. Рассмотрим куб  $G$  в четырехмерном пространстве  $x, y, z, u$  и случайные равномерно распределенные в нем точки; координатами этих точек будут последовательные четверки случайных чисел  $\gamma_{4i+k}$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ . Доля случайных точек, удовлетворяющая неравенству  $\gamma_{4i+3} < f(\gamma_{4i}, \gamma_{4i+1}, \gamma_{4i+2})$ , даст приближенное значение искомого интеграла.

Напомним, что чем больше число измерений, тем более жесткими тестами надо проверять качество случайных или псевдослучайных чисел, используемых в расчете.

**Замечание 1.** Для функций произвольного вида можно получить при том же числе узлов точность в несколько раз более высокую; если использовать не случайные точки, а отрезки так называемых  $ЛП_\tau$ -последовательностей. Это последовательности многомерных точек, которые обеспечивают более равномерное распределение и самих точек в пространстве, и всех их проекций на грани и ребра многомерного куба. Особенно выгодно в расчетах с такими последовательностями выбирать числа точек  $N=2^r$ , ибо фактическая ошибка при этом оказывается обычно много меньше, чем по оценке дисперсии.

**Замечание 2.** Для гладких функций можно получить более хорошие результаты при несложном построении сетки, если выбрать число узлов  $N=k^m$ , где  $m$  — число измерений. Разобьем единичный куб на  $N$  кубиков со стороной  $1/k$ , в каждом кубике выберем одну случайную точку и вычислим по этим точкам интеграл. Дисперсия этого метода есть  $\Delta_N = O(N^{-1/2-1/m})$ , т. е. она меньше

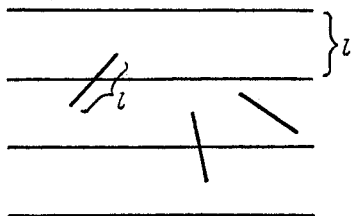


Рис. 22.

оценки  $O(N^{-1/2})$ , получающейся при обычном применении метода Монте-Карло.

**Первый способ.** Дисперсия второго способа велика, и обычно первый способ статистического вычисления интегралов точнее. Пусть  $\rho(x, y, z) \geq 0$  есть многомерная плотность распределения некоторой случайной величины. Тогда, аналогично одномерному случаю,

$$\int_G f(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz = Mf(\xi, \eta, \zeta) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i). \quad (59)$$

Как найти случайную трехмерную точку с заданным распределением плотности по тройке равномерно распределенных случайных чисел  $\gamma_{3i}, \gamma_{3i+1}, \gamma_{3i+2}$ ? Для этого надо свести разыгрывание многомерной плотности к последовательным разыгрываниям одномерных случайных величин с плотностями  $R(x), R(y), R(z)$ .

Для разыгрывания координаты  $x$  построим одномерную плотность распределения по этой координате при произвольных остальных координатах

$$R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z) dy dz.$$

Очевидно, функция  $R(x)$  неотрицательна и нормирована на единицу, т. е. удовлетворяет предъявляемым к плотности требованиям (51). Поэтому формула разыгрывания есть

$$\gamma_{3i} = \int_{-\infty}^{\xi_i} R(x) dx.$$

Теперь одна координата разыграна. Надо найти плотность распределения по второй координате при фиксированной первой координате и произвольной третьей. Если первую координату фиксировать, а по третьей проинтегрировать, то полученное выражение не удовлетворяет условию нормировки (интеграл по  $y$  не равен 1). Нормируя его, получим искомую плотность

$$R(y; \xi_i) = R^{-1}(\xi_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi_i, y, z) dz.$$

Вторая координата разыгрывается по формуле

$$\gamma_{3i+1} = \int_{-\infty}^{\eta_i} R(y; \xi_i) dy.$$

Плотность распределения по третьей координате при фиксированных первых двух координатах пропорциональна  $\rho(\xi_i, \eta_i, z)$ . Для нормировки надо положить

$$R(z; \xi_i, \eta_i) = R^{-1}(\xi_i) R^{-1}(\eta_i; \xi_i) \rho(\xi_i, \eta_i, z);$$

тогда интеграл по  $z$  равен единице. Соответственно формула разыгрывания

имеет вид

$$\gamma_{3l+2} = \int_{-\infty}^{\xi_l} R(z; \xi_l, \eta_l) dz.$$

Подставляя полученные координаты в (59), вычислим искомый интеграл. Все, что говорилось в п. 3 о точности расчета, полностью относится к многомерному случаю.

Нелегко подобрать такой вид плотности  $\rho(x, y, z)$ , чтобы она содержала основные особенности подынтегральной функции и при этом явно бы вычислялись все интегралы, возникающие при разыгрывании координат. Обычно пытаются выделить плотность вида  $\rho(x, y, z) = \rho_1(x) \rho_2(y) \rho_3(z)$ , ибо тогда каждая координата разыгрывается независимо от остальных по формуле вида (52), и легче подобрать интегрируемые выражения для одномерных плотностей; к общему виду прибегают, только если точность такого представления недостаточна.

Какими методами удобнее вычислять интегралы — сеточными или статистическими? Точность метода статистических испытаний невелика, и для однократных интегралов он явно невыгоден. Для многих измерений положение резко меняется.

Пусть функция  $m$  переменных интегрируется по сеточным формулам  $p$ -го порядка точности, причем сетка имеет  $n$  шагов по каждой переменной. Тогда полное число узлов есть  $N = n^m$ , а погрешность расчета  $\varepsilon \sim n^{-p}$  (разумеется, предполагается существование  $p$ -х кусочно-непрерывных производных функции). Поэтому число узлов, требуемое для достижения данной точности  $\varepsilon$ , есть  $N \sim (1/\varepsilon)^{m/p}$ ; оно экспоненциально растет при увеличении числа измерений.

При интегрировании методом статистических испытаний погрешность  $\varepsilon \sim N^{-1/2}$ . Поэтому полное число узлов есть  $N \sim (1/\varepsilon)^2$  независимо от числа измерений.

Очевидно, если число измерений  $m < 2p$ , то сеточные методы требуют меньшего числа узлов и более выгодны. Если  $m > 2p$ , то статистические методы выгодней. И чем больше число измерений, тем больший выигрыш дают статистические методы.

В многомерном случае редко можно рассчитывать на лучший порядок точности, чем  $p = 2$ ; тогда трехмерные интегралы выгодней вычислять сеточными методами, а пятимерные — уже статистическими. Если же функция имеет только первые производные, то  $p = 1$ , и статистические методы становятся выгодными даже для трехкратных интегралов.

**6. Другие задачи.** Методы статистических испытаний применяют не только к численному интегрированию, а и во многих других случаях: задачи массового обслуживания, нахождение критических параметров ядерного реактора, расчет защиты от излучения и т. д.

Например, рассмотрим расчет надежности сложной конструкции, состоящей из многих элементов. Каждый элемент обычно испытывают на изготовляющем

его заводе и снимают так называемую *кривую отказов* (рис. 23, а); это вероятность выхода элемента из строя после  $t$  часов работы. Чтобы снять такую кривую, надо заставить большую партию элементов работать до поломки. Ясно, что испытывать так готовую конструкцию слишком дорого.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из четырех элементов, причем поломка любого элемента выводит конструкцию из строя. Самый ненадежный элемент мы дублируем так, что после поломки элемента включается дублер (рис. 23, б). Тогда конструкция сломается, если сломаются оба третьих элемента или любой другой. Если время жизни отдельного элемента есть  $t_k$ , то время жизни конструкции равно

$$T = \min(t_1, t_2, t_3 + t'_3, t_4). \quad (60)$$

Проведем математическое испытание конструкции. Разыграем выход каждого элемента из строя при помощи равномерно распределенных случайных чисел  $\gamma_i$ . Откладывая  $\gamma_1$  на оси ординат кривой отказов первого элемента,

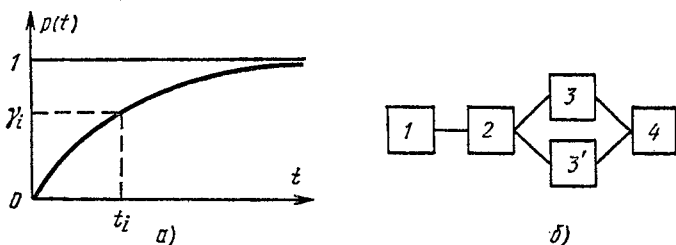


Рис. 23.

получим на оси абсцисс его время жизни (рис. 23, а). Время жизни второго элемента определим по числу  $\gamma_2$  и т. д.; разумеется, отказ каждого дублирующего элемента надо разыграть отдельно. Затем по формуле (60) найдем время жизни конструкции в данном испытании.

Повторяя такое испытание много раз можно найти среднее время работы конструкции

$$T = \frac{1}{N} \sum_i T_i$$

и построить ее кривую отказов. Если надо испытать слегка измененную конструкцию, это можно сделать по той же программе, изменив в ней только формулу (60).

## ЗАДАЧИ

1. Составить из обобщенных формул трапеций (8) и средних (17) такую линейную комбинацию, чтобы сократились главные части их погрешностей. Показать, что при этом получается обобщенная формула Симпсона (12).

2. Доказать для формулы трапеций на квазиравномерной сетке асимптотическую оценку погрешности (10).

3. Построить трехточечные разностные выражения для  $f'(x)$  на концах отрезка интегрирования. Подставляя их в формулу Эйлера (21), вывести квадратурную формулу Грегори. Найти погрешность этой формулы.

4. Для примера интегрирования функции  $f(x) = x|x|$ , приведенного в таблице 14, найти по таблице 13 мажорантную оценку погрешности примененных квадратурных формул. Проверить, насколько фактическая ошибка



на каждой сетке отличается от мажорантной. Убедиться, что фактическая погрешность не имеет вида  $R \approx ah^v$ .

5. Найти погрешность нелинейной квадратурной формулы (33) на равномерной сетке.

6. Найти погрешность квадратурной формулы Филона (38), аналогичной формуле трапеций.

7. Для слабо меняющихся функций формулы средних и трапеций близки по точности. Почему их аналоги для быстро осциллирующих функций (35) и (37) имеют существенно разную точность?

8. Вывести формулу Филона, соответствующую квадратичной аппроксимации амплитуды по трем соседним узлам. Сравнить ее с формулой Симпсона.

9. Найти асимптотическое выражение погрешности квадратурной формулы (41).

10. Найти формулу для определения числа  $\pi$  способом Бюффона (§ 4, п. 4) и дисперсию этого способа; для этого удобно свести бросания к вычислению интеграла статистическими методами. Сделать то же для иголок, скрепленных крестом и снежинкой.