

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

В главе II рассмотрены способы построения приближенных формул для заданной функции. В § 1 изложен способ интерполяции; он несложен и обеспечивает хорошую точность на небольших отрезках. В § 2 рассмотрена средне-квадратичная аппроксимация, частным случаем которой является метод наименьших квадратов; она позволяет строить приближенные формулы, пригодные на больших отрезках. В § 3 кратко изложены основные сведения о равномерной аппроксимации.

§ 1. Интерполирование

1. Приближенные формулы. Если задана функция $y(x)$, то это означает, что любому допустимому значению x сопоставлено значение y . Но нередко оказывается, что нахождение этого значения очень трудоемко. Например, $y(x)$ может быть определено как решение сложной задачи, в которой x играет роль параметра, или $y(x)$ измеряется в дорогостоящем эксперименте. При этом можно вычислить небольшую таблицу значений функции, но прямое нахождение функции при большом числе значений аргумента будет практически невозможно.

Функция $y(x)$ может участвовать в каких-либо физико-технических или чисто математических расчетах, где ее приходится многократно вычислять. В этом случае выгодно заменить функцию $y(x)$ приближенной формулой, т. е. подобрать некоторую функцию $\varphi(x)$, которая близка в некотором смысле к $y(x)$ и просто вычисляется. Затем при всех значениях аргумента полагают $y(x) \approx \approx \varphi(x)$. Близость получают введением в аппроксимирующую функцию свободных параметров $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и соответствующим их выбором.

Подбор удачного вида функциональной зависимости $\varphi(x; \mathbf{a})$ — искусство; некоторые советы по этому поводу будут даны в § 1, п. 8. А определение наилучших (в требуемом смысле) параметров формулы делается стандартными методами, которые и будут рассмотрены в этой главе.

2. Линейная интерполяция. Пусть функция $y(x)$ известна только в узлах некоторой сетки x_i , т. е. задана таблицей. Если

потребовать, чтобы $\varphi(x; \mathbf{a})$ совпадала с табличными значениями в n выбранных узлах сетки, то получим систему

$$\varphi(x_i; a_1, a_2, \dots, a_n) = y(x_i) \equiv y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

из которой можно определить параметры a_k . Этот способ подбора параметров называется *интерполяцией* (точнее, *лагранжевой* интерполяцией). По числу используемых узлов сетки будем называть интерполяцию *одноточечной*, *двухточечной* и т. д.

Если $\varphi(x; \mathbf{a})$ нелинейно зависит от параметров, то интерполяцию назовем *нелинейной*; в этом случае нахождение параметров из системы (1) может быть трудной задачей. Сейчас мы рассмотрим *линейную* интерполяцию, когда $\varphi(x; \mathbf{a})$ линейно зависит от параметров, т. е. представима в виде так называемого *обобщенного многочлена*

$$\varphi(x; a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (2)$$

Очевидно, функции $\varphi_k(x)$ можно считать линейно-независимыми, иначе число членов в сумме и параметров можно было бы уменьшить. На систему функций $\varphi_k(x)$ надо наложить еще одно ограничение. Подставляя (2) в (1), получим для определения параметров a_k следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3)$$

Чтобы задача интерполяции всегда имела единственное решение, надо, чтобы при любом расположении узлов (лишь бы среди них не было совпадающих) определитель системы (3) был бы отличен от нуля:

$$\Delta \equiv \text{Det} \{ \varphi_k(x_i) \} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{при } x_i \neq x_j. \quad (4)$$

Система функций, удовлетворяющих требованию (4), называется *чебышевской*. Таким образом, при линейной интерполяции надо строить обобщенный многочлен по какой-нибудь чебышевской системе функций.

Для линейной интерполяции наиболее удобны обычные многочлены, ибо они легко вычисляются и на клавишной машине и на ЭВМ. Другие системы функций сейчас почти не употребляются, хотя в теории подробно рассматривают интерполяцию тригонометрическими многочленами и экспонентами. Поэтому мы не приводим выражения обобщенного многочлена (2) через табулированные значения функции y_i ; вывести это выражение несложно.

3. Интерполяционный многочлен Ньютона. Рассмотрим систему $\varphi_k(x) = x^k$, $0 \leq k \leq n$; для удобства узлы интерполяции также перенумеруем с нулевого по n -й. Легко заметить, что определитель (4) в этом случае есть определитель Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \geq k > m \geq 0} (x_k - x_m). \quad (5)$$

Следовательно, алгебраический интерполяционный многочлен $\mathcal{P}_n(x)$ всегда существует и единствен (с точностью до формы записи). Применим для его вывода следующий прием.

Определим *разделенные разности* табулированной функции $y(x)$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} y(x_i, x_j) &= [y(x_i) - y(x_j)] / (x_i - x_j), \\ y(x_i, x_j, x_k) &= [y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)] / (x_i - x_k), \end{aligned} \quad (6)$$

и т. д. Разделенные разности первого, второго и более высоких порядков имеют размерности производных соответствующих порядков; в главе III показано, что они дают приближенные значения производных. Разделенные разности любого порядка можно выразить непосредственно через узловые значения функции, но вычислять их удобнее по рекуррентному соотношению (6).

Пусть $\mathcal{P}(x)$ есть многочлен степени n . Рассмотрим, что представляют собой его разделенные разности. Вычитая из него константу $\mathcal{P}(x_0)$, получим многочлен $\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x_0)$, который обращается в нуль при $x = x_0$ и поэтому делится нацело на $x - x_0$. Следовательно, первая разделенная разность многочлена n -й степени $\mathcal{P}(x, x_0) = [\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x_0)] / (x - x_0)$ есть многочлен степени $n - 1$ относительно x и в силу симметрии выражения — относительно x_0 . Аналогично, вторая разность $\mathcal{P}(x, x_0, x_1)$ есть многочлен степени $n - 2$; в самом деле, из (6) видно, что числитель этой разности обращается в нуль при $x = x_1$, и значит, нацело делится на $x - x_1$, а степень при этом понижается на единицу. Продолжая эти рассуждения, можно показать, что разность $\mathcal{P}(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ есть многочлен нулевой степени, т. е. константа, а более высокие разделенные разности тождественно равны нулю.

Перепишем соотношения (6) для случая, когда функция есть многочлен и первый аргумент равен x :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \mathcal{P}(x_0) + (x - x_0) \mathcal{P}(x, x_0), \\ \mathcal{P}(x, x_0) &= \mathcal{P}(x_0, x_1) + (x - x_1) \mathcal{P}(x, x_0, x_1) \end{aligned}$$

и т. д. Эта цепочка соотношений конечна, ибо $(n + 1)$ -я разделенная

разность многочлена тождественно равна нулю. Последовательно подставляя эти соотношения друг в друга, получим формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = & \mathcal{P}(x_0) + (x - x_0) \mathcal{P}(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \mathcal{P}(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

по которой многочлен n -й степени выражается при помощи разделенных разностей через свои значения в узлах x_0, \dots, x_n . Но значения интерполяционного многочлена в этих узлах по определению совпадают со значениями искомой функции, и поэтому разделенные разности $y(x)$ и $\mathcal{P}(x)$ тоже совпадают. Подставляя в (7) разделенные разности искомой функции и заменяя точное равенство на приближенное, получим интерполяционную формулу Ньютона

$$y(x) \approx y(x_0) + \sum_{k=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) y(x_0, x_1, \dots, x_k). \quad (8)$$

Формула Ньютона удобна для вычислений и на ЭВМ, и на клавишной машине. Легко составить следующую таблицу 1 разделенных разностей для табулированной функции $y(x)$ и произвести вычисления по формуле (8).

Таблица 1

x_0	$y(x_0)$			
x_1	$y(x_1)$	$y(x_0, x_1)$		
x_2	$y(x_2)$	$y(x_1, x_2)$	$y(x_0, x_1, x_2)$	
x_3	$y(x_3)$	$y(x_2, x_3)$	$y(x_1, x_2, x_3)$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$

Замечание 1. За точностью расчета удобно следить, визуально оценивая скорость убывания членов суммы (8). Если они убывают медленно, то на хорошую точность рассчитывать, вообще говоря, нельзя (подробнее см. пп. 6, 7). Если убывание быстрое, то оставляют только те члены, которые больше допустимой погрешности; тем самым определяют, сколько узлов требуется подключить в расчет.

Пример. Покажем, как вычислять синус в первом квадранте, используя четыре известных значения. Составим таблицу 2 с четырьмя узлами, причем для удобства вычисления положим $y(x) = \sin(30^\circ \cdot x)$. Для проверки точности, используя разности верхней косой строки, вычислим

$$y(1,5) \approx 0 + 0,750 - 0,050 + 0,006 = 0,706.$$

Таблица 2

x_i	$y(x_i)$	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_i, \dots, x_{i+3})$
0	0,000			
1	0,500	0,500	-0,067	
2	0,866	0,366	-0,116	-0,016
3	1,000	0,134		

Это приближенное значение мало отличается от точного значения $y(1,5) = \sin 45^\circ \approx 0,707$. Таким образом, достаточно помнить только верхнюю косую строку таблицы 2, чтобы вычислять синус с точностью около 0,001.

Замечание 2. При заданном числе узлов многочлен Ньютона удобнее вычислять по схеме Горнера, записывая его в виде

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)[y(x_0, x_1) + (x - x_1)[y(x_0, x_1, x_2) + \dots]].$$

Но если надо контролировать точность расчета и определять нужное число узлов, то удобнее форма (8).

Замечание 3. Для расчетов по формуле Ньютона безразличен порядок, в котором перенумерованы узлы интерполяции; это полезно помнить при подключении новых узлов в расчет.

Мы ограничились здесь общими формулами, пригодными для таблиц с переменным шагом. Во многих учебниках для таблиц с постоянным шагом вводят *конечные разности* $\Delta^n y$, связанные с разделенными разностями соотношением $\Delta^n y = n!y(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Но это дань историческим традициям, ибо разделенные разности не менее удобны в расчетах, чем конечные.

Есть много разных форм записи интерполяционного многочлена общего вида: Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Грегори — Ньютона, Лапласа — Эверетта и другие. Наиболее удобной для вычислений с контролем точности и на ЭВМ и вручную является форма Ньютона (8). Большинство остальных форм рассчитано на определенные частные случаи расположения узлов интерполяции, но те выгоды, которые при этом получаются, обычно несущественны при расчетах на ЭВМ.

4. Погрешность многочлена Ньютона. Выше мы рассмотрели эмпирическое правило определения погрешности интерполяции по убыванию членов суммы (8). Проведем теперь строгое исследование погрешности метода, проистекающей от замены искомой функции интерполяционным многочленом Ньютона.

Погрешность удобно представить в следующем виде:

$$y(x) - \mathcal{P}_n(x) = \omega_n(x) r(x), \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (9)$$

ибо эта погрешность заведомо равна нулю во всех узлах интерполяции. Введем вспомогательную функцию $q(\xi) = y(\xi) - \mathcal{P}_n(\xi) - \omega_n(\xi) r(x)$, где x играет роль параметра и принимает любое фиксированное значение. Очевидно, $q(\xi) = 0$ при $\xi = x_0, x_1, \dots, x_n$ и при $\xi = x$, т. е. обращается в нуль в $n+2$ точках.

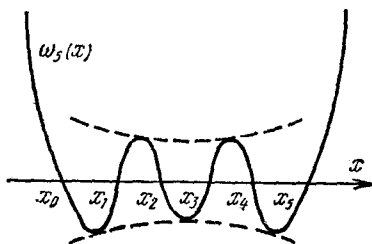


Рис. 2.

Предположим, что $y(x)$ имеет $n+1$ непрерывную производную; тогда то же справедливо для $q(\xi)$. Между двумя нулями гладкой функции лежит нуль ее производной. Последовательно применяя это правило, получим, что между крайними из $n+2$ нулей функции лежит нуль $n+1$ -й производной. Но $q^{(n+1)}(\xi) =$

$y^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! r(x)$, и если в какой-то точке ξ^* , лежащей между указанными выше нулями, она обращается в нуль, то $r(x) = y^{(n+1)}(\xi^*) / (n+1)!$. Заменяя погрешность (9) максимально возможной, получаем оценку погрешности:

$$|y(x) - \mathcal{P}_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|, \quad M_{n+1} = \max |y^{(n+1)}(\xi)|, \quad (10)$$

где максимум производной берется по отрезку между наименьшим и наибольшим из значений x, x_0, x_1, \dots, x_n .

Оценить $\omega_n(x)$ при произвольном расположении узлов интерполяции сложно. Однако таблицы чаще всего имеют постоянный шаг $h = x_{i+1} - x_i$, а узлы интерполяции берутся из таблицы подряд. Тогда $\omega_n(x)$ имеет примерно такой вид, как показано на рис. 2 для $n=5$: вблизи центрального узла интерполяции экстремумы невелики, вблизи крайних узлов — несколько больше, а если x выходит за крайние узлы интерполяции, то $\omega_n(x)$ быстро возрастает.

Можно подобрать узлы интерполяции так, чтобы на заданном отрезке $\max |\omega_n(x)|$ был меньше, чем у любого другого многочлена той же степени. Для этого $\omega_n(x)$ должен быть многочленом Чебышева первого рода (см. Приложение). Узлы этого многочлена расположены сравнительно редко в середине рассматриваемого отрезка и сгущаются у его концов. Но вне выбранного отрезка многочлен $\omega_n(x)$ по-прежнему будет быстро возрастать. Этот способ интерполяции довольно громоздок, а выигрыш в точности невелик; поэтому его используют только для специальных целей — например, при построении аппроксимирующих формул.

Термин *интерполяция* в узком смысле употребляют, если x заключено между крайними узлами интерполяции; если он выходит из этих пределов, то говорят об *экстраполяции*. Очевидно, что при экстраполяции далеко за крайний узел ошибка может быть велика, поэтому экстраполяция мало надежна. На практике рекомендуется пользоваться преимущественно интерполяцией.

При интерполяции на равномерной сетке выгодно выбирать из таблицы узлы так, чтобы искомая точка x попадала ближе к центру этой конфигурации узлов — это обеспечит более высокую точность. Для упрощения вычислений рассмотрим случай нечетного $n = 2k + 1$. Из симметрии полинома $\omega_n(x)$ очевидно, что в центральном интервале экстремум достигается точно в середине (см. рис. 2). Этот экстремум равен

$$\left[\frac{h}{2} \cdot \frac{3h}{2} \cdot \frac{5h}{2} \cdots \frac{(2k+1)h}{2} \right]^2 = \left[\frac{(2k+1)! h^{k+1}}{k! 2^{2k+1}} \right]^2.$$

Подставим эту величину в оценку (10). После несложных преобразований с использованием формулы Стирлинга $p! \approx \sqrt{2\pi p} (p/e)^p$ получим оценку ошибки в центральном интервале

$$|y(x) - \mathcal{P}_n(x)| < \sqrt{2/\pi n} M_{n+1} (h/2)^{n+1}. \quad (11)$$

Если величины производных $y(x)$ можно оценить, то отсюда легко определить число узлов, достаточное для получения заданной точности.

Из оценки (11) видно, что если перейти от таблиц с крупным шагом к таблицам с более мелким шагом, то погрешность метода будет убывать, как h^{n+1} . Поэтому говорят, что многочлен Ньютона $\mathcal{P}_n(x)$ имеет погрешность $O(h^{n+1})$ и обеспечивает $n+1$ -й порядок точности интерполяции.

В главе III мы увидим, что между разделенными разностями и производными соответствующих порядков существует соотношение $y^{(n)}(x) \approx n! y(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Если учесть это при определении величины членов суммы (8), то нетрудно заметить, что эмпирическая оценка погрешности по первому отброшенному члену близка к оценке (10), хотя является менее строгой. Оценки (10) и (11) можно провести до вычисления интерполяционного многочлена, т. е. это *априорные* оценки точности. Оценка же по первому отброшенному члену делается после выполнения вычислений, т. е. является *апостериорной*. Поскольку обычно величины производных искомой функции заранее неизвестны, а в ходе вычисления многочлена Ньютона они фактически определяются, то на практике удобнее пользоваться апостериорной оценкой.

Далее мы не раз сможем убедиться, что строгие априорные оценки используются в основном при теоретическом исследовании методов. При практическом контроле точности расчетов обычно

употребляют менее строгие (хотя тоже [имеющие теоретическое обоснование]), но более удобные апостериорные оценки.

5. Применения интерполяции. Интерполяция применяется во многих задачах, а не только для вычисления табулированной функции при любых значениях аргумента.

При помощи разделенных разностей контролируется точность таблиц. Для этого составляют таблицы разделенных разностей различных порядков для соседних узлов и анализируют их поведение.

Например, в таблице 3 приведена зависимость коэффициента теплопроводности высокотемпературной фазы циркония от температуры. Там же вычислены первая и вторая конечные разности. Видно, что вторая разность меняется беспорядочно, так что интерполировать более чем по двум точкам бессмысленно. По величине второй разности можно сказать, что случайная погрешность λ составляет около единицы третьего знака в большинстве точек, но в двух первых она может достигать до единицы второго знака (для систематической погрешности измерений эти соображения неприменимы).

Таблица 3

Теплопроводность циркония

T°, K	$\lambda \cdot 10^4,$ кал/см·г·сек	$\Delta_1 \lambda \cdot 10^6$	$\Delta_2 \lambda \cdot 10^8$
1200	561		
1300	640	79	-24
1400	695	55	-24
1500	716	21	-2
1600	735	19	-2
1700	752	17	+2
1800	771	19	-2
1900	788	17	-3
2000	802	14	+5
2100	821	19	

Подобный контроль полезен при анализе результатов измерений в физике и технике.

Интерполяцию применяют для *субтабулирования* — сгущения таблиц. Алгоритмы непосредственного вычисления многих функ-

ций очень сложны. Поэтому при математическом табулировании обычно функцию непосредственно вычисляют в небольшом числе узлов, т. е. таблицы имеют крупный шаг. Затем при помощи интерполяции высокого порядка точности сетку узлов сгущают и составляют подробную таблицу. Шаг этой таблицы выбирают таким, чтобы простейшая интерполяция (двухточечная) обеспечивала требуемую точность.

В связи с этим отметим, что при ручных расчетах выгодны подробные таблицы, ибо они допускают применение простейших способов интерполяции, легко выполняемых на бумаге или клавишных машинах, а время поиска нужных узлов интерполяции невелико по сравнению со временем выполнения алгебраических действий. Наоборот, при расчетах на ЭВМ задание подробных таблиц невыгодно, поскольку они занимают много места в оперативной памяти, а время поиска становится много больше времени выполнения алгебраических действий; выгоднее таблицы с большим шагом, хотя при этом требуются более сложные и точные способы интерполяции.

Задачей *обратного интерполирования* называют нахождение x для произвольного y , если задана таблица $y_i = y(x_i)$. Для монотонных функций между прямым и обратным интерполированием нет разницы: можно читать таблицу наоборот, как задание $x_i = x(y_i)$. Единственное отличие будет в том, что «обратная» таблица $x(y_i)$ будет иметь переменный шаг, даже если «прямая» таблица имела постоянный. Но все наши формулы рассчитаны на переменный шаг. Отметим, что для достижения заданной точности прямая и обратная интерполяции требуют, вообще говоря, разного числа узлов.

Важный пример обратного интерполирования — решение уравнения $y(x) = 0$. Вычислим несколько значений функции $y(x_i)$, т. е. составим небольшую таблицу. Запишем ее в виде $x_i = x(y_i)$ и при помощи интерполяции найдем приближенное значение $x(0)$. Этот способ дает хорошие результаты, если функция достаточно гладкая, а корень лежит между рассчитанными узлами. Если корень расположен далеко от узлов, то способ ненадежен, ибо применяется экстраполяция.

Пример. Решим уравнение

$$y(x) \equiv (1+x)e^{0,5x} - 2,5 = 0. \quad (12)$$

Составим таблицу 4 значений функции; первым запишем столбец значений y , ибо в дальнейших вычислениях эта величина будет аргументом. Найдем разделенные разности и произведем вычисления по верхней косой строке:

$$x(0) \approx x_0 + (0 - y_0) x(y_0, y_1) + (0 - y_0)(0 - y_1) x(y_0, y_1, y_2) = 0,744.$$

Точное решение есть $x(0) = 0,732$, так что ошибка получилась

небольшой. Для повышения точности в этом способе целесообразно взять новые узлы, близко расположенные к грубо найденному корню, а не увеличивать число узлов.

Таблица 4

y_i	x_i	$x(y_i, y_{i+1})$	$x(y_0, y_1, y_2)$
-1,500	0		
-0,574	0,5	0,540	-0,076
0,797	1,0	0,365	

В этом курсе будут рассмотрены и другие примеры применения интерполирования.

6. Интерполяционный многочлен Эрмита. Пусть табулирована не только функция, но и ее производные вплоть до некоторого порядка. Тогда можно потребовать, чтобы в узлах интерполяции совпадали не только значения искомой функции $y(x)$ и интерполяционной функции $\varphi(x)$, но и значения их производных вплоть до некоторого порядка. Такую интерполяцию будем называть *эрмитовой*; если $\varphi(x)$ — алгебраический многочлен n -й степени, то он называется интерполяционным многочленом Эрмита и обозначается $\mathcal{H}_n(x)$.

Покажем, как построить этот многочлен. По $n+1$ узлу построим интерполяционный многочлен Ньютона $\mathcal{P}_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n)$. Поскольку значения функции $y(x)$ и многочлена в узлах совпадают, то их средние наклоны на участках между узлами равны. Мысленно будем приближать узел x_n к узлу x_{n-1} ; при этом средний наклон будет стремиться к производной. Значит, после совпадения узлов получим многочлен, который в узле x_{n-1} правильно передает не только значение функции, но и значение первой производной. Символически обозначим его как $\mathcal{P}_n(x; x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1})^*$.

Слияние трех узлов в один обеспечивает передачу не только наклона, но и кривизны, т. е. первой и второй производных и т. д. Таким образом, многочлен

$$\mathcal{H}_n(x) = \mathcal{P}_n(x; \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{m_0}, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \underbrace{x_p, x_p, \dots, x_p}_{m_p}), \quad (13)$$

$$\sum_{k=0}^p m_k = n + 1,$$

*) Чтобы отличать его обозначение от разделенной разности, мы отделяем аргумент от узлов, по которым составлен многочлен, точкой с запятой.

в узле x_k правильно передает значение функции и ее производных вплоть до порядка $m_k - 1$ и имеет минимально необходимую для этого степень. Оценка погрешности метода (10) в этом случае принимает следующий вид:

$$|y(x) - \mathcal{N}_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Omega_n(x)|, \quad \Omega_n(x) = \prod_{k=0}^p (x - x_k)^{m_k}. \quad (14)$$

Очевидно, если сетка имеет шаг h , а точка x лежит между крайними узлами интерполяции, то $\Omega_n(x) = O(h^{n+1})$; следовательно, порядок точности эрмитовой интерполяции равен $n + 1$, т. е. числу коэффициентов интерполяционного многочлена.

Заметим, что обычный многочлен Ньютона с таким же числом коэффициентов (т. е. той же степени) также имеет погрешность $O(h^{n+1})$. Однако на одной и той же сетке численная величина погрешности многочлена Ньютона будет больше, чем у многочлена Эрмита: его вспомогательный многочлен $\omega_n(x)$ содержит больше узлов, чем $\Omega_n(x)$, и поэтому в него входят большие сомножители. Очевидно также, что чем более высокие производные используются при построении интерполяционного многочлена Эрмита заданной степени, тем меньше требуемое число узлов, и тем меньше будет численная величина его погрешности (хотя порядок точности остается одним и тем же).

Выражением (13) нельзя пользоваться буквально. Если формально подставить в формулу Ньютона (8) совпадающие узлы, то потребуются вычислить разделенные разности, у которых некоторые узлы являются кратными. Выражения (6) для таких разностей содержат неопределенность типа $0/0$. Если кратность каждого узла не больше чем двойная, то эту неопределенность можно раскрыть с помощью предельного перехода, например,

$$\begin{aligned} y(x_0, x_0) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y(x_0) - y(x_1)}{x_0 - x_1} = y'(x_0), \\ y(x_0, x_0, x_1) &= \frac{1}{x_0 - x_1} [y'(x_0) - y(x_0, x_1)], \\ y(x_0, x_0, x_1, x_1) &= \frac{1}{(x_0 - x_1)^2} [y'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + y'(x_1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Если узлы имеют более высокую кратность, то удобнее дифференцировать формулу Ньютона (8). Например, если ее продифференцировать $m - 1$ раз, то обратятся в нуль все члены, содержащие разделенные разности порядка меньше $m - 1$. Затем положим $x = x_0 = x_1 = \dots$; тогда обратятся в нуль множители перед разделенными разностями порядка больше $m - 1$, и мы получим

$$y(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_m) = \frac{1}{(m-1)!} y^{(m-1)}(x_0). \quad (16)$$

Но узлы более чем двойной кратности почти не встречаются в практике вычислений, ибо вторые и более высокие производные искомой функции редко табулируются.

Рассмотрим наиболее употребительные частные случаи интерполяционного многочлена Эрмита.

Первый случай — многочлен, который в одном узле x_0 совпадает с функцией и всеми ее заданными производными:

$$\mathcal{P}_n(x; x_0, x_0, \dots) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 y''(x_0) + \dots \quad (17)$$

Очевидно, это отрезок ряда Тейлора; в этом случае $\Omega_n(x) = (x-x_0)^{n+1}$, и оценка (11) переходит в известную оценку точности ряда Тейлора.

Второй случай — многочлен, передающий в двух узлах значения функции и ее первой производной:

$$\mathcal{P}_n(x; x_0, x_0, x_1, x_1) = y(x_0) + (x-x_0)\{y'(x_0) + (x-x_0)[y(x_0, x_0, x_1) + (x-x_1)y(x_0, x_0, x_1, x_1)]\}; \quad (18)$$

разделенные разности сюда надо подставить из соотношения (15). Функция $\Omega_n(x) = (x-x_0)^2(x-x_1)^2$ внутри интервала интерполирования не превышает $(h/2)^4$, так что погрешность формулы (18) не более $0,026M_4h^4$; эта формула имеет четвертый порядок точности.

Для сравнения приведем без вывода общее выражение интерполяционного многочлена Эрмита

$$\mathcal{H}_n(x) = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^{\alpha_k-1} \sum_{q=0}^{\alpha_k-1-m} \frac{y^{(m)}(x_k)}{m!q!} \left\{ (x-x_k)^{m+q} \times \prod_{i \neq k} (x-x_i)^{\alpha_i} \right\} \left\{ \frac{d^q}{dx^q} \prod_{i \neq k} (x-x_i)^{-\alpha_i} \right\}_{x=x_k}.$$

Оно настолько громоздко, что пользоваться им для вычислений практически невозможно. Если все $\alpha_i=1$, то обе внутренние суммы превращаются в одно слагаемое с $m=q=0$, и многочлен Эрмита переходит в многочлен Ньютона в форме Лагранжа. Если все $\alpha_i=2$, то получим

$$\mathcal{H}_n(x) = \sum_{k=0}^p \left\{ (x-x_k)y'_k + \left(1 - 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^p \frac{x-x_k}{x_k-x_i} \right) y_k \right\} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p \left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j} \right)^2;$$

можно проверить, что в случае двух узлов последнее выражение совпадает с (18) с точностью до формы записи. Но даже и это выражение оказывается очень громоздким.

Такая ситуация довольно часто встречается в прикладной математике. Общие формулы, рассчитанные на все случаи жизни, нередко оказываются настолько сложными, что их не применяют

ни в одном конкретном случае. К тому же, в практических расчетах, как мы увидим далее, нецелесообразно использовать многочлены высоких степеней, поэтому в общих формулах нет серьезной необходимости. Трудоемкость же вычислений часто оказывается существенно меньшей при применении рекуррентных процедур типа формулы разделенных разностей (6).

7. Сходимость интерполяции. При каких условиях погрешность метода стремится к нулю, т. е. когда и как интерполяционный многочлен сходится к $y(x)$? На практике мы имеем два способа перехода к пределу. Первый состоит в том, чтобы, сохраняя степень интерполяционного многочлена, уменьшить шаг сетки, т. е. воспользоваться более подробными таблицами. Второй — сохраняя шаг сетки, увеличивать число используемых узлов, т. е. увеличивать степень многочлена.

Уменьшение шага. Если $y(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $n+1$ -й, то при интерполяции многочленом $\mathcal{P}_m(x)$ степени $m \leq n$ погрешность метода есть $O(h^{m+1})$. В этом случае при фиксированной степени многочлена и уменьшении шага сетки погрешность $|y(x) - \mathcal{P}_m(x)|$ неограниченно убывает. Если ограничена производная, входящая в оценку ошибки, то интерполяционный многочлен равномерно сходится к $y(x)$ на ограниченном отрезке $a \leq x \leq b$.

Строго говоря, для каждого значения x выбирают свои узлы интерполяции, ближайšie (на данной сетке) к точке x , т. е. составляют свой многочлен $\mathcal{P}_m(x)$. При этом точка x заведомо лежит между крайними узлами интерполяции, используемыми в данном многочлене. Поэтому входящий в оценку погрешности (10) полином $\omega_m(x)$ ограничен равномерно по x : $|\omega_m(x)| < \max_i |x - x_i|^{m+1} \leq (mh)^{m+1}$, где h — шаг сетки (для неравномерных сеток — максимальный шаг). Для заданной точности ε определим шаг сетки из условия $M_{m+1}(mh)^{m+1} \leq \varepsilon \cdot (m+1)!$, где $M_{m+1} = \max_{[a, b]} |y^{(m+1)}(x)|$. Тогда для всех сеток с данным и более мелким шагом и любой точки отрезка $a \leq x \leq b$ погрешность интерполяционного многочлена $\mathcal{P}_m(x)$, узлы которого выбраны указанным выше образом, будет не более ε .

Аналогичные утверждения справедливы для интерполяционного многочлена Эрмита.

Увеличение числа узлов. Увеличивать степень интерполяционного многочлена далеко не всегда целесообразно. Во-первых, неизвестно, как быстро растет максимум производной M_m с увеличением ее порядка. Во-вторых, у функции может быть лишь конечное число производных. Рассмотрим интерполяцию на отрезке $a \leq x \leq b$, когда число узлов, используемых для построения интерполяционного многочлена, неограниченно возрастает.

Известно, что если $y(x)$ — целая функция, то при произвольном расположении узлов на $[a, b]$ многочлен $\mathcal{P}_n(x)$ равномерно сходится к $y(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Но целая функция — это функция, разложимая в степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости. Гораздо чаще приходится импонировать не целые функции, так что практическая ценность этого утверждения невелика.

Если же на $[a, b]$ функция имеет непрерывные производные сколь угодно высоких порядков, то это не гарантирует сходимости при произвольном расположении узлов. Например, возьмем функцию

$$y(x) = 0 \text{ при } -1 \leq x \leq 0, \quad y(x) = e^{-1/x} \text{ при } 0 < x \leq 1.$$

Ее график приведен на рис. 3. Все производные этой функции на $[-1, +1]$ непрерывны. Но если разместить все узлы интерполяции левее точки $x=0$, то, очевидно, $\mathcal{P}_n(x) \equiv 0$, и никакой сходимости быть не может.

Правда, в этом примере расположение узлов было грубо неравномерным. Но равномерное

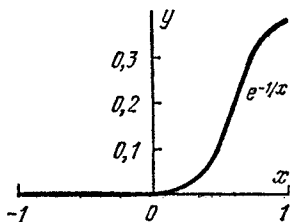


Рис. 3.

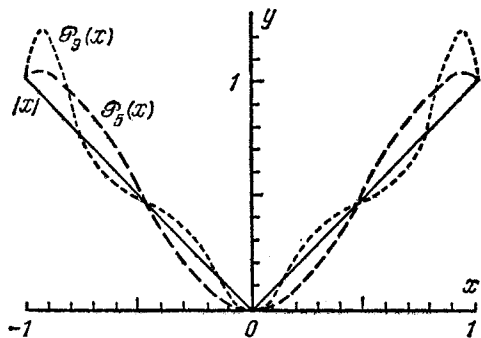


Рис. 4.

расположение не всегда спасает. С. Н. Бернштейн в 1916 г. доказал, что для функции $y(x) = |x|$ на отрезке $[-1, +1]$, покрытом равномерной сеткой узлов, значения $\mathcal{P}_n(x)$ между узлами интерполяции неограниченно возрастают при $n \rightarrow \infty$. Это иллюстрируется рис. 4, где даны графики функции и двух многочленов разных степеней.

Более того, для любой наперед заданной системы узлов можно найти такую непрерывную функцию, что построенные по этим узлам и функции многочлены Ньютона не будут равномерно сходиться.

Но сходимости в среднем для многочленов Ньютона всегда можно добиться следующим несложным выбором узлов. Пусть $\Phi_n(x)$ — система многочленов, ортогональных с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$, и $x_m^{(n)}$ — нули этих многочленов. Используем эти точки в качестве узлов интерполяций; тогда

$$\int_a^b [\mathcal{P}_n(x) - y(x)]^2 \rho(x) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ для любой непрерывной функции.

Для многочленов Эрмита получены более сильные результаты. Пусть функция $y(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$; возьмем в качестве узлов нули многочленов Чебышева первого рода $T_n(x)$ (см. Приложение); фиксируем в этих узлах значения функции, а вместо ее производной возьмем любые числа c_{in} , удовлетворяющие условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i |c_{in} \ln n/n| = 0$. Построенный по всем этим зна-

чениям многочлен $\mathcal{N}_{2n-1}(x)$ равномерно сходится к $y(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, если $y(x)$ имеет ограниченную производную, то в качестве c_{in} можно брать значение производной в узлах.

Но и для многочленов Эрмита неудачный выбор узлов может испортить сходимость. Например, ряд Тейлора (17) расходится, если $|x - x_0|$ больше расстояния от x_0 до ближайшей особой точки в комплексной плоскости.

Выводы. На практике интерполировать многочленом высокой степени нежелательно. Если 3—5 узлов (точнее, свободных параметров) не обеспечивают требуемой точности, то обычно надо не увеличивать число узлов, а уменьшать шаг таблицы.

8. Нелинейная интерполяция. Полиномиальная интерполяция по оценке (11) имеет погрешность $\sim M_{n+1}(h/2)^{n+1}$, и при повышении порядка точности формулы на единицу погрешность меняется примерно в $hM_{n+2}/2M_{n+1}$ раз. Если шаг достаточно мал, то погрешность при этом уменьшается. Но если шаг велик, или производные быстро растут с увеличением порядка, то погрешность может увеличиваться при увеличении порядка точности формулы. С этим часто приходится сталкиваться при работе с быстро меняющимися функциями.

Т а б л и ц а 5

x_i	$y(x_i)$	$y(x_i, x_{i+1})$		
0	1	10		
1	11	110	50	
2	121	1230	560	170
3	1351			

Пример 1. Пусть требуется найти значение $y(0,5)$, если функция задана таблицей 5 (в ней выписаны не только значения функции, но и разделенные разности). Используя интерполяцион-

ный многочлен Ньютона и ведя вычисления по верхней строке таблицы 5, запишем последовательно члены все более высоких порядков:

$$\varphi(0,5) = 1 + 5 - 12,5 + 63,75 - \dots$$

Этот ряд содержит быстро возрастающие члены и совсем не похож на сходящийся; поэтому вычислить функцию с его помощью не удастся. Функция слишком быстро меняется или, что то же самое, шаг сетки слишком велик для данной функции (рис. 5, а).

Как интерполировать такие функции, если более подробных таблиц нет? Универсального рецепта, пригодного для любой функции, не существует. Однако для конкретной функции нередко удастся найти свой способ интерполяции, дающей разумную точность. Такая интерполяция обычно нелинейна.

Для этого нужно располагать дополнительной информацией о качественном поведении функций. Часто ее можно получить, зная физический смысл $y(x)$. Например, проходящий через погло-

щающую среду свет ослабляется примерно по экспоненциальному закону; сопротивление движению в газе зависит от скорости примерно как v^m , где $m \approx 1$ для ламинарного движения, $m \approx 2$ для турбулентного и $m > 2$ вблизи звукового барьера. Нередко помогают формальные математические соображения — изучение графика

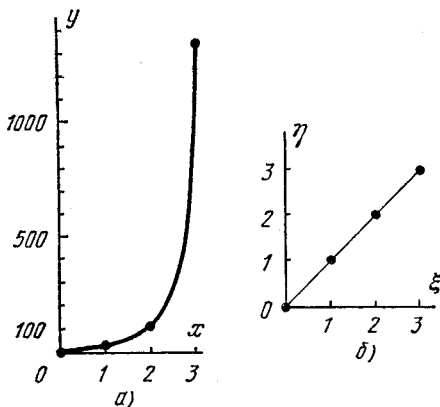


Рис. 5.

функции и сравнение его с графиками хорошо изученных функций (в первую очередь элементарных).

Выяснив качественное поведение функции, стараются подобрать такое преобразование переменных $\eta = \eta(y)$, $\xi = \xi(x)$, чтобы в новых переменных график $\eta(\xi)$ мало отличался от прямой на протяжении нескольких шагов таблицы. Тогда в переменных $\eta(\xi)$ интерполяция многочленом невысокой степени будет давать хорошую точность. Вычисления заключаются в составлении таблицы для новых переменных $\eta_i = \eta(\xi_i)$, интерполяции по ней и нахождении $y = y(\eta)$ обратным преобразованием. Этот способ называют *методом выравнивания*.

Пример 2. Проиллюстрируем метод выравнивания на примере функции, заданной таблицей 5. Нетрудно заметить, что зависимость близка к показательной, $y(x) \approx 10^x$; значит, в переменных $\xi = x$, $\eta = \lg y$ график будет почти прямым (рис. 5, б). Составим новую таблицу 6 и проведем интерполяцию по формуле Ньютона

$$\eta^* = \eta(0,5) = 0 + 0,5207 + 0 - 0,0004 \approx 0,5203.$$

Теперь члены ряда быстро убывают, обеспечивая хорошую точность; считая, что точность η^* примерно равна последнему члену ряда, обратным преобразованием получим, что $y(\eta^*) \approx 3,314 \pm 0,1\%$. Очевидно, что удачно выбранное выравнивание позволило получить высокую точность интерполяции.

Замечание 1. Для каждой конкретной функции подбирают свой вид нелинейной интерполяции. Для других функций этот вид, как правило, будет давать плохую точность.

Замечание 2. Оценка погрешности такой интерполяции содержит старшие производные $\eta(\xi)$. Их трудно найти, поэтому на практике удобнее оценивать точность по скорости убывания членов в формуле Ньютона, как было сделано выше. Употреби-

телен также следующий прием: для одного из узлов x_i вычисляют $y(x_i)$ интерполяцией по соседним узлам и сравнивают с табличным значением y_i .

Т а б л и ц а 6

ξ_i	η_i	$n(\xi_i, \xi_{i+1})$		
0	0,0000			
1	1,0414	1,0414	0,0000	
2	2,0828	1,0414	0,0032	0,0011
3	3,1306	1,0478		

Пример 3. Отбросим в таблице 6 узел $\xi = 1$ и связанные с ним разделенные разности. По оставшимся трем узлам приближенно вычислим отброшенное значение $\eta(1) \approx 1,0382$ или $y(1) \approx 10,92$. Последняя величина отличается от табличного значения на 0,8%. Это вычисление велось фактически с шагом $h_0 = 2$ многочленом второй степени, имеющим погрешность $O(h^3)$. Значит, при вычислениях с шагом $h = 1$ погрешность должна уменьшиться в $(h_0/h)^3 = 8$ раз и составить 0,1%. Это хорошо согласуется с оценкой по последнему члену ряда, сделанной выше.

Замечание 3. Оба прямых преобразования $\eta(y)$, $\xi(x)$ и обратное преобразование $y(\eta)$ должны выражаться несложными формулами, иначе метод выравнивания будет малоприменимым на практике. Удобны преобразования типа логарифмирования, вычисления экспонент, тригонометрических функций и другие, имеющиеся в библиотеках стандартных программ современных ЭВМ (или легко выполнимые на логарифмической линейке).

Замечание 4. В исходных переменных интерполяция нелинейна относительно параметров; в данном примере она имела вид

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)$$
. Однако в переменных η , ξ она линейна по параметрам. Такая нелинейность мало осложняет работу, поэтому интерполяцию подобного вида будем называть *квазилинейной*.

Встречаются случаи, когда метод выравнивания неприменим. Например, если $y(x) \approx a(x+b)^c$, то не удастся найти такие координаты, которые превращали бы график в прямую и не содержали бы явно параметров a , b , c . Тогда зависимость от параметров не сводится к линейной и отыскать параметры и выполнить интерполяцию нелегко. Такую интерполяцию будем называть *существенно нелинейной*; на практике она используется крайне редко.

Замечание 5. Если выравнивающие преобразования переменных просты, то иногда удастся явно выразить $\varphi(x)$ через

табличные значения функции в исходных переменных. Например, двухточечная интерполяция многочленом Ньютона в выравнивающих переменных имеет следующий вид:

$$\eta \approx \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0) (\xi - \xi_0) / (\xi_1 - \xi_0), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1.$$

Если при выравнивании используется преобразование $\xi = x$, $\eta = \ln y$, то, возвращаясь к исходным переменным, получим

$$y(x) \approx y_0 (y_1/y_0)^{(x-x_0)/(x_1-x_0)}, \quad x_0 \leq x \leq x_1. \quad (19)$$

Но при большем числе узлов интерполяции подобные формулы становятся настолько громоздкими, что более выгодно не пользоваться ими, а проводить вычисления в выравнивающих переменных.

9. Интерполяция сплайнами. Когда надо провести график функции по известным точкам $y(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, то обычно пользуются лекалом. Однако если точки расположены редко, то нелегко бывает подобрать участок лекала, проходящий сразу через много точек. Тогда опытные инженеры берут гибкое лекало — металлическую линейку, ставят ее на ребро и изгибают, придерживая в нескольких местах пальцами так, чтобы ее ребро проходило сразу через все точки (рис. 6).

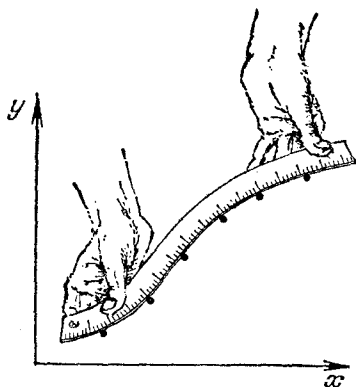


Рис. 6.

Этот способ интерполяции можно описать математически. Гибкая линейка — это упругий брусок; из курса сопротивления материалов известно, что уравнение его свободного равновесия есть

$\varphi^{IV}(x) = 0$. Значит, в промежутке между каждой парой соседних узлов интерполяционная функция является многочленом третьей степени, который удобно записать в таком виде:

$$\varphi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (20)$$

Коэффициенты многочлена на каждом интервале определяют из условий в узлах. Очевидно, в узлах многочлен должен принимать табличные значения функции:

$$y_{i-1} = \varphi(x_{i-1}) = a_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (21)$$

$$y_i = \varphi(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \quad h_i = x_i - x_{i-1}. \quad (22)$$

Число этих уравнений вдвое меньше числа неизвестных коэффи-

циентов, поэтому для определенности задачи нужны дополнительные условия. Для их получения вычислим первую и вторую производные многочлена (20):

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \\ \varphi''(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \text{ при } x_{i-1} \leq x \leq x_i,\end{aligned}$$

и потребуем непрерывности этих производных (т. е. гладкости линейки) во всех точках, включая узлы. Приравнявая во внутреннем узле x_i правые и левые пределы производных, получим

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (23)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (24)$$

Недостающие два условия обычно получают из естественного предположения о нулевой кривизне графика на концах:

$$1/2\varphi''(x_0) = c_1 = 0, \quad 1/2\varphi''(x_N) = c_N + 3d_N h_N = 0, \quad (25)$$

что соответствует свободно отпущенным концам линейки. Но если есть дополнительные сведения об асимптотике функции, то можно записать другие краевые условия.

Уравнения (21) — (25) образуют систему линейных уравнений для определения $4N$ неизвестных коэффициентов. Эту систему можно решить методом исключений Гаусса, описанным в главе V. Но гораздо выгоднее сначала привести ее к специальному виду. Уравнение (21) сразу дает нам все коэффициенты a_i . Из уравнений (24) и (25) следует

$$\begin{aligned}d_i &= (c_{i+1} - c_i)/3h_i \text{ при } 1 \leq i \leq N-1, \\ d_N &= -c_N/3h_N.\end{aligned} \quad (26)$$

Подставим соотношение (26) в (22), одновременно исключая оттуда $a_i = y_{i-1}$; тогда получим

$$\begin{aligned}b_i &= [(y_i - y_{i-1})/h_i] - 1/3h_i(c_{i+1} + 2c_i), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ b_N &= [(y_N - y_{N-1})/h_N] - 2/3h_N c_N.\end{aligned} \quad (27)$$

Исключим теперь из (23) величины b_i и b_{i+1} при помощи (27), соответственно увеличивая во втором случае индекс на единицу, а величину d_i — на основании (26). Останется система линейных уравнений для коэффициентов c_i , легко приводящаяся к следующему виду:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} &= \\ &= 3[(y_i - y_{i-1})/h_i - (y_{i-1} - y_{i-2})/h_{i-1}] \text{ при } 2 \leq i \leq N, \\ c_{N+1} &= 0.\end{aligned} \quad (28)$$

Матрица этой системы трехдиагональна, т. е. ненулевыми в ней являются только элементы главной диагонали и двух соседних. Такие системы экономно решаются методом прогонки, изложенным в главе V. После нахождения коэффициентов c_i остальные коэффициенты нетрудно вычислить по формулам (21), (26) и (27).

Можно рассмотреть более общую задачу интерполяции функции *сплайном* — многочленом n -й степени:

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_{ik} x^k, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

коэффициенты которого кусочно-постоянны и который в узлах интерполяции принимает заданные значения и непрерывен вместе со своими $n-1$ производными. При нечетной степени многочлена $n=2p-1$ можно рассматривать сплайновую интерполяцию как решение задачи лагранжевой интерполяции при дополнительном условии

$$\int_a^b [S^{(p)}(x)]^2 dx = \min.$$

Из этого условия следует уравнение $S^{(2p)}(x) = 0$ для интерполирующей функции, условия непрерывности $2p-2$ производных во внутренних узлах и естественные ограничения на производные в крайних узлах.

На практике употребительны два случая. Один — подробно рассмотренный здесь случай $n=3$. Второй — $n=1$, когда сплайн совпадает с многочленом Ньютона первой степени и соответствует аппроксимации графика ломаной, построенной по узлам; определение коэффициентов при этом очевидно.

Сплайновая интерполяция напоминает лагранжеву тем, что она требует знания в узлах только значений функции, но не ее производных. По области применения она занимает промежуточное положение между линейной и нелинейной лагранжевой интерполяцией. Ее целесообразно применять тогда, когда сетка недостаточно подробна для интерполяции многочленом Ньютона, но еще не настолько редка, чтобы необходимо было прибегать к нелинейной интерполяции. Если функция так же резко меняется за один шаг сетки, как в таблице 5, то сплайновая интерполяция не гарантирует хорошей точности.

Наиболее успешно применяют сплайновые интерполяции при разностном решении краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных с гладкими коэффициентами.

10. Монотонная интерполяция. Монотонность — важное свойство функций. Например, возьмем таблицы синусов с шагом аргумента 1° ; тогда на каждые 89 интервалов, в которых функция будет монотонна, придется всего 1 интервал, содержащий экстремум. Поэтому при интерполяции нередко желательно сохранять монотонность функций.

Если интерполяционная функция $\varphi(x; a)$ монотонна по x , то интерполяция будет монотонной. Классический пример — двухточечная интерполяция многочленом Ньютона $\mathcal{P}_1(x) = a_0 + a_1x$. Другим примером может служить двухточечная квазилинейная интерполяция (19). Очевидно, если интерполяция квазилинейная двухточечная, а преобразования $\eta(y)$, $\xi(x)$ монотонны, то интерполяция будет монотонной.

При трехточечной интерполяции монотонность может нарушиться. В таблице 5 (п. 8) функция, по-видимому, монотонна. Но если использовать многочлен Ньютона с тремя узлами, т. е. оставить в формуле Ньютона только три члена, то получим $y(1/2) \approx -6,5$, что нарушает монотонность. Очевидно, это результат использования немонотонной интерполяционной функции — параболы $\mathcal{P}_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Двухточечная интерполяция имеет погрешность $O(h^2)$, и ее точность не всегда достаточна; а увеличение числа узлов может внести немонотонность. Конечно, если интерполяционный ряд Ньютона (8) хорошо сходится, а монотонность все-таки нарушена, то это означает, что функция на самом деле немонотонна. Но нередко мы вынуждены ограничиваться заданным в формуле (или программе для ЭВМ) числом узлов. Если при этом надо сохранить монотонность, то можно поступать следующим образом.

Найдем такие соседние точки сетки, чтобы выполнялось $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Проведем вычисления по заданной многоточечной интерполяционной формуле и получим $y^* = \varphi(x)$. Если это значение лежит между значениями y_i, y_{i+1} , то считаем ответ правильным. Если оно выходит за пределы интервала, определяемого значениями y_i, y_{i+1} , то вместо y^* в качестве ответа берем ближайшее из этих двух значений, т. е. полагаем

$$\begin{aligned} y(x) &= y^* = \varphi(x) && \text{при } \min(y_i, y_{i+1}) \leq y^* \leq \max(y_i, y_{i+1}), \\ y(x) &= \min(y_i, y_{i+1}) && \text{при } y^* < \min(y_i, y_{i+1}), \\ y(x) &= \max(y_i, y_{i+1}) && \text{при } y^* > \max(y_i, y_{i+1}). \end{aligned} \quad (29)$$

Эта монотонная интерполяция бывает полезна, например, при составлении разностных схем для уравнений в частных производных (глава X, § 1, п. 6).

11. Многомерная интерполяция. Двумерные таблицы широко распространены в физике и технике; например, таковыми являются таблицы термодинамических функций газов, где независимыми переменными обычно являются температура и плотность. Трехмерные таблицы составляют и используют значительно реже, но не потому, что таких зависимостей нет, а потому, что таблицы слишком громоздки. Четырехмерных таблиц практически нет, хотя в физике немало задач с большим числом параметров; так, проводимость плазмы $\sigma(T, \rho, E, H)$ зависит от ее температуры и плотности, и напряженностей электрического (если сказываются нелинейные эффекты) и магнитного полей.

Отметим некоторые существенные стороны многомерной интерполяции. Для простоты ограничимся двумерными таблицами $z(x, y)$; обобщить все результаты на большее число измерений нетрудно.

1) Чтобы объем таблиц был приемлем, приходится шаги по аргументам брать довольно большими. Это предъявляет жесткие требования к способу интерполяции. Часто приходится пользоваться методом выравнивания, т. е. подбирать замену перемен-

ных $\zeta(z)$, $\xi(x)$, $\eta(y)$, преобразующую описываемую функцией поверхность в плоскость.

Например, законы зависимости давления горячих газов от температуры и плотности $P(T, \rho)$ близки к степенным. Поэтому при составлении таблиц свойств газов выгодно табулировать $\zeta = \lg P$ при аргументах $\xi = \lg T$, $\eta = \lg \rho$ и сетки по новым аргументам брать равномерными (к сожалению, физики редко это делают). Сходные закономерности справедливы для других термодинамических функций, коэффициентов теплопроводности и электропроводности и еще многих свойств веществ.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выравнивающие переменные уже подобраны, и таблицы составлены в новых переменных. Тогда в качестве интерполирующей функции можно использовать многочлен невысокой степени.

2) Не любое число узлов интерполяции выгодно. Если для одной переменной степень многочлена была взаимно однозначно связана с числом узлов; то для двух переменных многочлен n -ой степени $\mathcal{P}_n(x, y) = \sum_{k+m=n} a_{km} x^k y^m$ имеет $(n+1)(n+2)/2$ узлов.

Если число узлов не соответствует этой формуле, то часть коэффициентов при высших степенях должна задаваться принудительно (в частности, нулями); для выбора этих коэффициентов редко есть разумные основания.

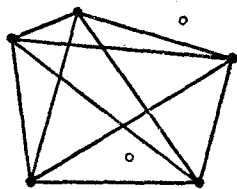


Рис. 7.

3) В многомерном случае иначе определяется понятие экстраполяции. Возьмем узлы интерполяции и соединим их попарно прямыми (в случае большего числа измерений — гиперплоскостями). Крайние отрезки ограничивают выпуклую область (рис. 7).

Если искомая точка попадает в эту область, то имеет место интерполяция; если не попадает, то экстраполяция.

4) Не всякое расположение узлов допустимо. В одномерном случае узлы не должны были совпадать. Теперь же для интерполяции многочленом $\mathcal{P}_1(x, y)$ необходимо, чтобы узлы не лежали на одной прямой в плоскости (x, y) . В самом деле, система трех уравнений $a + bx_i + cy_i = z_i$ имеет определитель

$$\Delta(r_1, r_2, r_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2), \quad (30)$$

который обращается в нуль, если узлы лежат на одной прямой. При интерполяции многочленом $\mathcal{P}_2(x, y)$ требуется, чтобы узлы не лежали на кривой второго порядка и т. д.

Такие условия, а также условие отсутствия экстраполяции проверять в общем случае сложно. Поэтому для хорошей интерполяции сетка должна быть регулярно построенной, а не представлять собой совокупность беспорядочно расположенных точек; узлы из нее следует выбирать определенным образом. В дальнейшем ограничимся наиболее удобной прямоугольной сеткой (рис. 8, 9); желательно, чтобы она была равномерной.

На прямоугольной сетке удобна *последовательная* интерполяция. Пусть заданы $z_{ij} = z(x_i, y_j)$ и требуется найти $z(x, y)$. Выберем на сетке прямоугольник из km узлов, в который попадает искомая точка (рис. 8). Сначала проведем лагранжеву интерполяцию по строкам, т. е. при каждом фиксированном j_0 найдем значение $z(x, y_{j_0})$ по значениям z_{j_0} . Затем проведем лаг-

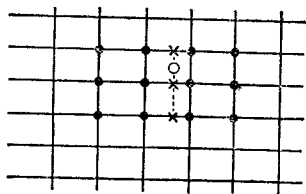


Рис. 8.

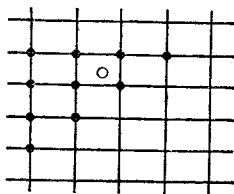


Рис. 9.

ранжеву интерполяцию по столбцу, т. е. по значениям $z(x, y_j)$ найдем искомое значение $z(x, y)$.

Последовательная интерполяция имеет ряд преимуществ. Она позволяет брать по каждой переменной свое число узлов. Легко написать ее общую формулу, аналогичную одномерной формуле Лагранжа:

$$\mathcal{P}_{km}(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m z_{ij} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^m \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_p-x_i)(y_q-y_j)}, \quad (31)$$

хотя вычисления удобнее производить, последовательно применяя одномерные формулы Ньютона. Формулу (31) можно обобщить, используя для каждого аргумента свою квазилинейную интерполяцию, т. е. по строкам делая замену $\xi(x)$, $\zeta_1(z)$, а по столбцам — $\eta(y)$, $\zeta_2(z)$; такие выравнивающие замены подобрать проще, чем единую замену. Однако последовательная интерполяция завышает степень интерполирующего многочлена; например, если по обоим направлениям берется двухточечная интерполяция, т. е. многочлен первой степени, то результирующий многочлен будет квадратичным многочленом вида $\mathcal{P}_{2,2}(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$.

Многочлен минимальной степени получается при *треугольной* интерполяции. Если взять треугольную конфигурацию узлов

интерполяции, изображенную на рис. 9 или повернутую на угол, кратный 90° , то число узлов будет равно $(n+1)(n+2)/2$. Это число однозначно определяет многочлен n -й степени, который удобно записать в форме Ньютона, вводя разделенные разности функции двух переменных:

$$\begin{aligned} z(x_0, x_1; y) &= [z(x_0, y) - z(x_1, y)]/(x_0 - x_1), \\ z(x; y_0, y_1) &= [z(x, y_0) - z(x, y_1)]/(y_0 - y_1) \end{aligned} \quad (32)$$

и т. д. Такими же рассуждениями, как в одномерном случае, можно показать, что интерполяционный многочлен лагранжева типа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x, y) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} z(x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j) \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q). \end{aligned} \quad (33)$$

В одномерном случае переменная y и индексы j, q исчезают, так что формула (33) переходит в обычную формулу Ньютона.

Многомерная интерполяция настолько громоздка, что обычно используется только многочлен первой или второй степени; читателям предлагается записать формулы (31) — (33) для этих случаев. Многочлены более высоких степеней используются много реже. По той же причине интерполяция эрмитова типа для многих переменных практически не употребляется. Сплайновая интерполяция используется в основном при разностном решении уравнений в частных производных.

Иногда мы вынуждены работать с функцией, заданной на нерегулярной сетке (например, с функцией, измеренной экспериментально). Тогда обычно ограничиваются интерполяционным многочленом первой степени; его коэффициенты находят по трем выбранным узлам, приравнивая в них многочлен табличным значениям функции:

$$\begin{aligned} z &\approx a + bx + cy, \\ z_i &= a + bx_i + cy_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (34)$$

Вычислять коэффициенты a, b, c на самом деле не нужно. Заметим, что равенства (34) означают, что столбец $\{z, z_1, z_2, z_3\}$ есть линейная комбинация трех столбцов, стоящих в правой части при коэффициентах. Следовательно, составленный из всех четырех столбцов определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} z & 1 & x & y \\ z_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ z_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель по первому столбцу и вспоминая формулу (30), получим следующее выражение для интерполяционного многочлена:

$$z = [z_1 \Delta(r, r_2, r_3) + z_2 \Delta(r_1, r, r_3) + z_3 \Delta(r_1, r_2, r)] / \Delta(r_1, r_2, r_3). \quad (35)$$

Эту процедуру вывода формулы нетрудно обобщить на многочлен любой степени при произвольном расположении узлов, но сами формулы для многочленов высокой степени получаются громоздкими и неудобными для вычислений.

§ 2. Среднеквадратичное приближение

1. Наилучшее приближение. Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию $y(x)$. Однако точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. Нам же всегда желательно иметь единую приближенную формулу $y \approx \varphi(x)$, пригодную для большого отрезка $a \leq x \leq b$. Поэтому далее будем сравнивать заданную и аппроксимирующую функции на большом отрезке.

При интерполяции мы приравниваем значения $y(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах. Если $y(x_i)$ определены неточно — например, из эксперимента, — то точное приравнивание неразумно. Поэтому нередко целесообразней приближать функцию не по точкам, а в среднем, т. е. в норме L_p .

Пусть заданы функция $y(x)$ и множество функций $\varphi(x)$, принадлежащие линейному нормированному пространству функций. Нас интересуют две задачи. Первая — аппроксимация с заданной точностью: по заданному ε найти такую $\varphi(x)$, чтобы выполнялось неравенство $\|y(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$. Второе — нахождение *наилучшего приближения*, т. е. функции $\bar{\varphi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|y(x) - \bar{\varphi}(x)\| = \inf \|y(x) - \varphi(x)\| = \nu. \quad (36)$$

Существует ли наилучшее приближение и единственно ли оно (для данных функции и множества)? Это имеет место не при любом выборе пространства и множества. Например, в пространстве L_1 , $-1 \leq x \leq +1$, выберем функцию $y(x) = 1$ и множество $\varphi(x) = cx$; тогда

$$\|y - \varphi\|_{L_1} = \int_{-1}^{+1} |1 - cx| dx = \begin{cases} 2 & \text{при } |c| \leq 1, \\ \frac{c^2 + 1}{|c|} > 2 & \text{при } |c| > 1. \end{cases}$$

В самом деле, при $|c| \leq 1$ эта норма равна площади заштрихованной трапеции на рис. 10, а, т. е. двум. При $|c| > 1$ эта

норма, согласно рис. 10, б, равна площади заштрихованной трапеции (которая опять равна двум) плюс площади заштрихованных треугольников. Значит, для любого c , по модулю меньшего единицы, $\varphi = cx$ минимизирует норму отклонения, т. е. наилучшее приближение здесь существует, но оно не единственно.

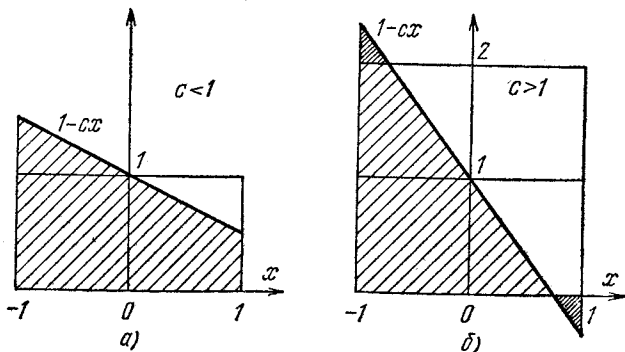


Рис. 10.

Выведем достаточное условие существования наилучшего приближения. Пусть в линейном пространстве функций выбрано множество, образованное функциями вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (37)$$

где функции $\varphi_k(x)$ можно считать линейно-независимыми. Это множество есть линейное подпространство нашего пространства. Изменим один из коэффициентов суммы (37) на величину δa_k ; из неравенства треугольника (1.3) следует

$$\|y - (\varphi + \delta\varphi)\| - \|y - \varphi\| \leq \|\delta\varphi\| = |\delta a_k| \cdot \|\varphi_k\|,$$

т. е. норма $\|y - \varphi\|$ непрерывно зависит от a_k . Очевидно, $\|\varphi\|$ также есть непрерывная функция коэффициентов a_k .

Рассмотрим нормы как функции координат a_k . Сфера

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$$

есть замкнутое ограниченное множество, поэтому $\|\varphi\|$ на этой сфере имеет точную нижнюю грань μ и в силу непрерывности достигает ее при некотором $\tilde{\varphi}(x)$. Очевидно, $\mu > 0$; в противном случае $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости $\varphi_k(x)$.

Возьмем шар $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq R^2 = |v + \|y\| + \varepsilon|^2 / \mu^2$, где ε — какое-то

положительное число. В силу однородности нормы функции вне этого шара $\|\varphi\| \geq \mu R = v + \|y\| + \varepsilon$ и, следовательно, $\|y - \varphi\| \geq \|\varphi\| - \|y\| \geq v + \varepsilon$. Значит, вне этого шара норма погрешности заведомо далека от нижней грани. Только внутри шара $y(x)$ и $\varphi(x)$ достаточно близки по норме. Но шар — ограниченное и замкнутое множество значений координат a_k , поэтому непрерывная функция координат $\|y - \varphi\|$ достигает на нем точной нижней грани.

Следовательно, в любом линейном нормированном пространстве при линейной аппроксимации (37) наилучшее приближение существует, хотя не во всяком линейном пространстве оно единственно.

На практике используются пространства L_2 и C . В этом параграфе рассмотрим приближения в пространстве L_2 , т. е. среднеквадратичную аппроксимацию.

2. Линейная аппроксимация. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\rho)$ действительных функций, интегрируемых с квадратом с весом $\rho(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Норма в нем равна $\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f, f)}$, где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi(x) dx.$$

Физический смысл весовой функции будет пояснен в п. 4. Выберем в качестве аппроксимирующей функции линейную комбинацию (37). Подставляя ее в условие наилучшего приближения (36), получим

$$\|y - \varphi\|_{L_2}^2 = (y, y) - 2 \sum_{k=1}^n a_k (y, \varphi_k) + \sum_{k, m=1}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = \min.$$

Приравнивая нулю производные по коэффициентам, получим систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_m = (y, \varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (38)$$

Ее определитель есть определитель Грама функций $\varphi_k(x)$; поскольку функции линейно-независимы, он отличен от нуля. Следовательно, *наилучшее среднеквадратичное приближение существует и единственно*. Для его вычисления необходимо решить систему линейных уравнений (38).

Линейно-независимую систему функций можно ортогонализировать. Пусть $\varphi_k(x)$ уже образуют ортонормированную систему,

т. е. $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$; тогда формулы (38) резко упрощаются и становятся удобными для вычислений

$$a_k = (\varphi_k, y) = \int_a^b \rho(x) y(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{при} \quad (\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}. \quad (39)$$

Это коэффициенты Фурье, так что *наилучшее приближение есть отрезок обобщенного ряда Фурье.*

Если функции $\varphi_k(x)$ образуют полную ортонормированную систему, то в силу равенства Парсеваля

$$\|y - \varphi\|_{L_2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2.$$

Значит, при $n \rightarrow \infty$ норма погрешности неограниченно убывает, т. е. наилучшее приближение среднеквадратично сходится к $y(x)$, и возможна аппроксимация с любой точностью.

Отметим, что если $\varphi_k(x)$ не ортогональны, то при $n \rightarrow \infty$ определитель Грама обычно быстро стремится к нулю, система (38) становится плохо обусловленной, т. е. ее решение связано с большой потерей точности (см. главу V), и больше 5—6 членов суммы (37) брать нецелесообразно. Численная ортогонализация базиса при этом тоже приводит к большой потере точности. Поэтому если нужно большое число членов, то надо или проводить ортогонализацию точно (аналитически), или пользоваться готовыми системами ортогональных функций.

При интерполяции мы обычно полагали $\varphi_k(x) = x^k$. Для среднеквадратичной аппроксимации удобнее в качестве $\varphi_k(x)$ брать многочлены, ортогональные с заданным весом. Наиболее употребительны из них многочлены Якоби (частным случаем которых являются многочлены Лежандра и Чебышева), Лагерра и Эрмита. Для аппроксимации периодических функций используют тригонометрический ряд; он соответствует $\rho(x) = 1$. Сводка формул для ортогональных полиномов приведена в Приложении.

Все перечисленные выше системы функций полные, так что наилучшие приближения по ним среднеквадратично сходятся при $n \rightarrow \infty$, если $y(x)$ интегрируема с квадратом с заданным весом. При более сильных ограничениях имеет место сходимостъ во всех точках и даже равномерная сходимостъ. Приведем без доказательства некоторые результаты.

а) Ряд по многочленам Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ сходится к непрерывной функции $y(x)$ равномерно на $[-1, +1]$, если существует непрерывная $y^{(p)}(x)$ при некотором $p \geq 2 + 2 \max(\alpha, \beta)$ и если $\max(\alpha, \beta) \geq -1/2$. В частности, для многочленов Чебышева первого рода достаточно $p=1$, а для многочленов Чебышева второго рода $p=3$. Для многочленов Лежандра доказан более сильный результат: ряд сходится равномерно, если существует ограниченная $y'(x)$.

б) Если функция $y(x)$ кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая на $[0, \infty)$ и существует

$$\int_0^{\infty} e^{-x/2} x^{(2\alpha-1)/4} |y(x)| dx,$$

то ряд по многочленам Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ сходится к функции в точках ее непрерывности и к полусумме односторонних пределов $^{1/2}(y_+ + y_-)$ в точках разрыва. Эта сходимость, вообще говоря, не равномерная.

в) Если функция $y(x)$ кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая на $(-\infty, +\infty)$ и существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} y^2(x) |x| dx,$$

то ряд по многочленам Эрмита $H_n(x)$ сходится так же, как в предыдущем абзаце.

г) Если $y(x)$ периодическая и непрерывная, причем ее модуль непрерывности удовлетворяет условию $\omega(\delta) \leq C\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то ее тригонометрический ряд Фурье равномерно сходится к ней на всем периоде (признак Липшица); в частности, это условие выполняется для функции с ограниченной производной. Если функция имеет ограниченную p -ю производную $|y^{(p)}(x)| \leq M_p$, а все младшие производные непрерывны, то для погрешности тригонометрического ряда Фурье и величин отдельных коэффициентов справедливы оценки

$$|R_n(x)| < AM_n \frac{\ln n}{n^p}, \quad a_k = O(k^{-(p+1)}),$$

где A — константа. Видно, что при больших p ряд сходится быстро. Но если $y(x)$ кусочно-непрерывна, то сколько бы ни было у нее кусочно-непрерывных и ограниченных производных, ее коэффициенты Фурье убывают не быстрее $a_k = O(1/k)$, и ряд сходится медленно (или даже расходится).

Замечание 1. Сходимость не во всех рассмотренных случаях была равномерной. Более того, не существует такого веса $\rho(x)$, чтобы любая непрерывная функция $y(x)$ разлагалась в равномерно сходящийся ряд по полиномам, ортогональным с этим весом. Дю Буа-Реймондом и Л. Фейером были построены примеры периодических непрерывных функций, у которых тригонометрический ряд Фурье в отдельных точках расходится.

Замечание 2. Сходимость среднеквадратичного приближения тем лучше, чем меньше у функции $y(x)$ особенностей — разрывов ее самой или ее производных. Если можно выделить основные особенности в виде несложной функции $y_0(x)$ и аппроксимировать разность $y(x) - y_0(x)$, точность аппроксимации существенно улучшается.

Например, периодически продолжим функцию, изображенную сплошной линией на рис. 11, и аппроксимируем ее тригонометрическим рядом Фурье. Этот ряд сходится в каждой точке, но неравномерно, ибо периодическое продолжение $y(x)$ разрывно. Если же мы положим $y_0(x) = x$, то функция $y(x) - y_0(x)$, изображенная пунктиром на рис. 11, имеет непрерывное периодическое продолжение, и ее ряд Фурье сходится к ней равномерно. Скорость сходимости ряда при этом также возрастает.

Замечание 3. Алгебраический многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ наилучшего среднеквадратичного приближения обладает свойством, напоминающим лагранжеву интерполяцию: разность $y(x) - P_n(x)$ на интервале (a, b) имеет не менее $n+1$ нуля. В самом

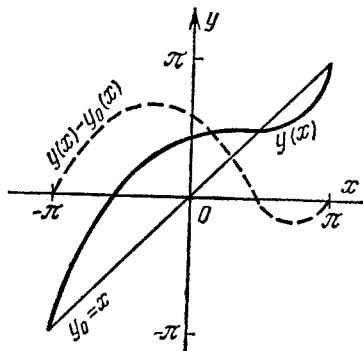


Рис. 11.

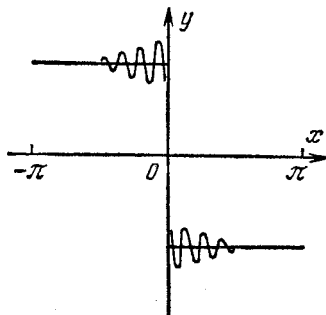


Рис. 12.

деле, предположим обратное: нули этой разности суть x_j , где $j = 1, 2, \dots, m \leq n$. Составим многочлен

$$Q_m(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j) \equiv \sum_{k=0}^m b_k x^k;$$

тогда произведение $[y(x) - P_n(x)] Q_m(x)$ не меняет знак, следовательно,

$$\int_a^b \rho(x) [y(x) - P_n(x)] Q_m(x) dx = \sum_{l=0}^m b_l [(x^l, y) - \sum_{k=0}^n (x^l, x^k) a_k] \neq 0.$$

Но если в (38) положить $\varphi_k(x) = x^k$, то квадратные скобки в сумме должны обратиться в нуль. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

3. Суммирование рядов Фурье. Нахождение наилучшего приближения приводит к суммированию рядов. Казалось бы, просуммировать ряд нетрудно. Но, во-первых, он далеко не всегда сходится равномерно, даже при наличии сходимости в каждой точке. Так, если $y(x) = 1$ на первой половине периода и $y(x) = 0$ на второй, то максимум частной суммы тригонометрического ряда Фурье стремится к 1,09 при $n \rightarrow \infty$ (явление Гиббса, рис. 12), хотя в любой точке, кроме точки разрыва, этот ряд сходится к функции.

Во-вторых, если надо суммировать много членов ряда, то происходит большое накопление погрешности входных данных и даже погрешности округления. Например, ряд Тейлора для $y(x) = \sin x$ сходится при любых значениях аргумента. Вычислим $\sin 2550^\circ$, используя ЭВМ с 16 значащими цифрами и прекращая вычисления, когда очередной член ряда будет менее 10^{-8} . Получим бессмысленный ответ: $\sin 2550^\circ = 29,5!$

Причина состоит в том, что вычисления с заданным количеством цифр эквивалентны внесению погрешности в коэффициенты ряда. Погрешности вносятся и в том случае, если находить коэффициенты по формулам (39) не аналитически, а численно. А бесконечные ряды, вообще говоря, неустойчивы по отношению к погрешности коэффициентов. В самом деле, изменим все коэффициенты a_k ряда Фурье на малые величины $\varepsilon \varphi_k(\xi)$; тогда сумма ряда изменится на

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \varphi_k(x) \varphi_k(\xi) = \varepsilon \delta(x - \xi),$$

т. е. при $x = \xi$ изменение суммы бесконечно велико. Таким образом, суммирование бесконечного ряда Фурье является некорректной задачей, и требуется какая-то регуляризация суммирования.

Регуляризация по числу членов. Простейшей регуляризацией является использование небольшого отрезка ряда

$$\varphi(x; N) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k \varphi_k(x),$$

где верхний предел суммирования есть функция ошибок ε отдельных коэффициентов. Чем меньше ε , тем больше допустимое $N(\varepsilon)$.

Оценим оптимальное число членов для тригонометрического ряда Фурье. Ошибка из-за отбрасывания далеких членов ряда равна

$$\delta_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

а ошибка из-за погрешности коэффициентов составляет

$$\delta_2 = \sum_{k=1}^N \delta a_k \varphi_k(x).$$

При увеличении N на единицу первая ошибка убывает на величину $a_{N+1} \varphi_{N+1}(x)$, а вторая возрастает на $\delta a_{N+1} \varphi_{N+1}(x)$. Очевидно, при малых N коэффициенты a_N велики, и преобладает убывание первой ошибки, а при достаточно больших N преобладает возрастание второй. Оптимальной является ситуация, когда

скорости изменения этих ошибок равны, т. е. при $a_{N+1} \approx \delta a_{N+1}$. Получается естественный вывод: *надо суммировать только те члены ряда, коэффициенты a_k которых превышают уровень ошибки δa_k* . Суммирование следующих членов ряда только ухудшает точность и может привести к бессмысленному результату, как видно из примера с вычислением $\sin 2550^\circ$ (в котором роль ошибок коэффициентов играют погрешности округления при вычислении максимальных членов суммы).

Ранее отмечалось, что если $y(x)$ имеет ограниченную p -ю производную, то $a_N = O(N^{-(p+1)})$. Отсюда следует, что по порядку величины оптимальное число членов $N = O(\delta a^{-1/(p+1)})$, а достигаемая при этом погрешность $\delta_1 + \delta_2 = O(\delta a^{p/(p+1)})$. Для достаточно гладких функций оптимальное число членов оказывается небольшим и при уменьшении δa растет, но довольно медленно. Достигаемая точность тем выше, чем более высокие производные имеет функция.

Регуляризация форм-фактором. Описанный способ напоминает обрезание шумов в радиотехнике. Но подавлять шумы можно и с помощью форм-фактора, лишь ослабляющего высокие частоты. Для этого каждый член ряда (37) делят на соответственно подобранную величину $1 + b_k$ и суммируют достаточно большое число членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) / (1 + b_k), \quad b_k \geq 0,$$

где при малых номерах $b_k \approx 0$, а при больших номерах они достаточно быстро возрастают, причем $b_k \rightarrow \infty$. Регуляризация по числу членов означает, что выбрано $b_k = 0$ при $k \leq N$ и $b_k = \infty$ при $k > N$. Естественный способ выбора регуляризирующих множителей предложил А. Н. Тихонов [44], показавший, что если ортогональная система $\varphi_k(x)$ есть система собственных функций задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - [\lambda + q(x)] \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0,$$

то сумму обобщенного ряда Фурье следует заменить на

$$\varphi(x; \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \alpha \lambda_k} \varphi_k(x), \quad \alpha > 0. \quad (40)$$

Поскольку собственные значения λ_k положительны и быстро растут при $k \rightarrow \infty$, то ошибки на высоких частотах хорошо подавляются. В главе XIV, § 2 будет показано, что суммирование ряда (40) устойчиво, а сумма $\varphi(x; \alpha)$ равномерно сходится

к $y(x)$ при $\epsilon = \max |\delta a_k| \rightarrow 0$, если параметр $\alpha \rightarrow 0$ по определенному закону. Там же будет рассмотрен выбор параметра регуляризации α ; сейчас отметим, что оптимальное $\bar{\alpha} = \alpha(\epsilon)$ монотонно стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

Попытки улучшить сходимость тригонометрических рядов Фурье предпринимались давно. В методе Фейера рассматриваются частные суммы ряда Фурье:

$$\varphi(x; n) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

и составляется функция

$$\psi(x; N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(x; n).$$

Эта функция при $N \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $y(x)$, если последняя непрерывна. Скорость сходимости невелика; если ограничиться небольшим числом членов, то все резкие колебания функции будут сильно сглажены. Реально для хорошей передачи одного резкого скачка надо взять около 20 гармоник, а 10 гармоник дают невысокую точность.

Более быструю сходимость и меньшее сглаживание функции дает метод σ -множителей Ланцоша. В нем частная сумма $\varphi(x; n)$ осредняется по отрезку $x \pm \pi/(2n)$, т. е. по одному полупериоду наивысшей гармоники. Это приводит к умножению каждого члена частной суммы на $\sigma_k = (2\pi/(\pi k)) \sin(\pi k/(2n))$. Метод Ланцоша позволяет даже почленно дифференцировать ряд Фурье, причем выполнение всех выкладок приводит к несложной формуле

$$\bar{\varphi}'(x; n) = \frac{n}{2\pi} \left[\bar{\varphi}\left(x + \frac{\pi}{n}; n\right) - \bar{\varphi}\left(x - \frac{\pi}{n}; n\right) \right].$$

На метод Ланцоша похож метод С. Н. Бернштейна, в котором полагают

$$\psi(x; n) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x; n) + \varphi\left(x + \frac{2\pi}{2n+1}; n\right) \right].$$

Это обеспечивает равномерную сходимость для любой непрерывной функции $y(x)$.

Однако последние три метода не слишком точны, и область их применимости узка; поэтому с появлением регуляризации по А. Н. Тихонову их почти перестали употреблять.

4. Метод наименьших квадратов. Если вещественные функции заданы таблично, т. е. на конечном множестве точек, то их скалярное произведение определяется формулой

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^N \rho_i f(x_i) \varphi(x_i), \quad \rho_i > 0, \quad (41)$$

где N — полное число узлов таблицы. Тогда условие наилучшего среднеквадратичного приближения примет вид

$$\delta_{\varphi}^2 \sum_{i=1}^N \rho_i \equiv \sum_{i=1}^N \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \min. \quad (42)$$

Выберем линейную аппроксимацию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

с числом членов $n \leq N$. Тогда коэффициенты аппроксимации находятся из уравнений (38), где скалярные произведения надо брать согласно (41); эти уравнения можно получить и непосредственно, подставляя обобщенный многочлен в (42) и приравнявая нулю производные по коэффициентам. Описанный способ нахождения аппроксимации называется *методом наименьших квадратов*.

Метод наименьших квадратов широко используют для обработки экспериментальных кривых, точки которых измерены с заметной погрешностью ε . В этом случае весу ρ_i придают смысл точности измерения данной точки: чем выше точность, тем большее значение веса приписывают точке*). Аппроксимирующая кривая будет проходить ближе к точкам с большим весом. Сходные соображения используют в математической постановке задачи: выбирают весовую функцию $\rho(x)$ большой при тех значениях аргумента, где нужно получить более высокую локальную точность аппроксимации.

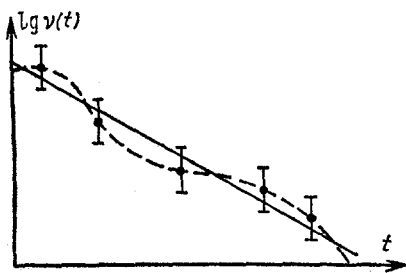


Рис. 13.

Если число коэффициентов аппроксимации n взять равным числу узлов N , то среднеквадратичная аппроксимация совпадет с лагранжевой интерполяцией. Очевидно, при наличии значительных ошибок эксперимента интерполяция неразумна. Это хорошо видно из рис. 13, показывающего описание измерений радиоактивного распада в выравнивающих переменных интерполяционным многочленом (пунктир) и прямой, найденной методом наименьших квадратов. Поскольку при $n \approx N$ среднеквадратичная аппроксимация близка к интерполяции, то хорошее сглаживание ошибок эксперимента будет при $n \ll N$; но если n слишком мало, то для описания сложной кривой коэффициентов может не хватить. Должно существовать какое-то оптимальное число коэффициентов; оно зависит от функции $y(x)$, числа узлов N , их расположения, весов и от выбранной системы $\varphi_k(x)$.

Оптимальное число коэффициентов определяют следующим образом. Выбирают некоторое n , находят из условия (42) соот-

*) Обычно полагают $\rho_i = \varepsilon_i^{-2}$.

ветствующие коэффициенты $a_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq n$, вычисляют полученное при этом среднеквадратичное отклонение δ_n и сравнивают его с известной погрешностью эксперимента. Если $\delta_n \gg \varepsilon$, т. е. математическая погрешность аппроксимации много больше физической погрешности исходных данных, то число коэффициентов недостаточно для описания $y(x)$, и надо увеличить n . Если $\delta_n \ll \varepsilon$, то старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны, и надо уменьшить n . Если $\delta_n \approx \varepsilon$, то число коэффициентов оптимально.

Обычно начинают расчет с $n=1$, когда наверняка $\delta_1 \ll \varepsilon$, и увеличивают число коэффициентов до тех пор, пока не выполнится условие $\delta_n \approx \varepsilon$. Если при этом $n \ll N$, то вид аппроксимирующей функции выбран удачно. Если же $n_{\text{опт}} \sim N$, то следует поискать более подходящий вид аппроксимирующей функции.

Описанная процедура напоминает регуляризацию суммирования ряда Фурье по числу членов. Сглаживать экспериментальные кривые можно и регуляризацией по А. Н. Тихонову (см. главу XIV, § 2); при таком сглаживании не требуется предположений о виде аппроксимирующей функции, но она успешно выполняется только при довольно большом числе узлов N . При очень малом N нахождение оптимального числа коэффициентов становится трудной задачей; требуется очень удачно подобрать вид $\varphi(x)$, а для определения достоверности результатов необходимо привлечь аппарат статистики (см. главу XV).

Отметим некоторые употребительные частные случаи метода наименьших квадратов.

Первый — полиномиальная аппроксимация, когда $\varphi_k(x) = x^k$ при $0 \leq k \leq n$. Система (38) принимает при этом вид

$$\sum_{k=0}^n (x^m, x^k) a_k = (y, x^m), \quad 0 \leq m \leq n, \quad (43)$$

$$(x^m, x^k) = \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{m+k}, \quad (y, x^m) = \sum_{i=1}^N \rho_i y_i x_i^m.$$

Поскольку степени на любом отрезке образуют чебышевскую систему, то определитель Грама отличен от нуля и задача (43) имеет единственное решение. Но система степеней не ортогональна, и при больших значениях n задача (43) плохо обусловлена. Можно обойти эту трудность, строя и используя многочлены, ортогональные с заданным весом на заданной системе точек; но к этому прибегают только в задачах, связанных с особенно тщательной статистической обработкой эксперимента. Обычно же ограничиваются небольшими степенями $n \approx 2 \div 5$, когда обусловленность задачи (43) удовлетворительна.

Второй случай — типичная радиотехническая задача о тригонометрической аппроксимации периодического сигнала, измеренного через равные доли периода, т. е. на равномерной сетке

$x_p = 2\pi p / N$, где $0 \leq p \leq N - 1$. Вес в этом случае можно считать постоянным $\rho_p = 1$. Система комплексных функций $\varphi_k(x) = \exp(ikx)$ ортогональна с неединичной нормой на этой сетке; в самом деле, их скалярное произведение равно

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \sum_{p=0}^{N-1} \varphi_n^*(x_p) \varphi_m(x_p) = \sum_{p=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(m-n)p\right] = N\delta_{nm}.$$

Поэтому коэффициенты аппроксимации можно находить по формулам (39) при условии введения нормирующего множителя, что приводит к так называемым формулам Бесселя

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k \exp(ikx), \quad (44)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y(x_p) \exp(-ikx_p), \quad x_p = \frac{2\pi}{N} p.$$

Благодаря ортогональности системы функций эти формулы без потери точности можно использовать при больших n и N (разумеется, $n \leq N - 1$). Особенно часто выбирают $N = 12$, ибо тогда все коэффициенты очень просто вычисляются.

Третий случай — это несложное сглаживание экспериментальных таблиц, точки которых измерены со значительными ошибками. Возьмем несколько соседних точек, и в этом узком интервале построим среднеквадратичную аппроксимацию с одним-двумя параметрами. Центральной точке припишем то значение, которое дает аппроксимация. Для равноотстоящих точек и единичного веса это приводит к несложным формулам. Например, для трех точек при аппроксимации многочленом первой степени из (43) нетрудно получить

$$\bar{y}_i = \frac{1}{3} (y_{i-1} + y_i + y_{i+1}). \quad (45)$$

В радиотехнике этот способ сглаживания называют *фильтром*, ибо он ослабляет высокочастотные колебания, мало влияя на низкочастотные.

Все способы сглаживания надо применять осторожно, поскольку при этом можно исказить поведение функции.

5. Нелинейная аппроксимация. Линейная, особенно линейная полиномиальная, аппроксимация часто не соответствует характеру функции. Например, многочлен высокой степени быстро растет при $|x| \rightarrow \infty$; поэтому даже несложную функцию $y(x) = 1/(1+x^2)$ многочлен плохо аппроксимирует на большом отрезке. Поскольку аппроксимация проводится в широком интервале изменения аргумента, использование нелинейной зависимости от коэффициентов здесь ещё выгодней, чем при интерполяции.

На практике используют два вида зависимости. Один — *квазилинейная* зависимость, сводящаяся выравнивающей заменой переменных $\eta(y)$, $\xi(x)$ к линейной, которая подробно изучена в предыдущих пунктах. Этот способ очень эффективен и часто используется при обработке эксперимента, ибо априорные сведения о физике процесса помогают найти хорошую замену переменных. Надо только иметь в виду, что приближение, наилучшее в новых переменных, не будет наилучшим в смысле скалярного произведения в старых переменных. Поэтому на выбор веса в новых переменных надо обращать особое внимание.

Классический пример — задача о радиоактивном распаде облученного образца, в которой удобны переменные $\eta = \lg y$ и t , где $y(t)$ — скорость распада. В этих переменных кривая обычно аппроксимируется ломаной, звенья которой соответствуют распаду все более долгоживущих членов радиоактивного ряда.

Другой употребительный вид зависимости от коэффициентов — *дробно-линейная*, когда аппроксимирующая функция рациональна:

$$\varphi(x) = P_n(x) / Q_m(x) = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) / \left(\sum_{q=0}^m b_q x^q \right). \quad (46)$$

Нередко используется и отношение обобщенных многочленов. Такая аппроксимация позволяет передать полюсы функции $y(x)$ — им соответствуют нули знаменателя требуемой кратности. Зачастую можно воспроизвести асимптотическое поведение $y(x)$ при $x \rightarrow \infty$ за счет соответствующего выбора величины $n - m$; например, если $y(\infty) = \text{const} \neq 0$, то надо положить $n = m$. При этом сами n , m можно брать достаточно большими, чтобы располагать многими коэффициентами аппроксимации.

Однако квадрат погрешности $\|y - (P_n / Q_m)\|_{L_2}^2$ уже не будет квадратичной функцией коэффициентов, так что найти коэффициенты рациональной функции нелегко. Можно по аналогии со среднеквадратичной аппроксимацией многочленами выдвинуть гипотезу, что погрешность $y(x) - [P_n(x) / Q_m(x)]$ имеет на $[a, b]$ число нулей, не меньшее числа свободных коэффициентов (сравните с замечанием 3 в п. 2). Тогда задача сводится к лагранжевой интерполяции по этим нулям x_p и коэффициенты a_k , b_q находятся из системы линейных уравнений:

$$y(x_p) \sum_{q=0}^m b_q x_p^q = \sum_{k=0}^n a_k x_p^k, \quad 0 \leq p \leq n + m; \quad b_0 = 1. \quad (47)$$

Разумеется, точное положение нулей неизвестно; их выбирают произвольно, обычно равномерно распределяя на отрезке $[a, b]$. Этот способ называют методом *выбранных точек*. Полученное этим методом приближение $\varphi(x)$ вовсе не будет наилучшим. Кроме

того, метод выбранных точек неразумен, как и всякая интерполяция, если $y(x_p)$ имеют заметную погрешность.

Наилучшее приближение можно найти методом *итерированного веса*. Заметим, что задача

$$\|Q_m(x)y(x) - P_n(x)\|_{L_2}^2 = \min$$

легко решается: стоящее слева выражение есть квадратичная функция коэффициентов a_k, b_q , и дифференцирование по ним приводит к линейной системе для определения коэффициентов, сходной с (38). Новая задача отличается от исходной по существу тем, что вместо веса $\rho(x)$ используется другой вес $\rho(x)Q_m^2(x)$, поэтому ее решение не является наилучшим приближением. Запишем исходную задачу в новой форме:

$$\|y - (P_n/Q_m)\|_{L_2}^2 = \int_a^b \bar{\rho}(x) [Q_m(x)y(x) - P_n(x)]^2 dx = \min, \quad (48)$$

$$\bar{\rho}(x) = \rho(x)/Q_m^2(x),$$

и будем решать ее простым итерационным процессом

$$\bar{\rho}^{(s)}(x) = \rho(x) [Q_m^{(s-1)}(x)]^{-2}, \quad (49)$$

$$\int_a^b \bar{\rho}^{(s)}(x) [Q_m^{(s)}(x)y(x) - P_n^{(s)}(x)]^2 dx = \min;$$

за нулевое приближение можно взять $Q_m^{(0)}(x) \equiv 1$. На каждой итерации вес известен по предыдущей итерации, поэтому коэффициенты $a_k^{(s)}, b_q^{(s)}$ легко находятся из условия минимума квадратичной формы. Практика показывает, что коэффициенты наилучшего приближения слабо зависят от выбора веса, поэтому обычно итерации сходятся быстро.

а) Рассмотрим некоторые примеры аппроксимации рациональной функцией. Положим

$$y(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots;$$

заменяя два первых члена ряда дробью, получим $\ln(1+x) \approx 2x/(2+x)$. Эта несложная формула обеспечивает точность $\sim 1\%$ при $-1/2 \leq x \leq 1$ и очень удобна для оценок.

б) В теории вероятностей важную роль играет интеграл ошибок $\Phi(x)$, для которого известны разложения в ряды:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \dots \right),$$

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(1 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3}{8}x^{-4} - \frac{15}{8}x^{-6} + \dots \right).$$

Первый ряд абсолютно сходится, но при $x > 1$ сходимость очень медленная; второй ряд сходится асимптотически при больших значениях x . Заменяя первые члены каждого ряда дробями, получим

$$\Phi(x) \approx \frac{6x}{\sqrt{\pi}(3+x^2)} \quad \text{при } x \leq 1,$$

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{2x}{\sqrt{\pi}(1+2x^2)} e^{-x^2} \quad \text{при } x \geq 1.$$

В указанных диапазонах изменения аргумента погрешность первой формулы не превышает 0,4%, а погрешность второй формулы — 2,4%. Таким образом, точность этих аппроксимаций вполне достаточна для многих практических приложений.

в) Положим $y(x) = \operatorname{arctg} x$ при $0 \leq x < \infty$. Эта функция монотонна, причем $y(x) \approx x$ при $x \rightarrow 0$ и $y(+\infty) = \pi/2$. Легко построить дробь

$$\varphi(x) = x / \left(1 + \frac{2}{\pi} x\right),$$

удовлетворяющую тем же условиям. Она дает грубую аппроксимацию арктангенса; локальная погрешность в точке $x=1$ составляет 30%. Несложное видоизменение этой формулы

$$\operatorname{arctg} x \approx x / \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi} x\right)^2}$$

дает вчетверо лучшую точность.

г) Тангенс в первой четверти можно грубо аппроксимировать формулой

$$\operatorname{tg} x \approx x / \left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

передающей поведение вблизи нуля и наличие полюса при $x = \pi/2$.

д) В задачах рассеяния часто встречается одна из специальных функций — интегральная экспонента:

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln \frac{1}{x} - C + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k \cdot k!}. \quad (50)$$

Ряд, в который она разлагается, сходится при любых положительных значениях аргумента. Но только при $x \leq 1$ сходимость достаточно быстрая, и ряд пригоден для вычисления функции. Если учесть асимптотику $\operatorname{Ei}(x) \approx e^{-x}/x$ при $x \rightarrow \infty$, то рациональную аппроксимацию при $x \geq 1$ целесообразно искать в следующем виде:

$$\operatorname{Ei}(x) \approx \frac{e^{-x}}{x} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) / \left(\sum_{q=0}^n b_q x^q \right), \quad a_n = b_n = 1, \quad (51)$$

где не полиномиальная часть асимптотики выделена отдельным множителем. Оказывается, уже $n=3$, т. е. шесть свободных коэффициентов обеспечивают точность 10⁻⁴%.

Отметим, что рациональными функциями при небольшом числе коэффициентов можно удовлетворительно аппроксимировать функции с разрывами производной вроде $y(x) = |x|$, которые плохо поддаются аппроксимации другими способами.

§ 3. Равномерное приближение

1. Наилучшие приближения. Поскольку чебышевская норма сильнее нормы L_p , то принято считать, что равномерная аппроксимация лучше аппроксимации в среднем. Поэтому поиску равномерных и особенно *наилучших равномерных* приближений, определяемых условием

$$\Delta(y, \varphi) = \min, \text{ где } \Delta(y, \varphi) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \varphi(x)|, \quad (52)$$

где минимум ищется на множестве функций $\varphi(x)$, посвящено много работ. В частности, получены следующие результаты (доказательства большинства из них приведены в учебнике И. С. Березина и Н. П. Жидкова [4]).

а) Если выбрана линейная аппроксимация (37) с чебышевской системой функций $\varphi_k(x)$, то равномерное наилучшее приближение единственно*). Доказательство существования наилучшего приближения для этого случая было приведено в § 2, п. 1.

б) Чтобы обобщенный многочлен $\varphi(x)$ по чебышевской системе функций $\varphi_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, был наилучшим равномерным приближением к $y(x)$ на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы на этом отрезке нашлось не менее $n+1$ таких точек, в которых погрешность $\delta(x) = y(x) - \varphi(x)$ попеременно принимает значения $+\Delta$ и $-\Delta(y, \varphi)$. Следовательно, погрешность имеет на (a, b) не менее n нулей, как и у многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения. Впервые этот результат был получен П. Л. Чебышевым в 1859 г. для алгебраических многочленов.

в) Для функции $y(x)$, имеющей p непрерывных производных, причем $y^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой l_p , Д. Джексон в 1911 г. получили некоторые оценки скорости сходимости наилучших равномерных приближений. При аппроксимации алгебраическим многочленом n -й степени на отрезке $-1 \leq x \leq 1$:

$$\Delta_n \leq (C_0 e)^{p+1} l_p / [\sqrt{2\pi(p+1)} n^{p+1}] = O(1/n^{p+1}), \quad (53)$$

а при аппроксимации периодической функции с периодом 2π тригонометрическим многочленом такой же степени:

$$\Delta_n \leq l_p (C_0/n)^{p+1} = O(1/n^{p+1}), \quad (54)$$

где C_0 — универсальная константа ($C_0 < 137$). С. Н. Бернштейн доказал, что из сходимости приближений со скоростью $O(1/n^{p+1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, следует наличие у функции ограниченной $p+1$ -й производной, поэтому оценки Джексона почти неулучшаемы.

Таким образом, эти приближения для достаточно гладких функций быстро сходятся при $n \rightarrow \infty$, а для липшиц-непрерывных, но не гладких функций следует полагать $p=0$, т. е. для них приближения сходятся медленно. Для произвольной функции, непрерывной на конечном отрезке $a \leq x \leq b$, равномерные приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами также сходятся (теорема, доказанная К. Вейерштрассом в 1885 г.; но скорость сходимости, как показал С. Н. Бернштейн в 1938 г., может быть сколь угодно малой. Именно, как бы медленно ни убывали члены монотонной последовательности $\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \geq \delta_{n+1} > 0$, всегда найдется такая непрерывная функция $y(x)$, для которой $\Delta(y, P_n(x)) = \delta_n$. Соответствующая оценка Джексона для алгебраической аппроксимации произвольной функции, непрерывной

при $-1 \leq x \leq 1$ (и тем самым равномерно-непрерывной), есть

$$\Delta_n \leq (1/2 C_0 + 2) \omega(2/n), \quad (55)$$

а для тригонометрической аппроксимации непрерывной функции с периодом 2π :

$$\Delta_n \leq \left(\frac{1}{2\pi} C_0 + 2 \right) \omega(2\pi/n), \quad (56)$$

где ω — модуль непрерывности функции.

Наилучшее равномерное приближение рациональной функцией (отношением многочленов) имеет такой же порядок точности, как в оценках (53)—(56), где под n надо подразумевать полное число свободных коэффициентов, которое на единицу меньше суммарной степени числителя и знаменателя.

г) Многочлены наилучшего равномерного приближения не обеспечивают хорошей сходимости (а иногда и просто сходимости) производных $\varphi'(x)$ к $y'(x)$. Если нужна сходимость производных, то приходится строить другие многочлены, которые имеют меньшую скорость сходимости. Например, многочлены С. Н. Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (1-x)^{n-k} x^k y\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (57)$$

равномерно сходятся к любой непрерывной функции $y(x)$, но не быстрее чем $O(1/n)$, сколь бы гладкой функция ни была; зато если существует непрерывная производная $y^{(p)}(x)$, то производные многочленов С. Н. Бернштейна $B_n^{(p)}(x)$ равномерно сходятся к ней на указанном отрезке при $n \rightarrow \infty$.

д) Наибольший практический интерес представляет соотношение между точностями, достигаемыми при наилучшей равномерной и наилучшей среднеквадратичной аппроксимациях. Пусть для произвольной функции $y(x)$ с периодом 2π тригонометрический многочлен наилучшего равномерного приближения есть $R_n(x)$. Доказано (см. монографию В. Л. Гончарова [9], стр. 186), что тригонометрический многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения той же степени $Q_n(x)$ имеет погрешность не более:

$$\|y(x) - Q_n(x)\|_C \leq (4,5 + \ln n) \|y(x) - R_n(x)\|_C. \quad (58)$$

Сходные оценки существуют и для наилучших аппроксимаций алгебраическими многочленами на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Из неравенства (58) следует, что при небольших n погрешность многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения даже в $\|\cdot\|_C$ не сильно превосходит погрешность многочленов наилучшего равномерного приближения (например, при $n \leq 12$ не более чем в 7 раз).

Из оценок (53)—(56) следует, что для функций с непрерывными старшими производными, не слишком большими по абсолютной величине, наилучшие равномерные приближения обеспечивают высокую точность уже при небольших $n \approx 5 \div 10$. Значит, для таких функций наилучшие среднеквадратичные приближения будут обеспечивать в $\|\cdot\|_C$ почти ту же точность, что и наилучшие равномерные приближения. Только для недостаточно гладких функций

среднеквадратичные приближения не сходятся или плохо сходятся в $\|\cdot\|_C$, но в этом случае и наилучшие равномерные приближения сходятся настолько медленно, что практически их трудно использовать.

Описанные в § 2 алгоритмы нахождения наилучших среднеквадратичных приближений намного проще, чем известные алгоритмы нахождения наилучших равномерных приближений. По всем указанным причинам на практике много удобнее искать наилучшие среднеквадратичные, а не равномерные приближения; как отмечалось в § 2, для улучшения их сходимости следует явно выделять в простой форме основные особенности функции и ее младших производных и аппроксимировать оставшуюся достаточно гладкую часть. К нахождению равномерных приближений прибегают в основном при разработке алгоритмов для стандартных программ вычисления функций, когда добиваются очень высокой точности при минимальном числе членов суммы.

2. Нахождение равномерного приближения. Для функции, заданной на отрезке $[a, b]$, не найдено способа определения коэффициентов наилучшего равномерного приближения за конечное число действий. Рассмотрим простой итерационный процесс нахождения коэффициентов.

Чебышевскую норму можно рассматривать как предел $\|\cdot\|_{L_p}$ при $p \rightarrow \infty$ и единичном весе. В пространстве L_p задачу нахождения наилучшего приближения $\|y - \varphi\|_{L_p}^p = \min$ удобно решать итерированием веса:

$$\int_a^b \rho^{(s)}(x) [y(x) - \varphi^{(s+1)}(x)]^2 dx = \min, \quad (59)$$

$$\rho^{(s)}(x) = |y(x) - \varphi^{(s)}(x)|^{p-2};$$

для начала итерационного процесса можно положить $\rho^{(0)}(x) \equiv 1$. Если $\varphi(x)$ является обобщенным многочленом, то на каждой итерации задача на минимум опять сводится к решению системы линейных (относительно коэффициентов a_k) уравнений. Для решения полной задачи $\|y - \varphi\|_C = \min$ надо выбрать последовательность $p \rightarrow \infty$, для каждого фиксированного p провести итерации (59) до сходимости, а затем в коэффициентах $a_k^{(p)}$ произвести предельный переход при $p \rightarrow \infty$ (т. е. оценить, начиная с какого p_0 коэффициенты перестают меняться в пределах заданной точности при дальнейшем увеличении p).

Двойной предельный переход требует больших численных расчетов. Поэтому целесообразно объединить предельные переходы $s \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow \infty$. Для этого на первой итерации по s положим $p=2$, на второй возьмем $p=4$, на третьей — $p=6$ и т. д.

Вместо (59) получим следующую задачу:

$$\int_a^b \rho^{(s)}(x) [y(x) - \varphi^{(s+1)}(x)]^2 dx = \min, \quad (60)$$

$$\rho^{(s)}(x) = [y(x) - \varphi^{(s)}(x)]^{2s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь начальное условие для итераций $\rho^{(0)}(x) \equiv 1$ получается естественно при $s=0$. Этот итерационный процесс не исследован теоретически и мало опробован в практических расчетах, но поскольку обычно коэффициенты аппроксимации слабо зависят от выбора веса, то следует ожидать быстрой сходимости процесса.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что разделенная разность n -го порядка выражается через узловые значения функции следующим образом:

$$y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n y(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)^{-1}.$$

2. Вывести оценку (11).

3. Написать оценки погрешности типа (11) для трех случаев интерполяционного многочлена Эрмита 7-й степени: $\mathcal{P}(x; x_0, x_1, \dots, x_7)$, $\mathcal{P}(x; x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3)$ и $\mathcal{P}(x; x_0, x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_1)$; сравнить их порядки точности и численные коэффициенты.

4. Применить формулу (19) к вычислению $y(0, 5)$ в таблице 5; оценить точность.

5. Вывести формулы типа (19) для случаев, когда функция на малых отрезках приближенно представима в виде $y(x) \approx ax^b$ или $y(x) \approx a(x+b)^m$, где m — заданное число.

6. Разобрать интерполяцию сплайном второй степени; по аналогии со случаем $n=3$ найти экономный способ вычисления коэффициентов.

7. Оценить погрешность округления при вычислении $\sin 2550^\circ$ по формуле Тейлора на ЭВМ с 16 десятичными знаками.

8. Доказать, что прямая, проведенная методом наименьших квадратов, проходит через точку с координатами

$$\bar{x} = \left(\sum_i \rho_i x_i \right) / \left(\sum_i \rho_i \right), \quad \bar{y} = \left(\sum_i \rho_i y_i \right) / \left(\sum_i \rho_i \right),$$

которая является «центром тяжести».

9. Вывести формулы Бесселя (44) для случая, когда тригонометрические функции заданы в действительной форме: $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \sin x$, $\varphi_2 = \cos x$, $\varphi_3 = \sin 2x$ и т. д.

10. Вывести формулы сглаживания типа (45) для центральной точки по пяти точкам при среднеквадратичной аппроксимации многочленом первой и второй степени.

11. Написать систему уравнений для определения коэффициентов $a_k^{(s)}$, $b_q^{(s)}$, минимизирующих (49).

12. Доказать, что коэффициенты a_k формул Бесселя (44) связаны с коэффициентами обычного ряда Фурье α_k соотношениями $a_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k+pN}$.