

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Н. Н. К а л и т к и н

В книге излагаются основные численные методы решения широкого круга математических задач, возникающих при исследовании физических и технических проблем. Изложенные методы пригодны как для расчетов на ЭВМ, так и для «ручных» расчетов. Для каждого метода даны практические рекомендации по применению. Для лучшего понимания алгоритмов приведены примеры численных расчетов.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей университетов и технических институтов, научных работников и инженеров-исследователей, а также для всех, имеющих дело с численными расчетами.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора		Г л а в а IV	84
Предисловие		Численное интегрирование	
Глава I		§ 1. Полиномиальная аппроксимация	85
Что такое численные методы?		1. Постановка задачи (85). Формула трапеций (86). 3. Формула Симпсона (88). 4. Формула средних (89). 5. Формула Эйлера (91). 6. Процесс Эйткена (92). 7. Формулы Гаусса—Кристоффеля (94). 8. Формулы Маркова (97). 9. Сходимость квадратурных формул (98).	
1. Решение задачи (13). 2. Численные методы (15). 3. История прикладной математики (16).	13	§ 2. Нестандартные формулы	100
§ 2. Приближенный анализ	17	1. Разрывные функции (100). 2. Нелинейные формулы (100). 3. Метод Филона (103). 4. Переменный предел интегрирования (105). 5. Несобственные интегралы (105).	
1. Понятие близости (17). 2. Структура погрешности (22). 3. Корректность (24).	26	§ 3. Кратные интегралы	108
Г л а в а II		1. Метод ячеек (108). 2. Последовательное интегрирование (111).	
Аппроксимация функций		§ 4. Метод статистических испытаний	113
§ 1. Интерполирование	27	1. Случайные величины (113). 2. Разыгрывание случайной величины (114). 3. Вычисление интеграла (117). 4. Уменьшение дисперсии (119). 5. Кратные интегралы (121). 6. Другие задачи (123).	
1. Приближенные формулы (27). 2. Линейная интерполяция (27). 3. Интерполяционный многочлен Ньютона (29). 4. Погрешность многочлена Ньютона (31). 5. Применения интерполяции (34). 6. Интерполяционный многочлен Эрмита (36). 7. Сходимость интерполяции (39). 8. Нелинейная интерполяция (41). 9. Интерполяция сплайнами (44). 10. Монотонная интерполяция (46). 11. Многомерная интерполяция (47).	51	Задачи	124
§ 2. Среднеквадратичное приближение	51	Глава V	
1. Наилучшее приближение (51). 2. Линейная аппроксимация (53). 3. Суммирование рядов Фурье (56). Метод наименьших квадратов (59). Нелинейная аппроксимация (62).	66	Системы уравнений	
§ 3. Равномерное приближение	66	§ 1. Линейные системы	126
1. Наилучшие приближения (66). 2. Нахождение равномерного приближения (68).	69	1. Задачи линейной алгебры (126). 2. Метод исключения Гаусса (128). 3. Определитель и обратная матрица (130). 4. 0 других прямых методах (132). 5. Прогонка (132). Метод квадратного корня (135). 7. Плохо обусловленные системы (137).	
Г л а в а III		§ 2. Уравнение с одним неизвестным	138
Численное дифференцирование		1. Исследование уравнения (138). 2. Дихотомия (139). 3. Удаление корней (140). 4. Метод простых итераций (141). 5. Метод Ньютона (143). 6. Процессы высоких порядков (145). Метод секущих (145). 8. Метод парабол (146). 9. Метод квадрирования (148).	
1. Полиномиальные формулы (70). 2. Простейшие формулы (72). 3. Метод Рунге—Ромберга (74). 4. Квазиравномерные сетки (78). 5. Быстропеременные функции (80). 6. Регуляризация дифференцирования (81).		§ 3. Системы нелинейных уравнений	150
		1. Метод простых итераций (150). 2. Метод	

Ньютона (152). 3. Метод спуска (153). 4. Итерационные методы решения линейных систем (153). -		решения (238). 3. Метод Пикара (240). 4. Метод малого параметра (242). 5. Метод ломаных (243). 6. Метод Рунге—Кутта (246). 7. Метод Адамса (250). 8. Неявные схемы (252). 9. Специальные методы (353). 10. Особые точки (257). 11. Сгущение сетки (258).	
Задачи	155		
Глава VI			
Алгебраическая проблема собственных значений			
§ 1. Проблема и простейшие методы	156	§ 2. Краевые задачи	261
1. Элементы теории (156). 2. Устойчивость (159). 3. Метод интерполяции (162). 4. Трехдиагональные матрицы (164). 5. Почти треугольные матрицы (165). 6. Обратные итерации (166).		1. Постановки задач (261). 2. Метод стрельбы (262). 3. Уравнения высокого порядка (266). 4. Разностный метод; линейные задачи (268). 5. Разностный метод; нелинейные задачи (271). 6. Метод Галеркина (276). 7. Разрывные коэффициенты (279).	
§ 2. Эрмитовы матрицы	170	§ 3. Задачи на собственные значения	280
1. Метод отражения (170). 2. Прямой метод вращения (175). 3. Итерационный метод вращения (177).		1. Постановка задач (280). 2. Метод стрельбы (281). 3. Фазовый метод (282). 4. Разностный метод (284). 5. Метод дополненного вектора (286). 6. Метод Галеркина (288).	
§ 3. Неэрмитовы матрицы	181	Задачи	289
1. Метод элементарных преобразований (181). 2. Итерационные методы (186). 3. Некоторые частные случаи (187).		Г л а в а IX	
§ 4. Частичная проблема собственных значений	189	Уравнения в частных производных	
1. Особенности проблемы (189). 2. Метод линеаризации (189). 3. Степенной метод (190). 4. Обратные итерации со сдвигом (191).		1. О постановках задач (290). 2. Точные методы решения (292). 3. Автомодельность и подобие (294); 4. Численные методы (296).	290
Задачи	193	§ 2. Аппроксимация	299
Глава VII		1. Сетка и шаблон (299). 2. Явные и неявные схемы (301). 3. Невязка (302). 4. Методы составления схем (303). 5. Аппроксимация и ее порядок (307).	
Поиск минимума		§ 3. Устойчивость	311
1. Постановка задачи (194). 2. Золотое сечение (196). 3. Метод парабол (198). 4. Стохастические задачи (200).	194	1. Неустойчивость (311). 2. Основные понятия (312). 3. Принцип максимума (315). 4. Метод разделения переменных (318). 5. Метод энергетических неравенств (322). 6. Операторные неравенства (323).	
§ 2. Минимум функции многих переменных	201	§ 4. Сходимость	324
1. Рельеф функции (201). 2. Спуск по координатам (203). 3. Наискорейший спуск (207). 4. Метод оврагов (209). 5. Сопряженные направления (210). 6. Случайный поиск (214).		1. Основная теорема (324). 2. Оценки точности (327). 3. Сравнение схем на тестах (331).	
§ 3. Минимум в ограниченной области	215	Глава X	
1. Формулировка задачи (215). 2. Метод штрафных функций (216). 3. Линейное программирование (217). 4. Симплекс-метод (220). 5. Регуляризация линейного программирования (221).		Уравнение переноса	
§ 4. Минимизация функционала	223	1. Задачи и решения (334). 2. Схемы бегущего счета (336). 3. Геометрическая интерпретация устойчивости (341). 4. Многомерное уравнение (344). 5. Перенос с поглощением (346). 6. Монотонность схем (348). 7. Диссипативные схемы (351).	334
1. Задачи на минимум функционала (223). 2. Метод пробных функций (226). 3. Метод Ритца (230). 4. Сеточный метод (240).		§ 2. Квазилинейное уравнение	354
Задачи	236	1. Сильные и слабые разрывы (354). 2. Однородные схемы (357). 3. Псевдовязкость (359). 4. Ложная сходимость (362). 5.	
Глава VIII			
Обыкновенные дифференциальные уравнения			
§ 1. Задача Коши	237		
1. Постановка задачи (237). 2. Методы			

Консервативные схемы (363).		(427). 3. Двуслойная акустическая схема.	
Г л а в а XI	366	(429). 4. Инварианты (434). 5. Явная	
Параболические уравнения		многомерная схема (435). 6.	
§ 1. Одномерные уравнения	368	Факторизованные схемы (436).	
1. Постановки задач (368). 2. Семейство		§ 2. Одномерные уравнения газодинамики	439
неявных схем (369). 3. Асимптотическая		1. Лагранжева форма записи (439). 2.	
устойчивость неявной схемы (374). 4.		Псевдовязкость (442). 3. Схема «крест»	
Монотонность (376). 5. Явные схемы (378).		(444). 4. Неявная консервативная схема	
6. Наилучшая схема (380). 7.		(447). 5. 0 других схемах (450).	
Криволинейные координаты (384). 8.		Задачи	451
Квазилинейное уравнение (386).		Глава XIV	
§ 2. Многомерное уравнение	389	Интегральные уравнения	
1. Экономичные схемы (389). 2. Продольно-		§ 1. Корректно поставленные задачи	452
поперечная схема (391). 3. Локально-		1. Постановки задач (452). 2. Разностный	
одномерный метод (394). 4. Метод Монте-		метод (455). 3. Метод последовательных	
Карло (399).		приближений (458). 4. Замена ядра	
Задачи	399	вырожденным (460). 5. Метод Галеркина	
Глава XII		(461).	
Эллиптические уравнения		§ 2. Некорректные задачи	462
§ 1. Счет на установление	401	1. Регуляризация (462). 2. Вариационный	
1. Стационарные решения эволюционных		метод регуляризации (465). 3. Уравнение	
задач (401). 2. Оптимальный шаг (404). 3.		Эйлера (469). 4. Некоторые приложения	
Чебышевский набор шагов (409).		(473). 5. Разностные схемы (476).	
§ 2. Вариационные и вариационно-	413	Задачи	478
разностные методы		Г л а в а XV	
1. Метод Рунге (413). 2. Стационарные		Статистическая обработка эксперимента	
разностные схемы (414). 3. Прямые методы		1. Ошибки эксперимента (480). 2. Величина	
решения (415). 4. Итерационные методы		и доверительный интервал (482). 3.	
(420).		Сравнение величин (490). 4. Нахождение	
Задачи	423	стохастической зависимости (494).	
Глава XIII		Задачи	500
Гиперболические уравнения		Приложение Ортогональные многочлены	501
§ 1. Волновое уравнение	424	Литература	505
1. Схема «крест» (424). 2. Неявная схема		Предметный указатель	509

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельные решения 294	Вольтерра уравнение второго рода 454
Адамса метод 250	— первого рода 462
Анализ регрессии 495, 496	Выбор веса 60, 486, 497
Анизотропная теплопроводность 394, 395	Выравнивающая замена переменных 42
Аппроксимационная вязкость 351	Вырожденное ядро 460
Аппроксимация 308	Вычисление корней многочлена 147, 148
— абсолютная 310	— кратных интегралов методом Монте-Карло
— безусловная 310	121
— дробно-линейная 63	— — — — последовательного интегрирования
— краевых условий 385, 393, 427	111
— локальная 309	— — — — ячеек 108
— условная 310	— несобственных интегралов 105
Асимметрия 487	— обратной матрицы 131
Бегущая температурная волна 295	— определителя 130
Бегущий счет 337, 344, 379	Галеркина метод 276, 288, 461
Бесселя формулы 62	Гарвика прием 146
Большие задачи 388	Геометрическая интерпретация устойчивости
Включение точки 388	341, 379

- Гивенса метод вращения 175  
 Гильбертово пространство 20  
 Двухкруговые итерации 449  
 Дервюдье метод 189  
 Дирихле задача 401  
 Дисбаланс 365  
 Дисперсионный анализ 495  
 Диссипативные схемы 353  
 Дифференцирование быстропеременных функций 80  
 — интерполяционного многочлена Ньютона 70  
 — — — —, погрешность 71  
 — на квазиравномерных сетках 80  
 — на равномерной сетке 73  
 Дихотомия 139, 263  
 Доверительная вероятность 483  
 Доверительный интервал 483  
 Допустимое решение 356  
 Жорданов набор шагов 411  
 Жорданова подматрица 157  
 — форма матрицы 157  
 Замораживание коэффициентов 320  
 Зейделя метод 155  
 Инварианты акустические 434  
 Интегрирование осциллирующих функций 103  
 — разрывных функций 100  
 Интегро-интерполяционный метод 304  
 Интерполяционный многочлен Ньютона 30  
 — — — —, погрешность 32  
 — — — —, апостериорная оценка 33  
 — — Эрмита 36  
 — — — —, погрешность 37  
 Интерполяция квазилинейная 43  
 — лагранжева 28  
 — линейная 28  
 — многомерная 47  
 — — на произвольной сетке 50  
 — — последовательная 49  
 — — треугольная 49  
 Интерполяция монотонная 47  
 — нелинейная 41  
 — обратная 35  
 — сплайнами 44  
 —, сходимость 39  
 — эрмитова 36  
 Квадратурные формулы, априорные оценки точности 99  
 — —, веса 86  
 — — Гаусса — Кристоффеля 94  
 — — Маркова 97  
 — — нелинейные 100  
 — —, погрешность 86  
 — — Симпсона 88  
 — — средних 89  
 — —, сходимость 98  
 — — трапеций 86  
 — — — —, погрешность 87  
 — —, узлы 86  
 — — Эйлера — Маклорена 91  
 Комплексная организация расчета 274, 287, 409  
 Конечные разности 31  
 Консервативные схемы 365, 447  
 Корректность 24  
 Корреляционный анализ 497  
 Коши задача 238, 291  
 — — плохо обусловленная 240  
 Коэффициент парной корреляции 497  
 — перекоса матрицы 161  
 Коэффициентная устойчивость 384  
 Краевые задачи 261, 291  
 — — нестационарные 291  
 Критерии установления 408  
 Куранта условие 338, 436  
 Лагерра многочлены 503  
 Лежандра многочлены 501  
 Линеаризация разностной схемы 321  
 Линейное программирование 217  
 Локально-одномерные схемы 396  
 Матриц виды 132, 158  
 — нормы 21  
 Матрица вращения 175  
 — отражения 170  
 — сдвинутая 191  
 Метод баланса 304, 363, 380  
 — баллистический 262  
 — вращений итерационный 177  
 — — — —, выбор оптимального элемента 179  
 — — прямой 175  
 — выбранных точек 63  
 — выравнивания 42  
 — декомпозиции 419  
 Метод дополненного вектора 286  
 — золотого сечения 196  
 — исключения Гаусса, выбор главного элемента 130  
 — — — —, обратный ход 129  
 — — — —, прямой ход 129  
 — итерированного веса 64, 68  
 — касательных 143  
 — квадратного корня 135  
 — квадрирования 148  
 — линеаризации 143, 152, 263, 274  
 — ломаных 243  
 — малого параметра 242  
 — моментов 461  
 — наименьших квадратов 59, 224  
 — — — —, выбор весов 60  
 — — — —, оптимальное число коэффициентов 60  
 — — — —, неопределенных коэффициентов 305

- оврагов 209
- отражений 170
- парабол 146, 198
- последовательных приближений 141, 150, 272, 458 — — —, стохастические задачи 142
- простых итераций 141, 150
- прямых 298
- разностной аппроксимации 303
- секущих 145, 264
- сопряженных направлений 210
- стрельбы 262, 266, 281
- —, линейные задачи 264, 267
- уменьшения невязки 307
- фиктивных точек 306
- штрафных функций 216
- Минимизация функционала по аргументу 223
- Многочлены обобщенные 28
  - ортогональные 501
  - — на системе точек 503
- Модуль непрерывности 19
- Монотонность схем 376, 384
- Наилучшая схема 381
- Наилучшее приближение 51
  - — равномерное 66
  - — среднеквадратичное 53
- Наискорейший спуск 207
  - —, сходимость 208
- Направление 299
- Невязка 302
- Независимые измерения 491
- Непрерывный аналог метода Ньютона 288
  - функционал 227
- Неявные схемы 252, 301
- Нормальное распределение 483, 487
- Нормальное решение 222, 476
- Нормы 19
  - векторов 21
  - матриц 21
    - — подчиненные 22
    - — согласованные 22
    - негативные 322
    - энергетические 308
- Ньютона интерполяционный многочлен 30
  - метод 143, 152, 263, 274
- Обратные итерации 166
  - — с переменным сдвигом 192
  - — со сдвигом 191
- Овраг 203
  - разрешимый 203
- Однородные схемы 358
- Операторы виды 323
  - — свойства 323
- Оптимальное управление 226
- Особые точки дифференциальных уравнений 257
- Оценки погрешности апостериорные 33, 330
  - — априорные 33, 328
- Ошибки грубые 481, 489
  - систематические 481
  - случайные 481
- Первое дифференциальное приближение 352
- Пикара метод 240
- Плохая обусловленность 25, 240
  - — линейных алгебраических систем 127, 130, 137, 476
- Подобие 296
- Погрешность метода 23
  - неустраняемая 22
  - округления 23
- Показатель симметрии 384, 440
- Полностью консервативные схемы 366, 450
- Попеременно-треугольная схема 421
- Порядок точности 325, 327
  - — не целый 93, 340
- Последовательность точек ЛПт 121
  - функций минимизирующая 227
- Потенциал скоростей 429
- Предиктор-корректор 247
- Преобладание диагонального элемента 134, 154
- Преобразование подобия матриц 158
- Признак равномерной устойчивости 314, 316, 319
- Принцип максимума 315
- Прогонка 132
- Прогонка дифференциальная 266
- Продольно-поперечная схема 391
- Пространство  $C$  19
- Псевдовязкость 359
  - квадратичная 361, 443
  - линейная 362, 442
- Псевдослучайные числа 115
- Разделенные разности 29
  - — с кратными узлами 37
- Разрывные коэффициенты 279, 380
- Разыгрывание случайной величины 117
  - — — многомерной 122
  - — — равномерно распределенной 115
- Регуляризация дифференцирования по Тихонову 474
  - — по шагу 83
  - — сглаживанием 83
  - линейного программирования 221
  - суммирования ряда по Тихонову 58, 475
  - — — по числу членов 57
- Регуляризирующий оператор 464
- Рельеф функции 201
- Решение уравнения обратной интерполяцией 35
- Ритца метод 230, 413

- Рунге — Кутта метод 246  
 — — —, оценка точности 249  
 Рунге метод 75, 259, 332  
 — — рекуррентный 77, 331  
 Рунге — Ромберга метод 76  
 Сглаживание функции 60, 62, 474  
 Сетки квазиравномерные 78  
 — специальные 279, 383  
 Сильный разрыв 357  
 Симплекс-метод 220  
 Слабый разрыв 355  
 Слой 299  
 Случайная величина 114  
 — —, плотность распределения 114  
 — —, равномерно распределенная 114  
 — —, —, разыгрывание 115  
 — —, разыгрывание 117  
 Собственные значения 156, 280  
 Согласованные измерения 492  
 Сплайн 46  
 — многомерный 235  
 Способ параллельных касательных 211  
 Спуск по координатам 203  
 Стандарт 484  
 — выборки 485  
 — —, несмещенная оценка 484  
 Степенной метод 190  
 Стохастическая зависимость 495  
 Стохастическая задача нахождения минимума 194  
 Стьюдента коэффициенты 485  
 — критерий 485  
 Субтабулирование 34  
 Схема двуслойная 313  
 — —, каноническая форма 318  
 — «крест» 425, 435, 444  
 — ломаных 243  
 — с весами 370  
 — с выделением особенностей 358, 430  
 — с полусуммой 371  
 Сходимость 325  
 — векторов по направлению 21  
 — квадратичная 145  
 — кубическая 145  
 — линейная 145  
 — ложная 362  
 — равномерная 19  
 — среднеквадратичная 20  
 Счет на установление 190, 403  
 — — —, критерий установления 408  
 — — —, оптимальный шаг 404  
 Тихоновский стабилизатор 405  
 Точки повышенной точности численного дифференцирования 72  
 Треугольный оператор 421  
 Удаление найденных корней 140  
 Узлы сетки нерегулярные 300  
 — — регулярные 300  
 Уменьшение дисперсии метода Монте-Карло 119  
 Устойчивость 24, 312  
 — асимптотическая 314, 374  
 — безусловная 313  
 — по начальным данным 313  
 — — — — равномерная 313  
 — слабая 25, 314  
 — собственных значений и векторов матриц 159  
 — условная 313  
 Фазовый метод 282  
 Факторизованные схемы 437  
 Филона формулы 103  
 Фишера коэффициенты 494  
 — критерий 493  
 Фредгольма уравнение второго рода 453  
 — — первого рода 462  
 Фурье преобразование быстрое 416  
 — — дискретное 62  
 Характеристический многочлен 156  
 Хаусхолдера метод отражений 170  
 Центральные моменты распределения 487  
 Циклическая прогонка 434  
 Чебышева критерий 486  
 — многочлены 503  
 Чебышевская система функций 28  
 Чебышевский набор шагов 409  
 — — — упорядоченный 412  
 Чисто неявная схема 371  
 Шаблон 297, 300  
 Эйлера метод 243  
 — уравнение 469  
 Эйткена экстраполяционный процесс 92  
 Экономичные схемы 391  
 Экстраполяция 33  
 — многомерная 48  
 Экссесс 487  
 Эрмита многочлены интерполяционные 36  
 — — ортогональные 503  
 Явно-неявная схема 342  
 Явные схемы 301  
 Якоби метод вращения 177  
 — многочлены ортогональные 501

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Современное развитие физики и техники тесно связано с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ). В настоящее время ЭВМ стали обычным оборудованием многих

институтов и конструкторских бюро. Это позволило от простейших расчетов и оценок различных конструкций или процессов перейти к новой стадии работы—детальному математическому моделированию (вычислительному эксперименту), которое существенно сокращает потребность в натуральных экспериментах, а в ряде случаев может их заменить.

В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. Изложению численных методов посвящено немало книг. Однако большинство этих книг ориентировано на студентов и научных работников математического профиля. Поэтому в настоящее время ощущается потребность в книге, рассчитанной на широкий круг читателей различных специальностей и сочетающей достаточную полноту изложения с разумной степенью строгости при умеренном объеме.

Предлагаемая книга отвечает этим требованиям. Она достаточно полно освещает тот круг вопросов, знание которого наиболее часто требуется в практике вычислений, и содержит ряд разделов, которые редко включают в учебные пособия. Умеренный объем достигнут за счет тщательного отбора материала и включения в книгу только наиболее эффективных и часто используемых на практике методов. Материал изложен четко и сжато, при этом большое внимание уделено рекомендациям по практическому применению алгоритмов; изложение пояснено рядом примеров. Для обоснования алгоритмов использован несложный математический аппарат, знакомый студентам физических и инженерных специальностей.

Книга рассчитана на читателя, который занимается не столько разработкой численных методов, сколько их применением к прикладным проблемам. Однако в процессе работы над книгой читатель знакомится с основными идеями построения вычислительных алгоритмов и с их обоснованием и приобретает знания, достаточные для разработки новых алгоритмов. Эта книга является по существу введением в численные методы. Овладев ею, читатель затем может углубить свои знания, обратившись к руководствам по теории разностных схем и по методам численного решения отдельных классов задач.

Книга написана специалистом по теоретической и математической физике. Она возникла в результате работы автора над рядом актуальных проблем физики в Институте прикладной математики АН СССР и преподавания на физическом факультете МГУ.

Несомненно, книга окажется полезной широкому кругу читателей — студентам, аспирантам, научным сотрудникам и инженерам математических, физических и технических специальностей.

*А. А. Самарский*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сложные вычислительные задачи, возникающие при исследовании физических и технических проблем, можно разбить на ряд элементарных—таких как вычисление интеграла, решение дифференциального уравнения и т. п. Многие элементарные задачи являются несложными и хорошо изучены. Для этих задач уже разработаны методы численного решения, и нередко имеются стандартные программы решения их на ЭВМ. Есть и достаточно сложные элементарные задачи; методы решения таких задач сейчас интенсивно разрабатываются (например, решение уравнений бесстолкновительной плазмы).

Поэтому полная программа обучения численным методам должна состоять из ряда этапов. Во-первых, это освоение логарифмической линейки, клавишных вычислительных машин и программирования на ЭВМ. Во-вторых, основы численных методов, содержащие изложение классических элементарных задач (включая основные сведения о разностных схемах). В-третьих, курс теории разностных схем. И в-четвертых — ряд специальных курсов, которые сейчас нередко называют методами вычислительной физики: численное решение задач газодинамики, аэродинамики, переноса излучения, квантовой физики, квантовой химии и т. д.

Эта книга является введением в численные методы. Она начинается с простейших задач интерполирования функций и кончается недавно возникшим разделом вычислительной математики — методами решения некорректно поставленных задач. Книга написана на основе годового курса лекций, читавшихся автором сначала инженерам-конструкторам, а после переработки—студентам физического факультета МГУ. Для каждой задачи существует множество методов решения. Например, хорошо обусловленную систему линейных уравнений можно решать методами Гаусса, Жордана, оптимального исключения, окаймления, отражений, ортогонализации и рядом других. Интерполяционный многочлен записывают в формах Лагранжа, Ньютона, Грегори—Ньютона, Бесселя, Стирлинга, Гаусса и Лапласа—Эверетта. Подобные методы обычно являются вариациями одного-двух основных методов, и если даже

в каких-то частных случаях имеют преимущества, то незначительные. Кроме того, многие методы создавались до появления ЭВМ, и ряд из них в качестве существенного элемента включает интуицию вычислителя. Появление ЭВМ потребовало переоценки старых методов, что до конца еще не сделано, и до сих пор по традиции большое количество неэффективных методов кочует из учебника в учебник. Отчасти это объясняется тем, что эффективность многих методов сильно зависит от мелких деталей алгоритма, почти не поддающихся теоретическому анализу; поэтому окончательный отбор лучших методов можно сделать только на основании большого опыта практических расчетов.

В этой книге сделана попытка такого отбора, опирающаяся на многолетний опыт решения большого числа разнообразных задач математической физики. Для большинства рассмотренных в книге задач изложены только наиболее эффективные методы с широкой областью применимости. Несколько методов для одной и той же задачи даны в том случае, если они имеют существенно разные области применимости, или если для данной задачи еще не разработано достаточно удовлетворительных методов.

Часто приходится слышать, что наступила эпоха ЭВМ, а «ручные» расчеты являются архаизмом. На самом деле это далеко не так. Прежде чем поручать ЭВМ большую задачу, надо сделать много оценочных расчетов и на их основе понять, какие методы окажутся эффективными для данной задачи. Конечно, даже в мелких расчетах ЭВМ с хорошим математическим обеспечением и набором периферийных устройств (телетайп, дисплей, графико-построитель) оказывает большую пользу. Однако логарифмическая линейка и клавишные машины еще долго будут необходимы. Поэтому большинство методов, изложенных здесь, в равной мере пригодны для ЭВМ и «ручных» расчетов.

Основное внимание в книге уделено выработке практических навыков у читателя. Поэтому в первую очередь изложены алгоритмы, даны рекомендации по их применению и отмечены «маленькие хитрости»—те незначительные на первый взгляд практические приемы, которые сильно повышают эффективность алгоритма. Теоретическое обоснование методов приведено лишь в той мере, в какой оно необходимо для лучшего усвоения и практического применения.

В книгу включен ряд сведений, не относящихся к необходимому минимуму, но полезных читателю для лучшего понимания тонких деталей вычислительных процессов. Чтобы не увеличивать объем книги и избежать сложных выкладок, эти сведения приведены, как правило, без доказательств, но со ссылками на дополнительную литературу. Некоторые сведения даны в форме задач в конце каждой главы. Предполагается, что читатели знакомы с основами высшей математики, включая краткие сведения об уравнениях в частных производных. Необходимые дополнительные сведения, которые не содержатся в обязательных курсах университетов и вузов, сообщаются здесь в соответствующих разделах.

Книга разделена на главы; параграфы и пункты. В начале каждой главы кратко изложено ее содержание. Нумерация таблиц и рисунков—единая по всей книге, а нумерация формул—самостоятельная в каждой главе. Если ссылка не выходит за пределы данной главы, то указывается только номер формулы; если выходит—то номер главы и номер формулы. В конце книги дан список литературы. Приведенные в нем учебники и монографии рекомендуются для углубленного изучения отдельных разделов. Журнальные статьи даны для указания на оригинальные работы, их список не претендует на полноту; более полная библиография имеется в рекомендованных учебниках.

Общий подход к теории и практике вычислений, определивший стиль этой книги, сложился у меня под влиянием А. А. Самарского и В. Я. Гольдина за много лет совместной работы. Ряд актуальных тем был включен по инициативе, А. Г. Свешникова и В. Б. Гласко. Много ценных замечаний сделали А. В. Гулин, Б. Л. Рождественский, И. М. Соболев, И. В. Фрязинов, Е. В. Шикин и сотрудники кафедры прикладной математической физики МИФИ. В оформлении рукописи мне помогли Л. В. Кузьмина и В. А. Кра-сноярова. Я пользуюсь случаем искренне поблагодарить всех названных лиц, и в особенности Александра Андреевича Самарского.

*Н. Н. Калиткин*