Теория функций комплексной переменной.

Литература:

А.Н. Тихонов, А.Г. Свешников „Теория функций компл. перем."

А.Н. Лаврентьев, Б.В. Шабат „Методы т.ф.к.п."

§ 1 Комплексные числа

Опр Упорядоченную пару a, b действительных чисел будем называть комплексным числом.

$$(a, b) = z \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

Числа $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ наз-ся равными $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

Сложение: суммой $(z_1 + z_2)$ наз-ся число z:

$$z_1 + z_2 \stackrel{def}{=} z \equiv (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$$

Св-ва:

Очевидно 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Вычитание: разностью $(z_2 - z_1)$ наз-ся число z:

$$z + z_1 = z_2$$

$\exists$-ет ли такое z?

обозн $z=(a,b)$, тогда по опр. сложения

$$\begin{cases} a+a_1=a_2 \\ b+b_1=b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=a_2-a_1 \\ \cancel{b+b_1=b_2} \\ b=b_2-b_1 \end{array}$$

т.о. число z опр-ся единственным образом по числам z_1 и z_2

Умножение: $\exists$ задана пара чисел z_1, z_2, тогда произведение:

$$z_1 z_2 = z = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1)$$

~~пр~~

расм. $(0,1)(0,1) = (0\cdot0 - 1\cdot1,\ 0\cdot1 + 1\cdot0) = (-1,0)$ (*)

$(0,1) \equiv i$ (imaginare - мнимый)

будем считать $(a,0) \equiv a$

тогда (*) $\Rightarrow i^2 = -1$

Рассм $ib = (0,1)(b,0) = (0b - 1\cdot0,\ 0\cdot0 + 1\cdot b) =$

$= (0,b)$

Рассм $(a,0) + (0,b) \equiv a + ib$

$= (a,b)$

т.о. $\underbrace{a+ib}_{\text{алгебраическая форма записи}} = \underbrace{(a,b)}_{\text{векторная форма записи}}$

Деление: будем считать, что $z_2 = a_2 + ib_2$; $a_2^2+b_2^2>0$

тогда $\dfrac{z_1}{z_2} \equiv z$: $z_1 = z\cdot z_2$ (**)

$\exists$-ет ли такое z?

обозн. $z_1 = (a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$, $z=(a,b)$

тогда (**) $\Rightarrow$ $(a_1,b_1) = (a,b)\cdot(a_2,b_2)$

$(a_1,b_1) = (a_2a - b_2b,\ ab_2 + ba_2)$

значит $\begin{cases} a_2a - b_2b = a_1 \\ b_2a + a_2b = b_1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2 > 0 \text{ по предп.}$$

значит система имеет единственное решение

$$a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

т.о. $\dfrac{z_1}{z_2}$ определено единственным образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

Определим нуль $\theta = 0 + i\cdot 0$

$\theta = (0,0)$

Далее обычно будем писать $\theta = 0$,

Это соотв. $a = (a, 0)$

т.е. $0 = (0, 0)$ — „грамотно"

Свойства произведения комплексных чисел.

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ — переставочность (коммутатив.)

$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — сочетательность (ассоциат.)

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — распред. з-н умн. отн. сложения (дистрибутив.)

$1 \cdot z = z$

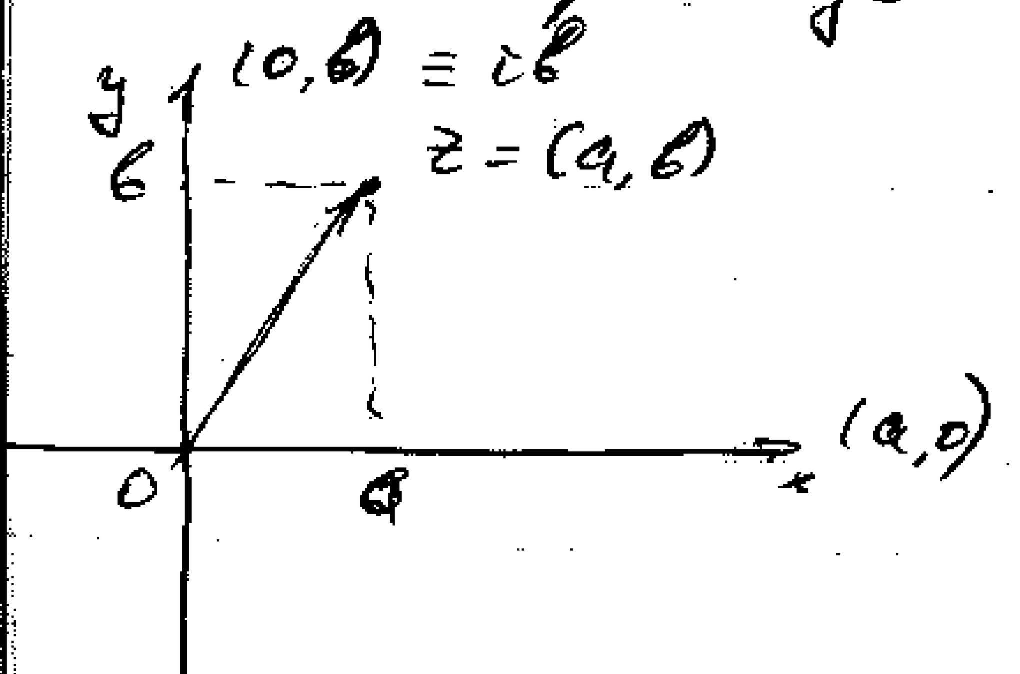
$0 \cdot z = 0$

$(-1) \cdot z \equiv -z \quad \left(-z \overset{def}{=} (-a, -b) \text{ if } z = (a, b)\right)$

Можно доказать эти св-ва используя определение умножения и св-ва действительных чисел

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Расс. прямоуг. дек. сист. (x, y)



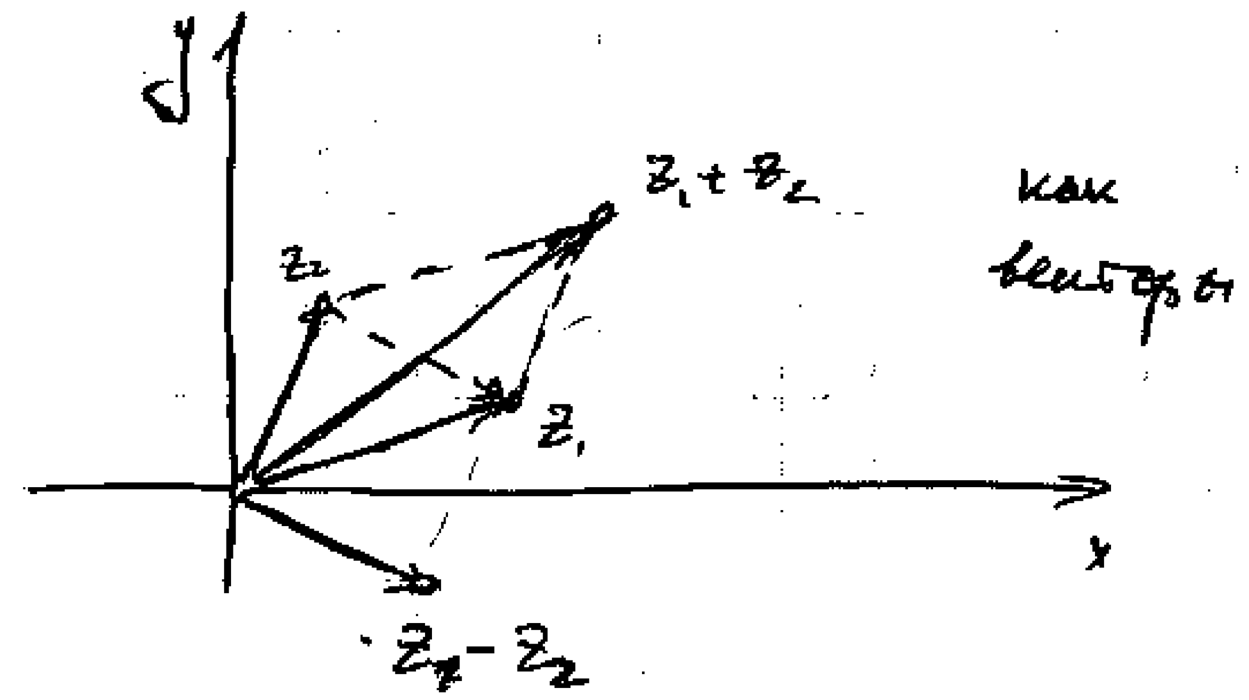
т.е. ∃ ет взаимооднозн. соотв. между компл. числами и плоскостью.

Ox — действительная ось ($\mathbb{R}$ - числа)

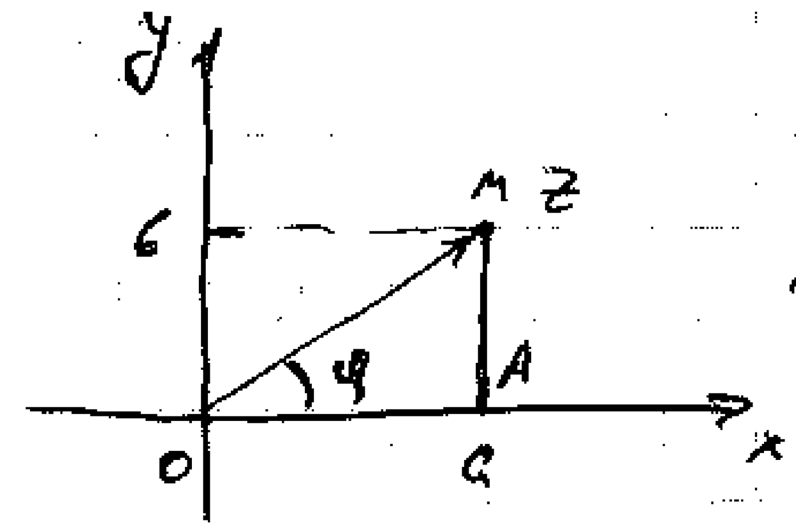
Oy — мнимая ось

числа вида $(0, b) \equiv ib$ — наз-ся (чисто) мнимыми.

Можно интерпретировать компл. число как вектор с началом в начале коорд. и концом в точке z



Тригонометрическая форма записи комплексного числа.



$|z|$ — длина радиус-вектора соотв. z — модуль z

$0 \le \varphi < 2\pi$

Расс. ΔOAM тогда $a = |z| \cos\varphi$, $b = |z| \sin\varphi$

т.о. $z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи

Умножение:

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$

$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\overbrace{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}^{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}, \underbrace{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \right) =$$

$$= |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2), \sin(\varphi_1+\varphi_2) \right)$$

или

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2) \right)$$

при перемножении $z_1 \cdot z_2$ по правилам алгебры получится тоже самое

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \overset{i^2=-1}{=}$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

аналогично можно получить результат деления

Рассм

$$z_1 z_2 = \underbrace{|z_1||z_2|}_{\cancel{|z_1 z_2|}}\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

значит $|z_1|\cdot|z_2| = |z_1 z_2|$

φ - аргумент z $\quad \varphi = \arg z \quad$ если $0 \le \varphi < 2\pi$

? главный аргумент $\quad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n \quad, n \in \mathbb{Z}$

если $0 < \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ $\quad$, то м.б. $\varphi_1 + \varphi_2 > 2\pi$

$$\boxed{\operatorname{Arg} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2}$$

по индукции можно док-ть

$$z_1 z_2 z_3 = |z_1||z_2||z_3| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\right)$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1)$$

Определим операцию извлечения корня

<u>Опр</u> число ξ (кси) ~~...~~ является корнем n-й степени из

числа z если $\zeta^n = z$ (2)

Существует ли такое ζ и сколько их?

Будем решать ур-ние (2)

Запишем ζ в триг. форме

$$\zeta = |\zeta|(\cos\psi + i\sin\psi) \Rightarrow \zeta^n = |\zeta|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) \overset{(2)}{=}$$

$$= z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|\zeta|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (3)$$

тогда $\underline{|\zeta|^n = |z|}$, $\underline{n\psi = \varphi + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$

извлекаем $\sqrt[n]{\ }$ в обл. $\mathbb{R}$-чисел

$|\zeta| = \sqrt[n]{|z|}$ - найден единств. образом

$\psi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, достаточно, чтобы $k = 0, 1, \dots, n-1$

тогда $\zeta_k^* = \sqrt[n]{z}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ (4)

if $z \neq 0$ все ζ_k - различны.

(как док-во)

Пр положим $k = n$

$$\zeta_n = \sqrt[n]{z}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \zeta_0$$

if $z = 0 \Rightarrow |z| = 0$ $\quad \sqrt[n]{|z|} = 0 \Rightarrow \zeta_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Отметим $0 \le \frac{\varphi + 2\pi k}{n} < 2\pi$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

$\exists$ $0 \le \varphi < 2\pi$

$$\frac{2\pi k}{n} \le \frac{\varphi + 2\pi k}{n} < \frac{2\pi (k+1)}{n}$$

$\exists$ $0 \le k \le n-1$

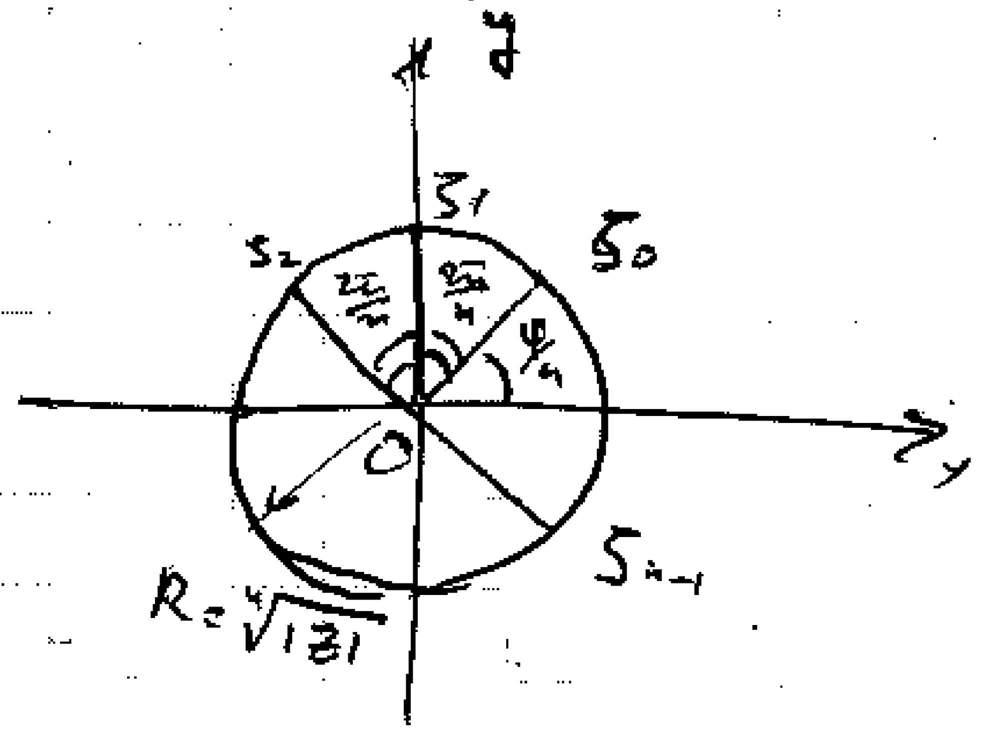
$$0 \le \frac{2\pi k}{n} \le \frac{\varphi + 2\pi k}{n} < \frac{2\pi (k+1)}{n} \le 2\pi$$ ч.т.д.

Для комплексного числа $\ne 0$ $\exists$-ет n различных корней n-й степени, но при этом имеют одинаковые модули

(1) $\Rightarrow$ $|\zeta_k^*| = \sqrt[n]{|z|}$

$$\arg \zeta_k = \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Все корни можно изобразить на пл-ти, на окр-ти радиуса $\sqrt[n]{|z|}$

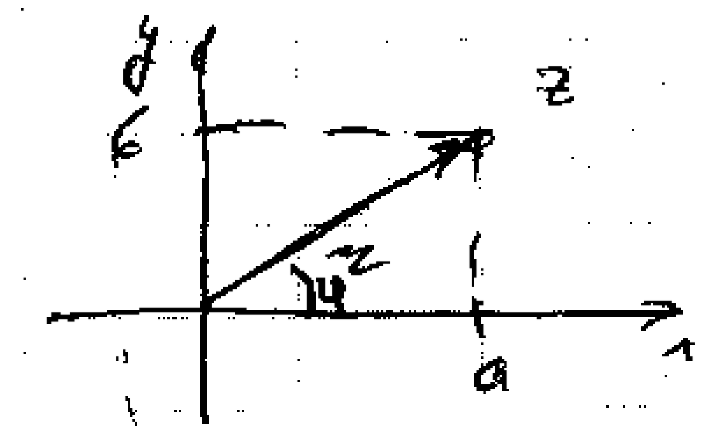


17.02.06

Лекция № 2.

Показательная форма комплексных чисел

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $r = |z|$; $z \ne 0$



$z = a + ib$

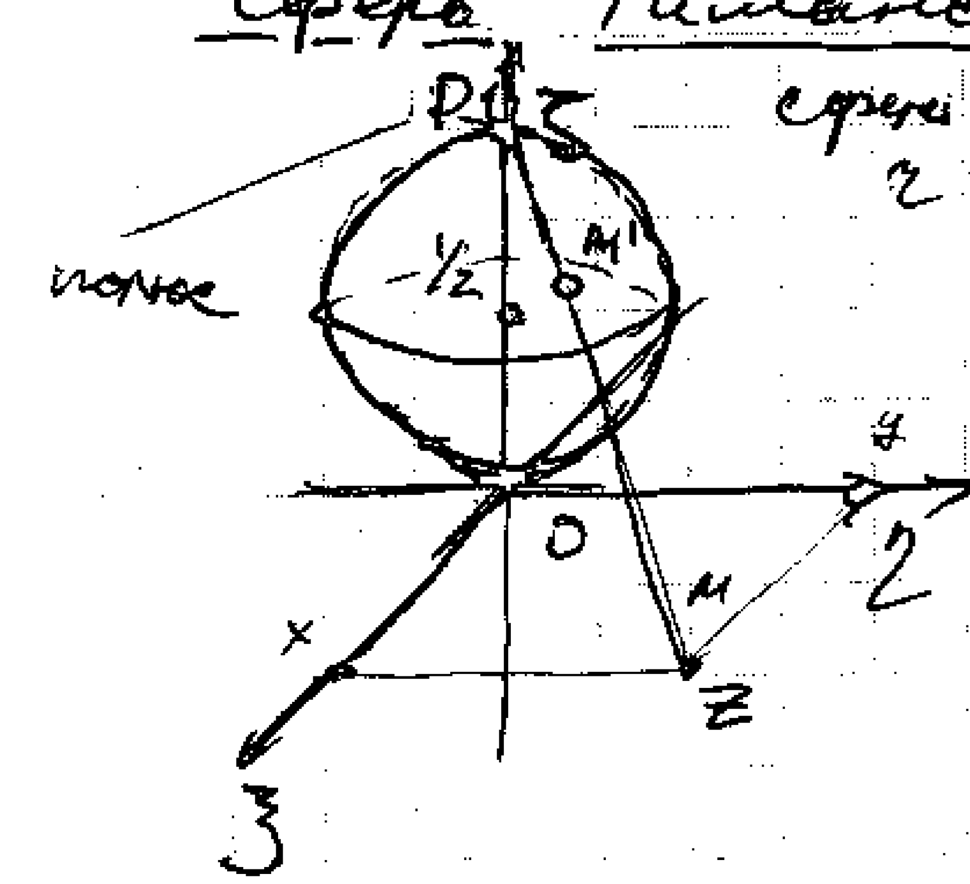
$0 \le \varphi < 2\pi$ $\Phi = \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Будем считать

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}$$

т.о. $z = r e^{i\varphi}$ — показательная форма.

Сфера Римана



сферы $r = 1/2$ центр $(0, 0, 1/2)$ M' — т. пересеч. сф. и Pz

$z = x + iy$

$M'(\xi, \eta, \zeta)$;

$P(0,0,1)$; $M(x, y, 0)$

$\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{MM'}$ $\overrightarrow{PM} = (x, y, -1)$; $\overrightarrow{MM'}(\xi - x, \eta - y, \zeta)$

тогда $\frac{\xi - x}{x} = \frac{\eta - y}{y} = -\zeta \Rightarrow \xi = x - x\zeta$, $\eta = y - y\zeta$

$M' \in$ сф. Римана т.о. $(\xi-0)^2+(\eta-0)^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$

$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta$

подст. ξ и η тогда

$$x^2(1-\zeta)^2+y^2(1-\zeta)^2+\zeta^2=\zeta$$

$$x^2(1-\zeta)^{\cancel{2}1}+y^2(1-\zeta)^{\cancel{2}1}=\zeta\cancel{(1-\zeta)}$$

для M' $\zeta \neq 1$ т.о. $1-\zeta \neq 0$

О.

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}=-1+\frac{1}{1-\zeta}$$

т.о. $y^2+x^2+1=\frac{1}{1-\zeta}$

$1-\zeta=\frac{1}{x^2+y^2+1}$, т.о. $\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}$

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

т.о. $\exists$ взаимоодн. соотв между комплексными и точками сферы, кроме P.

$\mathbb{C}$ – мн-во компл. чисел, добавим бесконечно уд. точку

$\mathbb{C}+\{\infty\}$ $\{\infty\}$ – соотв P

т.о. мн-во $\mathbb{C}+\{\infty\}$ взаимооднозн. соотв сф. Римана

на компл. пл-ти $\exists!$ $\{\infty\}$ (беск. удаленная точка)

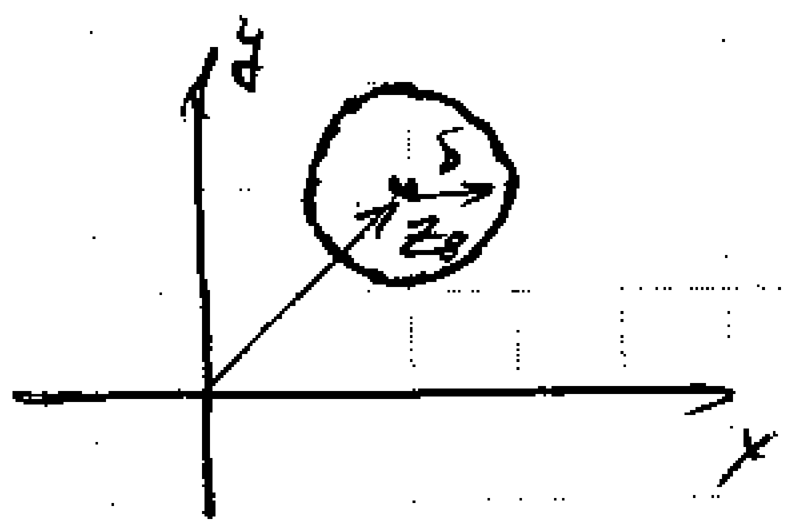
ζ –

§2 Предел последовательности комплексных чисел.

Окрестность комплексного числа $z_0 = x_0 + iy_0$, $\delta > 0$

$$O_\delta(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta \}$$ - окрестн. -

- открытый круг, радиуса δ с центром в z_0



$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

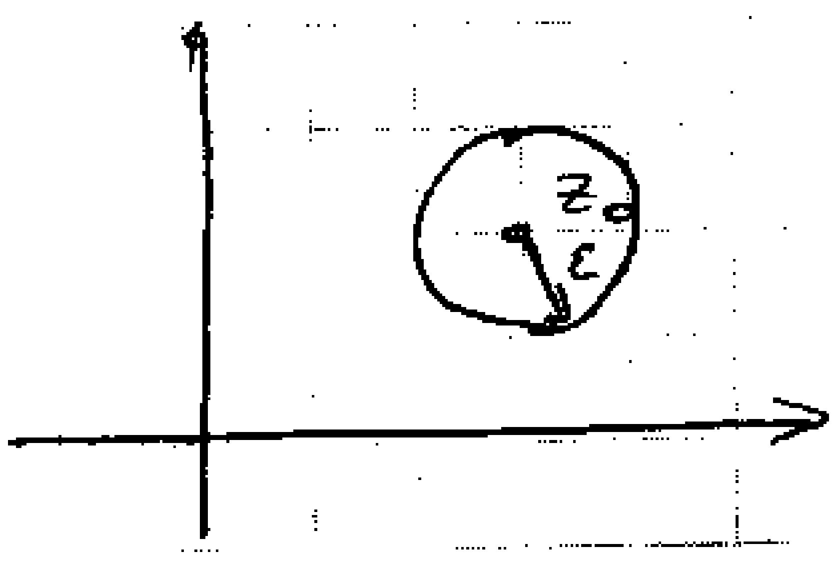
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$ (внутр. окружн.)

Пусть заданы

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{z_n\}$, z_0

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ | $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0 : |z_n - z_0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

можно так $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0 : z_n \in O_\varepsilon(z_0) \ \forall n \geq n_0$



$z_n = a_n + i b_n$

Теор 1

Для того, чтобы $\lim z_n = z_0$ н. и д., чтобы $\lim a_n = x_0$, $\lim b_n = y_0$

Для док-ва

$$|z_n - z_0| \le \varepsilon \iff \sqrt{(a_n - x_0)^2 + (b_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

значит $0 \le |a_n - x_0| \le \sqrt{(a_n - x_0)^2 + (b_n - y_0)^2} < \varepsilon$

$0 \le |b_n - y_0|$ — " —

с др. стор. $0 \le \sqrt{(a_n - x_0)^2 + (b_n - y_0)^2} \le \underbrace{|a_n - x_0|}_{\to 0} + \underbrace{|b_n - y_0|}_{\to 0}$

Теор 2

Для того, чтобы $\lim z_n = z_0$

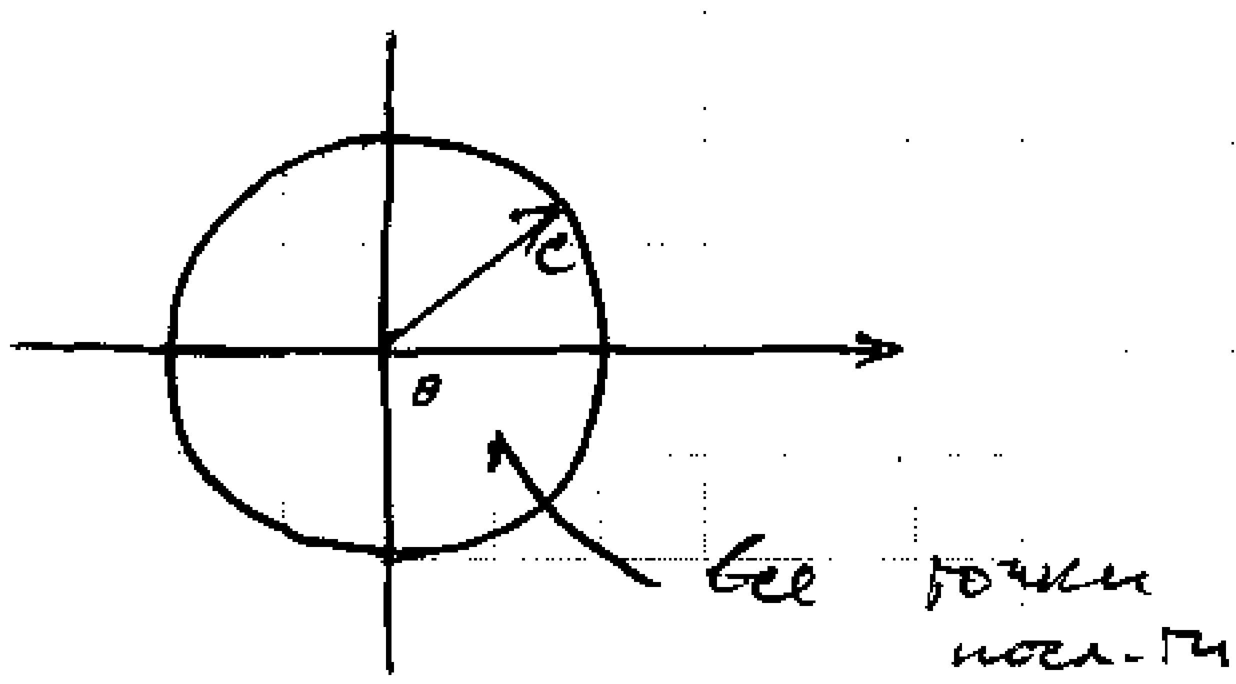
Н и Д, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_\varepsilon$ и $\forall m \in \mathbb{N}$.

с пом Т 1 сводим к кр. Коши для посл-тей действ. чисел.

Опр

Последовательность $\{z_n\}$ - ограничена, if

$$\exists C > 0 : |z_n| < C, \forall n \in \mathbb{N}$$



Теор 3 (аналог теор. Больцано-Вейерштрасса)

Если посл-ть $\{z_n\}$ огр., то $\exists$-ет п/посл-ть z_{n_k} :

$$\exists \lim_{k \to \infty} z_{n_k} = z_0 \in \mathbb{C}$$

§3 Предел функции комплексной переменной.

Пусть задано мн-во $E \subset \mathbb{C}$ и $\forall z \in E$ $\exists w \equiv f(z) \in \mathbb{C}$

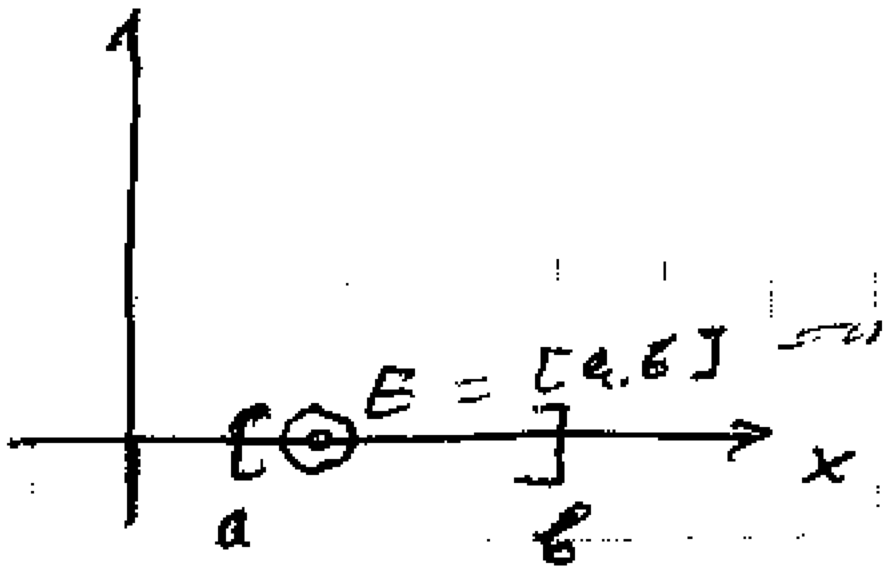
тогда говорят, что задана ф-я f с обл. опред. E, мн-во значений f лежит в $\mathbb{C}$

$f(E)$ - мн-во значений, если $\forall w \in f(E)\ \exists z \in E : f(z) = w$

Т. z_0 наз-ся внутренней для мн-ва E

если $\exists O_\delta(z_0) \subset E$
$(\exists \delta > 0)$

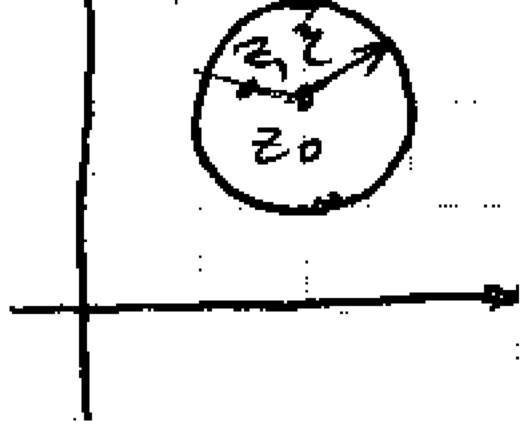
Пр.



в E нет ни одной внутренней точки

Мн-во $E \subset \mathbb{C}$ наз-ся **открытым** если все его точки — внутренние

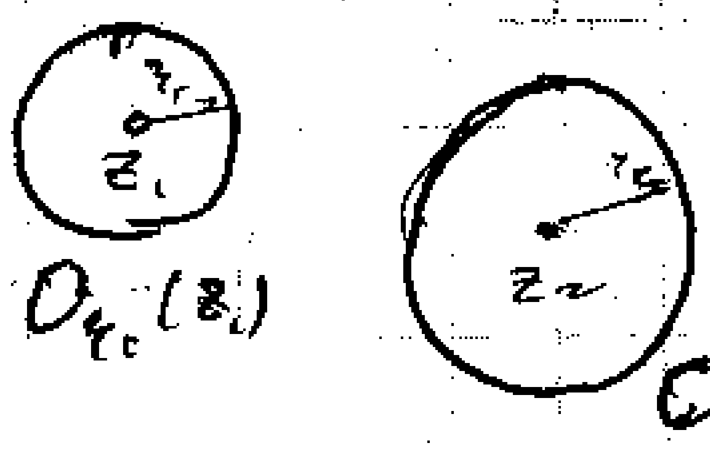
Пр.

1) 

рассм. открытый круг $O_r(z_0)$

возьм $z_1 \in O_r(z_0)$

$\rho(z_0, z_1) < r$ $\quad (\delta = r - |z_1 - z_0| > 0)$

2) 

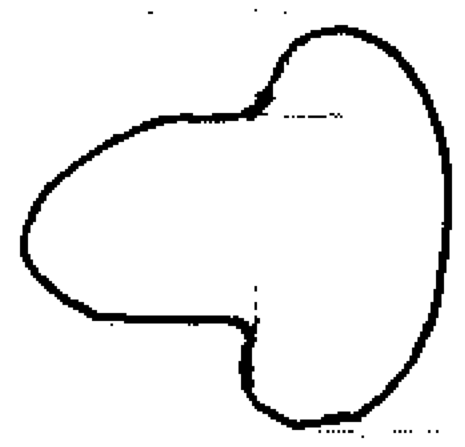
— несвязное мн-во

если $O_{r_1}(z_1) \cap O_{r_2}(z_2) = \varnothing$

то. мы рассм. $O_{r_1}(z_1) \cup O_{r_2}(z_2)$

Опр Мн-во $E \subset \mathbb{C}$ наз-ся <u>связным</u> if $\forall$ две точки $z_1, z_2 \in E$ можно соединить кривой $\Gamma_{z_1 z_2} \subset E$

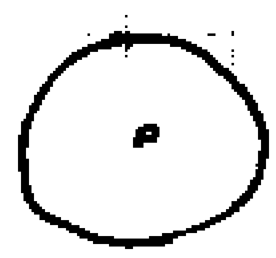
пр связного мн-ва



Опр Мн-во $E \subset \mathbb{C}$, наз-ся <u>областью</u>, if E - открыто и связно

пр

Открытый круг - область



$O_\varepsilon(z_0)$ $\forall \varepsilon > 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$

Опр* (по Коши)

Пусть G - обл, $G \subset \mathbb{C}$ и т. $z_0 \in G$

задана

$f: G \to \mathbb{C}$ м.б. и так $f: G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$

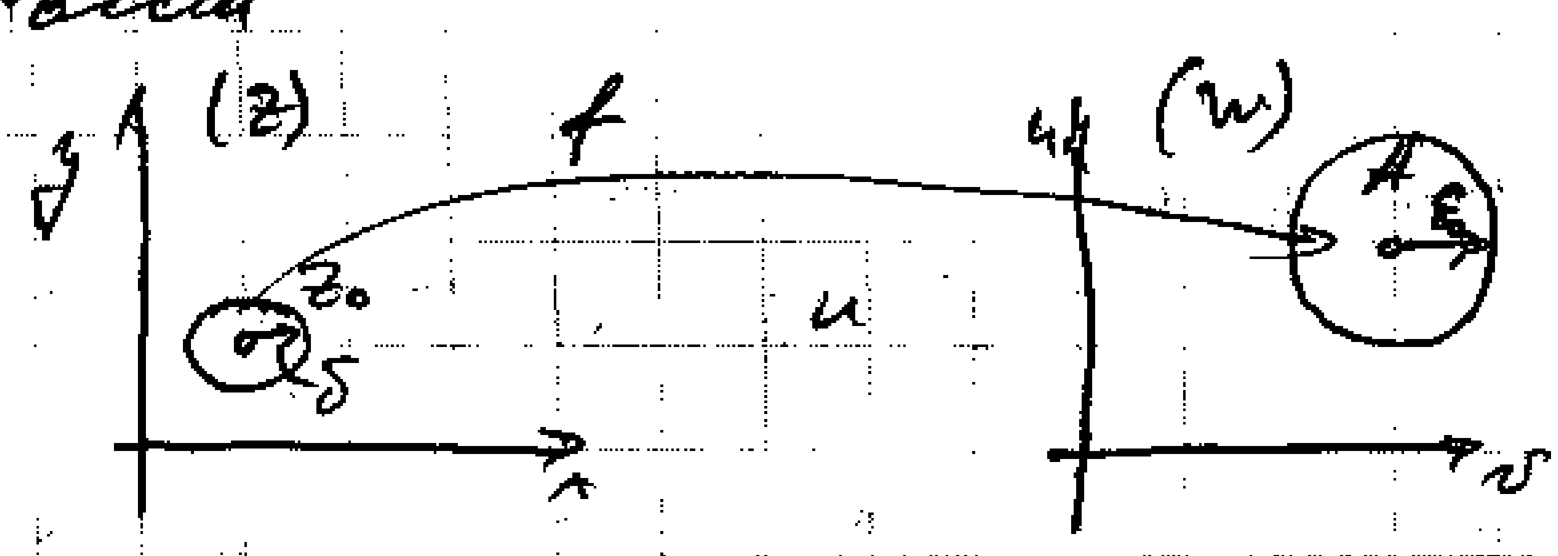
тогда

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(z) - A| < \varepsilon \quad \forall z \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$$

(z) - z-плоскость

Рассм



~~тогда~~ м. найти круг $O_\delta(z_0)$:

$f(O_\delta(z_0)) = O_\varepsilon(A)$

Опр** (как Гейне)
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z_0) = A$ | $\forall z_n \to z_0,\ z_n \neq z_0 \Rightarrow \exists \lim f(z_n) = A$

Опр* $\Leftrightarrow$ Опр**

Если $\exists$-ет $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$

наз-ся производной ф-и f в т. z_0

каким усл- должны удовл действ. и мним. части f, чтобы $\exists$-ла $f'(z_0)$

Обозн
$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$
$(z = x + iy)$
$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$

т.о. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Теор 1

Если $\exists\ f'(z_0)$, то $\exists$-ют
$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ в т. } (x_0, y_0)$$

Условия Коши - Римана

Док - во

1) Л $\Delta z \equiv \Delta x \in R$

тогда $f(z_0+\Delta x) - f(z_0) = u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) +$
$+ i\,(v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))$

рассм $\underbrace{\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}}_{(*)} = \underbrace{\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}}_{(**)} +$

$$+\ i\cdot \underbrace{\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}}_{(***)}$$

т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} *$ $\exists$-ет, $\exists$-ют $\lim(**)$ и $\lim(***)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}}_{\frac{\partial u}{\partial x}} +$$

$$+\ i\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}}_{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \equiv$$

$$\equiv f'(z_0) \qquad (2)$$

2) Пусть $\Delta z \equiv i\Delta y$; $f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)=$

$$= u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\,[v(x_0,y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)]$$

$$\lim_{i\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y} \underset{\text{т.к. } |i\Delta y|=|\Delta y|}{=} \lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x_0, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+\right.$$

$$\left. + \frac{v(x_0, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}\right] = -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\equiv f'(z_0) \qquad (3)$$

из (2) и (3) $\Rightarrow$ $-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ в т. (x_0,y_0) (4)

т.о. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\longrightarrow$ рав-ва (1)

ч.т.д.

т.о. Из $\exists$-е производной в т. z_0 вытекает, что вып. усл. Коши - Римана в т. z_0

<u>Теор 2</u> (дост. усл. $\exists$-е произв)

Если для ф-и $f(z)\equiv u(x,y)+i\,v(x,y)$ в т. (x_0,y_0) ф-и $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и удовлетворяют усл. Коши - Римана (1), то $\exists$-ет производная $f'(z_0)$, $z_0=x_0+iy_0$

<u>Док-во</u>

Запишем усл. диф-ти u и v в т. (x_0,y_0):

$$\Delta u(x_0,y_0)\equiv u(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$

$$\Delta v(x_0,y_0)\equiv\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\eta(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho$$

$\lim\limits_{\rho\to 0}\eta(\Delta x,\Delta y)=0$

Исп. усл Коши–Римана

$$\Delta v(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\,)\cdot\rho$$

рассм.

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] +$$
$$+ i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] =$$

$$= [\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y}_{-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho] + i[\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}_{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y} + \eta\rho] =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + [-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x] + (\varepsilon + \eta)\rho =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + i\frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{[\Delta x + i\Delta y]}_{\Delta z} + (\varepsilon + \eta)\rho$$

рассм. $$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon + \eta)\frac{\rho}{\Delta z}$$

При $\Delta z \to 0$ получим $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$

$$\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$$

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \equiv f'(z_0)$$

ч.т.д.

Опред

Функция $f(z)$ наз-ся регулярной в обл $G \in \mathbb{C}$ iff у нее в G $\exists$-ет непрерывная производная

ф-я $\varphi(z)$ непрерывна в т. z_0 iff

$\exists \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ (ф-я опред в т. z_0)

Теор 3

$\exists$ ф-я $f(z) \equiv u(x,y) + i\,v(x,y)$ такова, что ф-и u и v непрерывно дифференц-мы ~~в обл G~~ в т. (x_0, y_0). Тогда производная $f'(z_0)$ $\exists$ тогда и только тогда, когда в т. (x_0, y_0) выполняется условие Коши - Римана.

Н. $\forall$ $\exists$-ет произв $\xRightarrow{T1}$ вып усл К-Р

Д. $\forall$ u и v непр. дифф-мы в $(x_0 y_0)$ $\xRightarrow{T2}$ $\exists$ ет $f'(z_0)$

Пр

$z = x + iy \quad ; x, y \in \mathbb{R}$

1) $e^z \overset{def}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$

$u = e^x \cos y \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$

$v = e^x \sin y$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

u и v уд. усл Т3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

т.о. по Т3 e^z имеет произв в $\forall$ точке

$$f'(z) = u'_x + i v'_x$$

т.о. $(e^z)' = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$

г) $\cos z \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

$\sin z \overset{def}{=} \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}$

$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)i}{e^{iz} - e^{-iz}}$

$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$

$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$

<u>Предложение 1</u>

Если ф-и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ диф-мы в т. $z_0 \in \mathbb{C}$, то

$f_1(z) \pm f_2(z)$,
$f_1(z) \cdot f_2(z)$,
$\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (if $f_2(z_0) \neq 0$)

диф-мы в т. z_0, и при этом

1) $\left(f_1(z) \pm f_2(z)\right)'\Big|_{z_0} = f_1'(z_0) \pm f_2'(z_0)$

2) $\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right)'\Big|_{z_0} = f_1'(z_0) \cdot f_2(z_0) + f_1(z_0) \cdot f_2'(z_0)$

3) $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)'\Big|_{z_0} = \frac{f_1'(z_0) \cdot f_2(z_0) - f_1(z_0) \cdot f_2'(z_0)}{\left(f_2(z_0)\right)^2}$

$f_2(z_0) \neq 0$

26.02.06.

Лекция №3

Предложение 2

Пусть ф-и $f(z)$ регулярна в т. z_0, т.е. её производная $f'(z)$ $\exists$-ет и непр в некот. окр-ти т. z_0, а ф-я $\varphi(w)$ диф-ма на мн-ве значений ф-и $f(z)$, тогда сложение ф-я

$$F(z) = \varphi(f(z)) \text{ диф-ма в т. } z_0,$$

причем $F'(z_0) = \varphi'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Предложение 3

Пусть ф-ция $w = f(z)$ имеет производную в окр-ти т. z_0, непрерывную в самой z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$, тогда у ф-и $w = f(z)$ в некоторой окр-ти т. $w_0 = f(z_0)$ $\exists$-ет обратная ф-я

$z = \varphi(w)$, которая удовл. усл. $z_0 = \varphi(w_0)$ и диф-ма в т. w_0, причем производная

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Док-во

запишем $w = u + iv$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
if $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

тогда вместо $w = f(z)$ м. б. написано $(1)\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ $(x,y) \in U_{z(x,y)}$

Из предполож. теор. вытекает, что u и v непр. дифф-мы в т. (x_0, y_0) (т.к. $f(z)$ имеет произв. в окр. т. z_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

уд. усл. Коши-Римана

расс. якобиан

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \overset{\text{усл.К-Р}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Bigg|_{(x_0,y_0)} =$$

$= |f'(z_0)|^2 \neq 0$ по предп. теор.

т.о. для предп. (1) вып. усл. теоремы из мат. ан-а, что $\exists$-ет обратное отображение:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$ опред. в δ окр-ти т. (u_0, v_0)

$(u, v) \in U_\delta(u_0, v_0)$

$w_0 = u_0 + i v_0$ и $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$

т.о. $\exists$-ет $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = \frac{1}{\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}}$

Рассм. $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left.\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|_{z=z_0}$

$w = f(z)$ $\quad \Delta w = w - w_0 = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left.\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta w \to 0} \left.\frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta w}}\right|_{w=w_0} = \frac{1}{\varphi'(z_0)}$$

усл. $\Delta z \to 0 \iff \Delta w \to 0$ т.к. непр. обратная и прямая ф-я

ч.т.д.

Предложение 4

Если ф-я $f(z) \equiv u(x,y) + i v(x,y)$ регулярна в обл $G \subset \mathbb{C}$, то $v(x,y)$ опр-ся через $u(x,y)$ единственным образом (в G).

Док-во

возьм $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$

выразим дифф-лы через усл. Коши-Римана

т.о. $dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ $\quad$ dv выражен через u

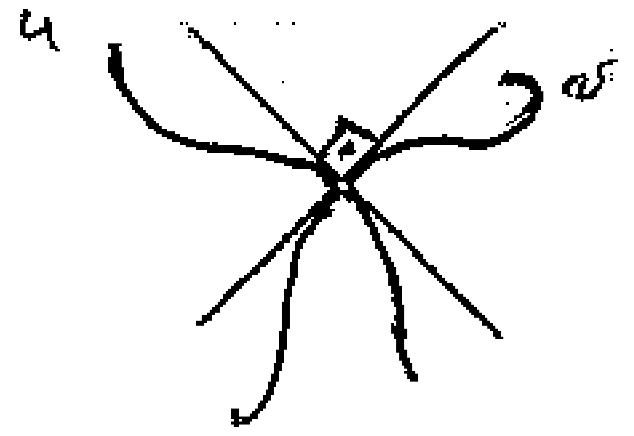
значит v м.б. восстановлена через u с точностью до константы

$$v(x,y) = \underbrace{\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx}_{\text{полный д-л.}} + \underbrace{v(x_0,y_0)}_{\text{const}}$$

чтд

Предложение 5

if ф-я $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ рег. в обл $G \subset \mathbb{C}$, то кривые $u(x,y) = c_1$ и $v(x,y) = c_2$ взаимноортогональны в т. пересеч.



Док-во

Возьмем $\underset{\left(\frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\operatorname{grad} u} \cdot \underset{\left(\frac{\partial v}{\partial x},\, \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\operatorname{grad} v} = \frac{\partial u}{\partial x} \underset{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \underset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \;(=)$

исп. усл. Коши-Римана

$(=) \; -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

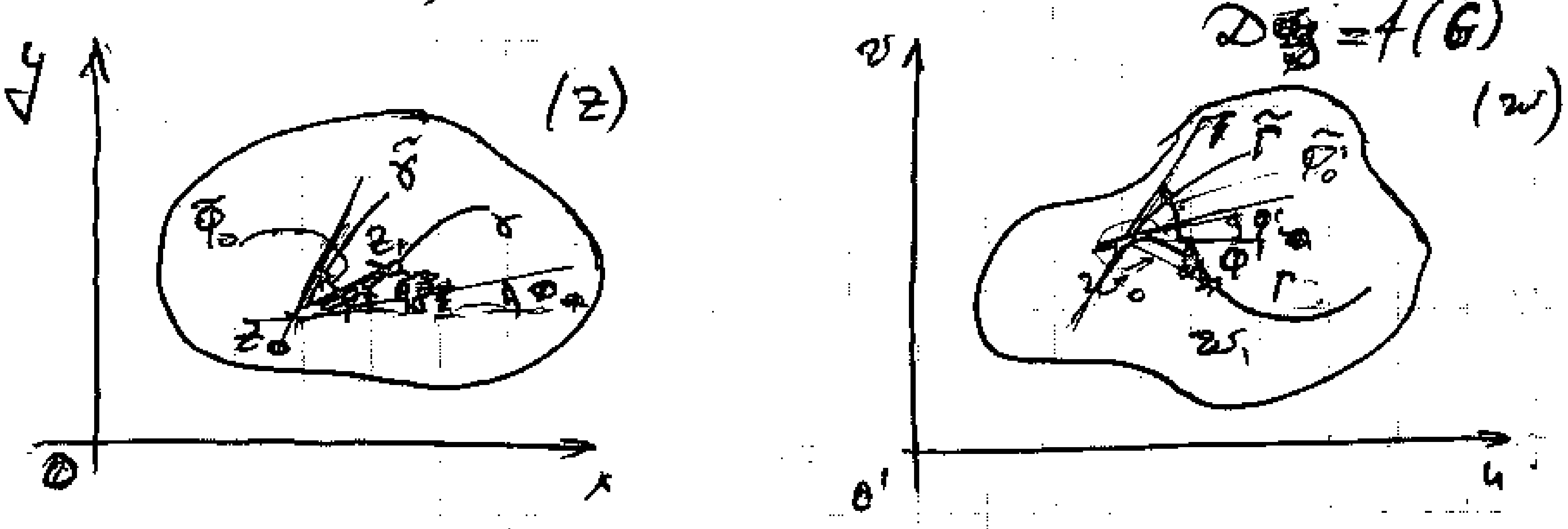
$u(x,y) = c$ - линии уровня

§4 Геометрический смысл производной (модуля и аргумента производной) ф-и комплексной переменной

$w = f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$

$z_0 \in \tilde{\gamma}$
$\alpha = \varphi_0$ φ_0
$z_0 \in \gamma$

$z_1 - z_0$ - вектор



$w_0 = f(z_0)$
$w_1 = f(z_1)$

$w_1 - w_0$

$\tilde{\Gamma} = f(\tilde{\gamma})$

$\beta = \tilde{\varphi}_0' - \varphi_0'$

$\forall f$ - рег, то $D = f(G)$ - обл.

предп. $\exists$-ет $f'(z_0) \neq 0$, тогда $f'(z_0) = r e^{i\varphi}$

$r = |f'(z_0)|$, $\varphi = \arg f'(z_0)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

где $\Delta z = z_1 - z_0$, $\Delta w = w_1 - w_0$

ранее установлено $f_1 \cdot f_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

т.о. $\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} [\arg \Delta w - \arg \Delta z] =$

$$= \lim_{z_1 \to z_0} [\underbrace{\arg (w_1 - w_0)}_{\Phi'} - \underbrace{\arg (z_1 - z_0)}_{\Phi}]$$

$$\varphi = \underbrace{\lim_{w_1 \to w_0} \Phi'}_{\Phi_0'} - \underbrace{\lim_{z_1 \to z_0} \Phi}_{\Phi_0} = \Phi_0' - \Phi_0$$

φ - угол на кот поворачивается кривая при отобр f ($\exists$ $Ox \parallel Ou$)

с др стор. $\varphi = \tilde{\Phi}_0' - \tilde{\Phi}_0$ т.о. $\Phi_0' - \Phi_0 = \tilde{\Phi}_0' - \tilde{\Phi}_0$

$$\underbrace{\tilde{\Phi}_0' - \Phi_0'}_{\text{угол между образами}} = \underbrace{\tilde{\Phi}_0 - \Phi_0}_{\text{угол между кривыми}}$$

т.о. угол между кривыми и между образами сохр.

т.о. $\exists$ у ф-и в данной т. $\neq 0$ отобр эта точка обладает св-вом сохр углов

$\Phi_0' = \Phi_0 + \varphi_1$ угол поворота

Если смысл аргумента

Геометрия - св-во модуля

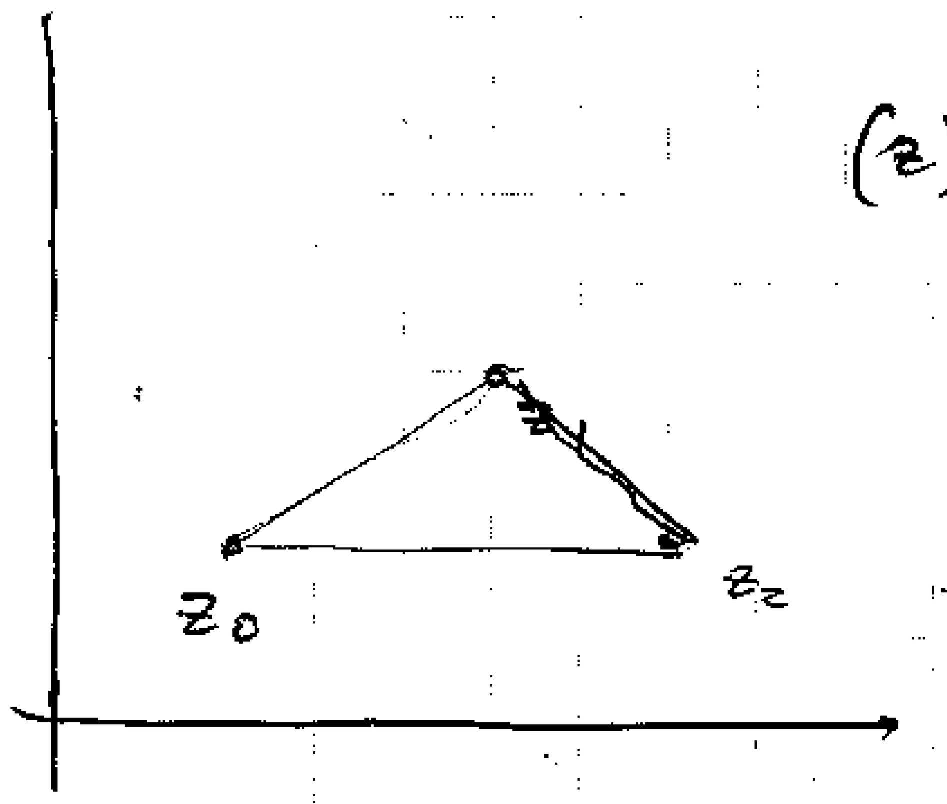
$f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ то $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} =$

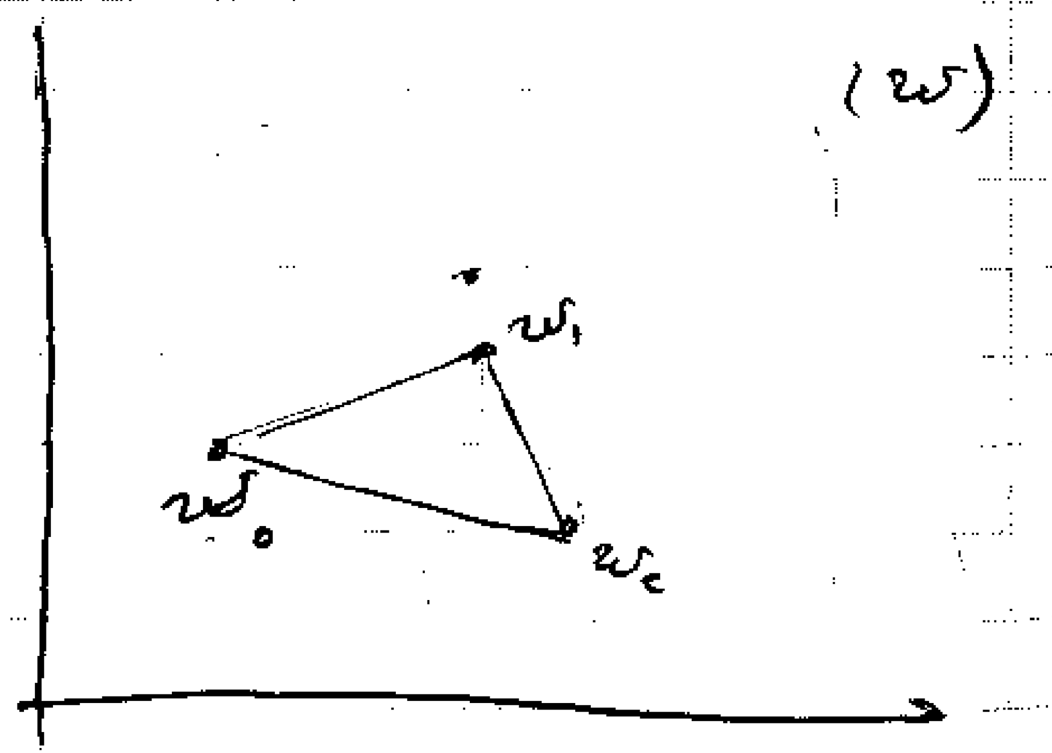
$= \lim\limits_{z_1\to z_0} \frac{|w_1 - w_0|}{|z_1 - z_0|} = k$ обозн

$\frac{|w_1 - w_0|}{|z_1 - z_0|} = k + \bar{o}(1)$, $z_1 \to z_0$

пренебрегаем $\bar{o}(1)$!

$|w_1 - w_0| \approx k\,|z_1 - z_0|$ - независимо от того, каким образом $z_1 \to z_0$





$\Delta z_0 z_1 z_2$ подобен $\Delta w_0 w_1 w_2$ (с точностью до беск. малых)

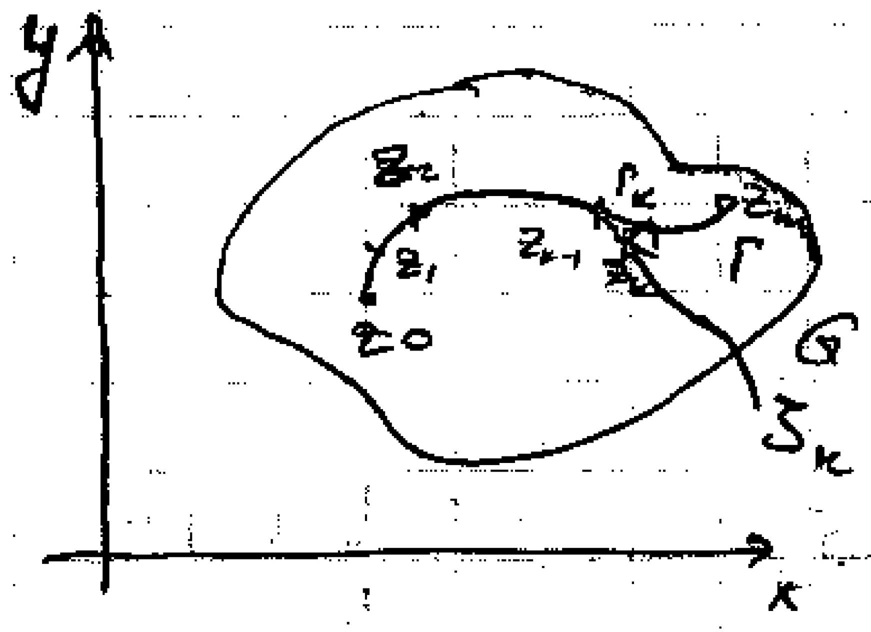
Свойство постоянства растяжений

модуль производной - коэффициент растяжения б.м. отрезка исходящего у z_0

~~3.03~~ 3.03.06

Лекция № 4

§5 Интеграл по кривой на комплексной плоскости.



$\Gamma = \{ z = z(t),\ a \le t \le b \}$

компл. ф-я

т.к. $z = x + iy$

, то $z = x(t) + iy(t)$

тогда $\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$

Предположим, что в т. Γ задана ф-я $f(z)$, $z \in \Gamma$

тогда опред. $\int_\Gamma f(z)\,dz$

Рассм. разб. $\tau = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \}$

$|\tau| = \max\limits_{1\le k\le m} (\Delta t_k)$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

Рассм. точки $z_k = z(t_k)$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

Обозн. Γ_k — часть Γ между z_k и z_{k-1}

$\Gamma_k = \{ z = z(t),\ t_{k-1} \le t \le t_k \}$

тогда $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$ выбираем $\zeta_k \in \Gamma_k$

Сост. интегральную сумму :

$$\sigma_\tau(f,\zeta) = \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad , \zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^{m} \text{ - выборка}$$

Пусть Γ - кусочногладкая (т.е. всю кривую можно разбить на конечное число частей, им непр касат)

Рассм $I = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f,\zeta) = \int\limits_\Gamma f(z)dz \quad (1)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad : \quad |\sigma_\tau(f,\zeta) - I| < \varepsilon, \ \forall \tau \ (|\tau| < \delta), \ \forall \zeta$$

if $f(z)$ - непр ф-я на Γ, то интеграл (1) $\exists$-ет

Запишем σ более подробно, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$

$$z_k = x(t_k) + iy(t_k)$$

тогда $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k \qquad , \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$

$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)$$

Т.О. $\sigma_\tau(f,\zeta) = \sum\limits_{k=1}^{m} [u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right)}_{(*)} +$$

$$+\,i\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\big(v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\big)}_{(**)}$$

$$(*)=\int_\Gamma u\,dx+v\,dy\qquad;\ (**)=\int_\Gamma v\,dx+u\,dy$$

усл. $\exists$-е $(*)$ и $(**)$ рассм. ранее (if u и v кусочн. непр. по инт. $\exists$-ют)

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau(f,\xi)=\lim\Big(\sum u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k\Big)+i\lim\Big(\sum v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k\Big)=$$

$$=\boxed{\int_\Gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\Gamma v\,dx+u\,dy=\int_\Gamma f(z)\,dz}\qquad(2)$$

<u>Свойства:</u>

1) $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz=-\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)\,dz$ т.к. $(*)$ и $(**)$ обладают такими св-вами

2) $\displaystyle\int_\Gamma\big(c_1f_1(z)+c_2f_2(z)\big)dz=c_1\int_\Gamma f_1(z)\,dz+c_2\int_\Gamma f_2(z)\,dz$

(след. из св-в криволин. инт-лов II рода)

3) $\displaystyle\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$

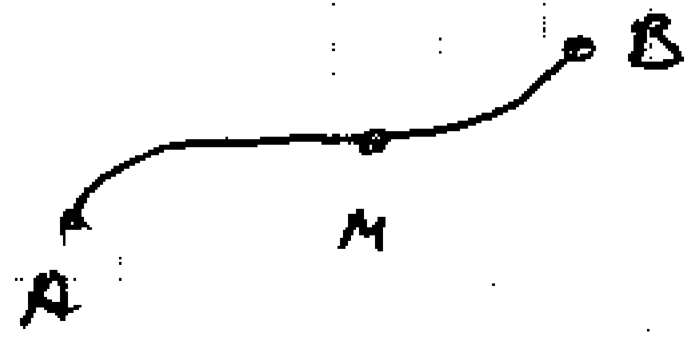
$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 

4) $\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \le \int_\Gamma |f(z)|\,ds$

криволин. 1-го рода интеграл от действит. ф-и $|f(z)|$

$s(t)$ – длина дуги

$M = M(z(t))$



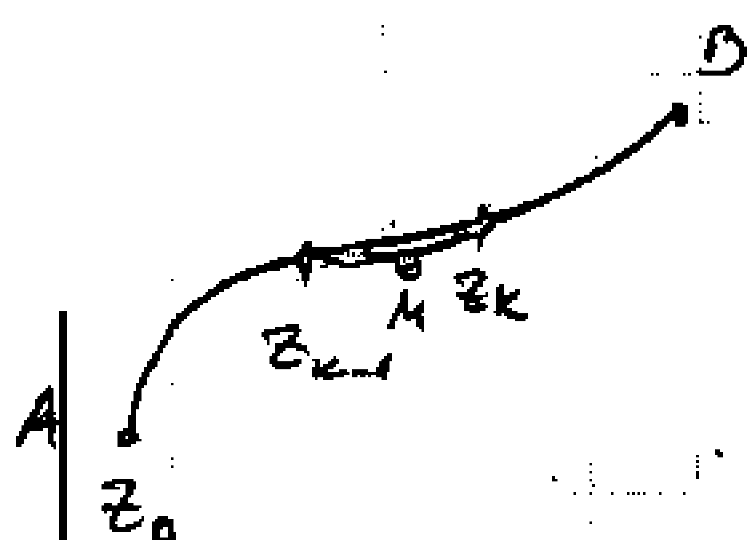
Док-во

Заметим $\sigma_\tau(f,\zeta) = \left| \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)\Delta z_k \right| \le$

$\le \sum_{k=1}^{m} |f(\zeta_k)||\Delta z_k|$

рассм: $|\Delta z_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \le |\overset{\smile}{z_{k-1} z_k}| = \Delta s_k$

длина дуги Γ между z_{k-1} и z_k



s_k = дл. $\overset{\smile}{z_0 z_k}$

$s(t) = |\overset{\smile}{AM(t)}| = |\overset{\smile}{z(a) z(t)}|$

$|\sigma_\tau(f,\zeta)| \le \sum_{k=1}^{m} |f(\zeta_k)|\Delta s_k$

тогда $\lim_{|\tau| \to 0} |\sigma_\tau(f,\zeta)| = \left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \le \int_\Gamma |f(\zeta_k)|\,ds$

5) $\exists\ \Gamma = \varphi(\gamma)$,

$\gamma = \{ z = z(\alpha),\ \alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1 \}$

$\Gamma = \{ w = \varphi(z(\alpha)),\ \alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1 \}$ в ~~этом~~ случае говорят Γ - образ γ

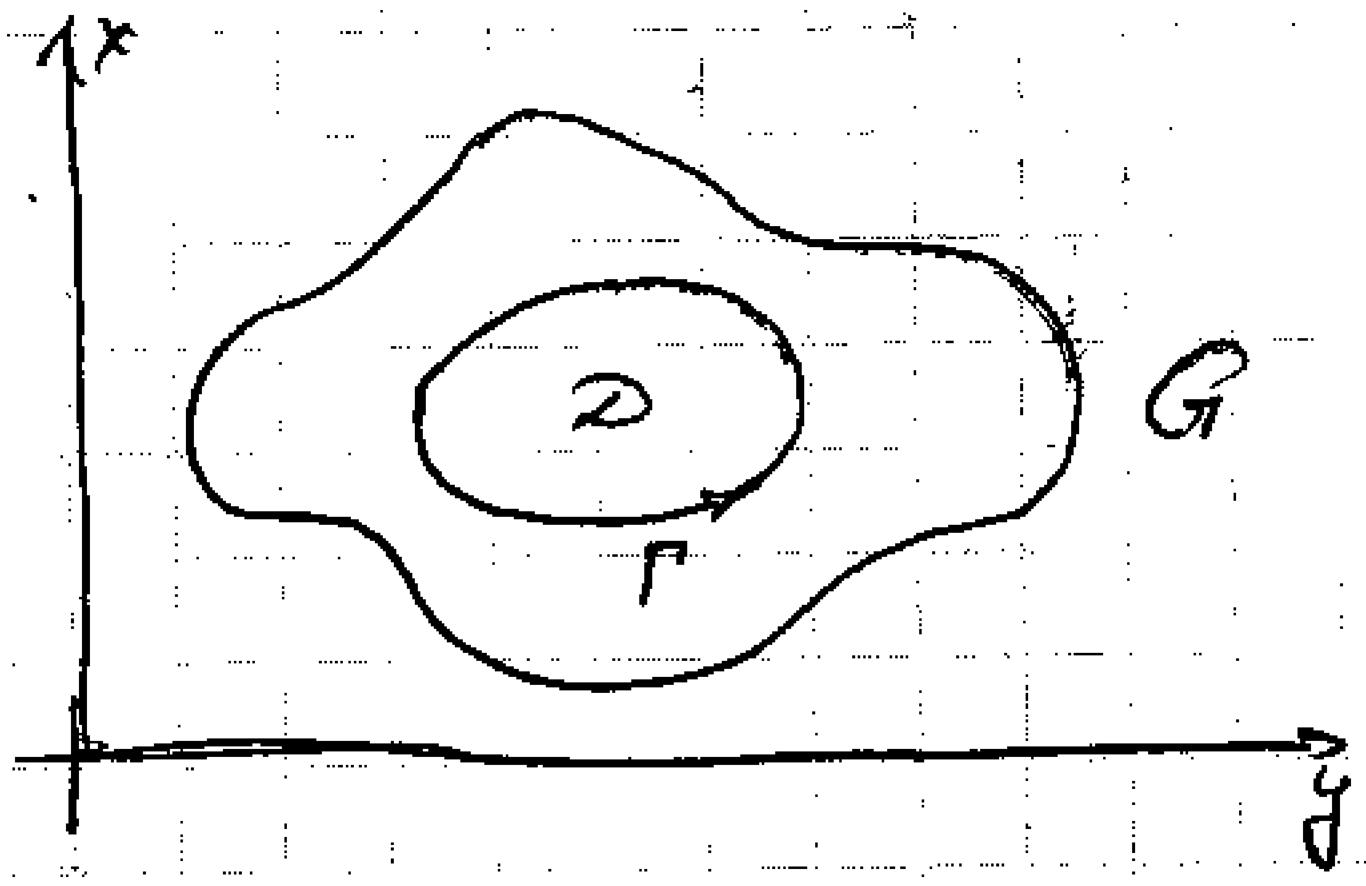
if: $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(\varphi(\zeta))\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta$

$\left(\int\limits_{\Gamma} f(w)\,dw \overset{\text{лучше так}}{=} \text{———} \ '' \ \text{———} \right)$

подст $w = \varphi(z)$, $dw = \varphi'(z)\,dz$

тогда им $\int f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$

§6 Теорема Коши.



G - односвязная обл

$f(z)$ - рег ф-я в G

$\Gamma \subset G$, Γ-кусочно глад.

Γ - замкнутый контур

внутр $\forall$ контура $\subset G$

Теорема 1 (Коши) При сформулированных усл справедливо рав-во

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad (1)$$

(не завис от напр.)

Док-во

1) Предп., что контур простой (без самопересечений)

т.к Γ — замкн., то можем применить ф-лу Грина для каждого из инт-лов (2,§5)

Т Грина $\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

тогда $\oint\limits_\Gamma u\,dx - v\,dy = \iint\limits_D \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0 \text{ (усл. Коши-Римана)}} dx\,dy = 0$

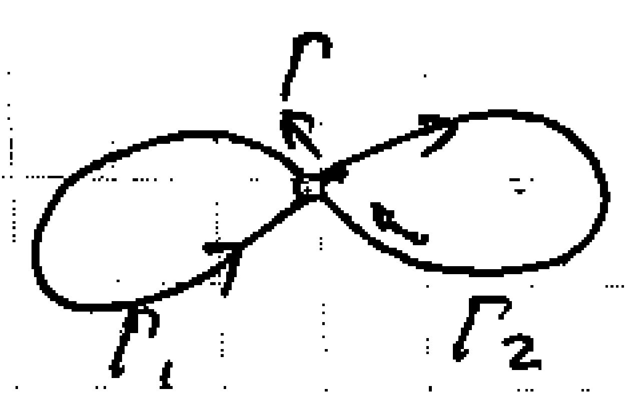
для рег ф-и

$\exists f'(z)$ и $f'(z)$ непр $\Rightarrow$ $\exists$-ют $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$

Аналог. $\oint\limits_\Gamma v\,dx + u\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

т.о. $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$

2) контур с конечным числом самопересечений



Разобьем Γ на два контура (простых)

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

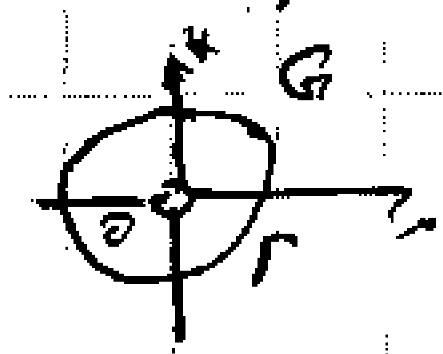
тогда $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 0$ $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$ см п.1) т.к. $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dx = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dx + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dx = 0$

ч.т.д.

~~Теор 2~~ Для неодносвязных обл Т 1 не верна

Пр

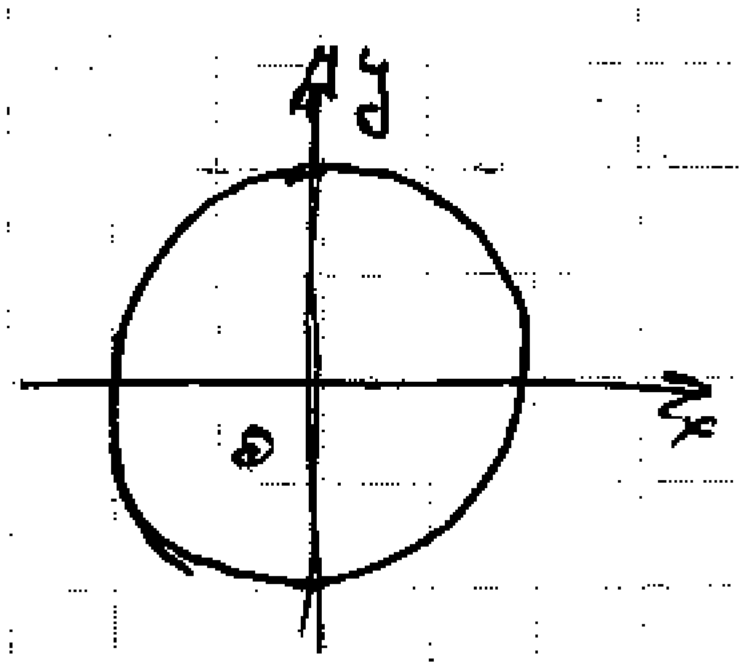
$f(z) = \frac{1}{z}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — обл, неодносвяз



$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

$\Gamma_2 = \{z = re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$, $r > 0$ const

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{d\,re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i \ne 0$$

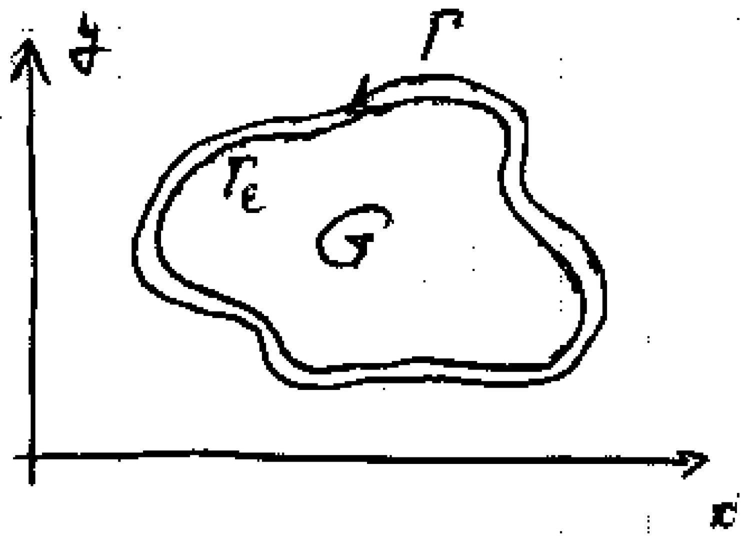


Теорема 2

] G - односвязн обл, огр кусочногладким простым контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки, а φ-я $f(z)$ - регулярна в G и непрерывна на $\overline{G}$ ($\overline{G} = G \cup \Gamma$ вд.с)

Тогда справедливо рав-во (1)

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

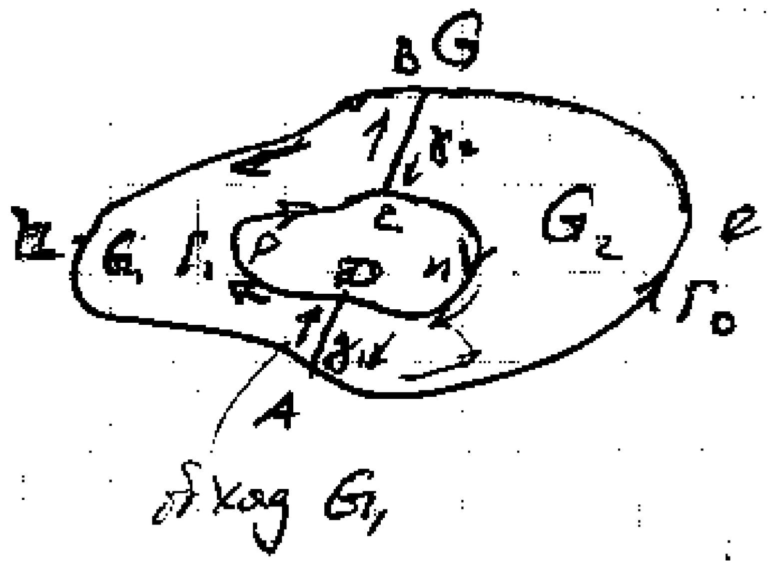


в ε-окр-ти Γ проведем гладкую кривую $\Gamma_\varepsilon \subset G$

тогда по Т 1

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

рассм $\lim\limits_{|\Gamma_\varepsilon|\to|\Gamma|} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ в силу непрер. f



$\partial G_1 = \overset{\smile}{AD} \cup \overset{\smile}{D\rho C} \cup \overset{\smile}{CB} \cup \overset{\smile}{B\gamma A}$

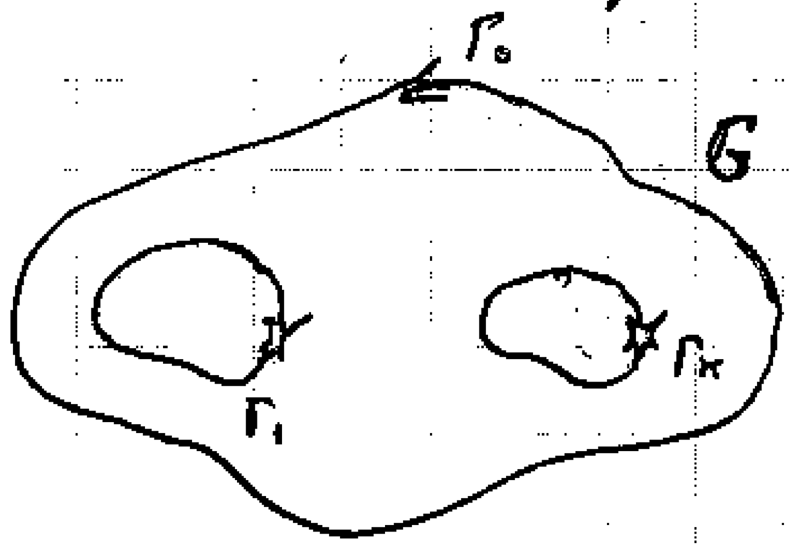
$\partial G_2 = \overset{\smile}{A\ell B} \cup \overset{\smile}{BC} \cup \overset{\smile}{CnD} \cup \overset{\smile}{DA}$

тогда $\int_{\partial G_1} f(z)\,dz = 0$ (по Т 2, G_1 - односвязная)

$\int_{\partial G_2} f(z)\,dz = 0$ (по Т 2)

∃ обл G огр. контуром Γ_0 э и и внутр. контура $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \subset G$ кусочно гладкие, простые

т.о. G огр. $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$



обозн. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$

Сложим

$$0 = \int_{\partial G_1} f(z)\,dz + \int_{\partial G_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1^-} f(z)\,dz$$

$\int_{BC} = -\int_{CB}$ и т.п.

ч.т.д.

<u>Теор 3</u>

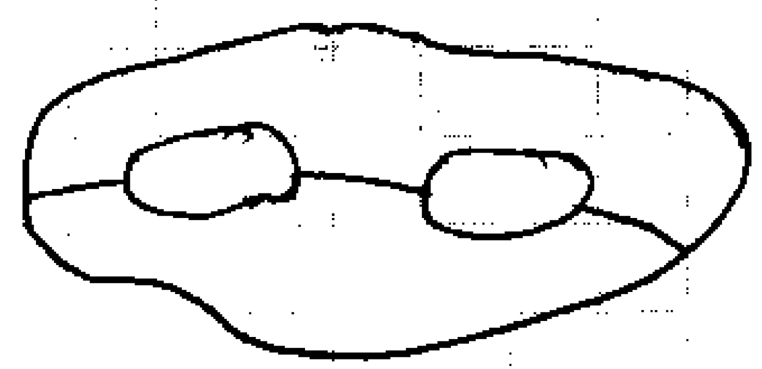
Пусть ф-я $f(z)$ регулярна в обл G и непрерывна на $\bar{G}$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

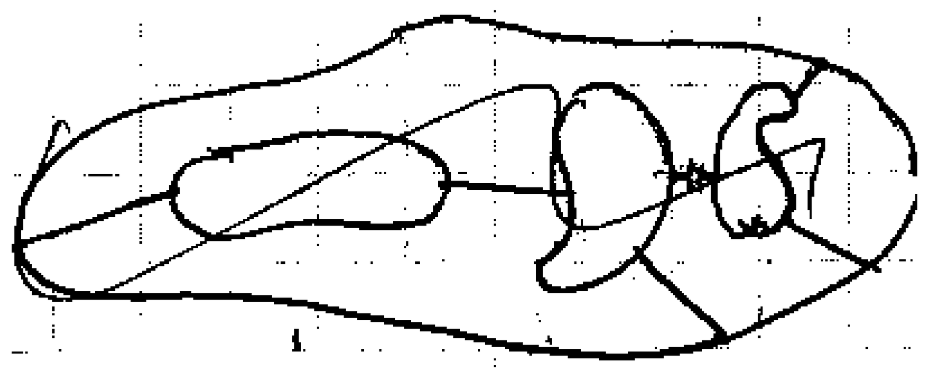
$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz$$

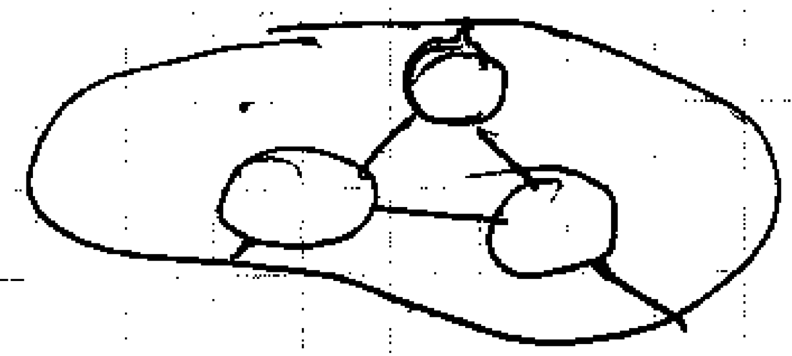
<u>Док-во</u> (для $n=1$)

для $n=2$



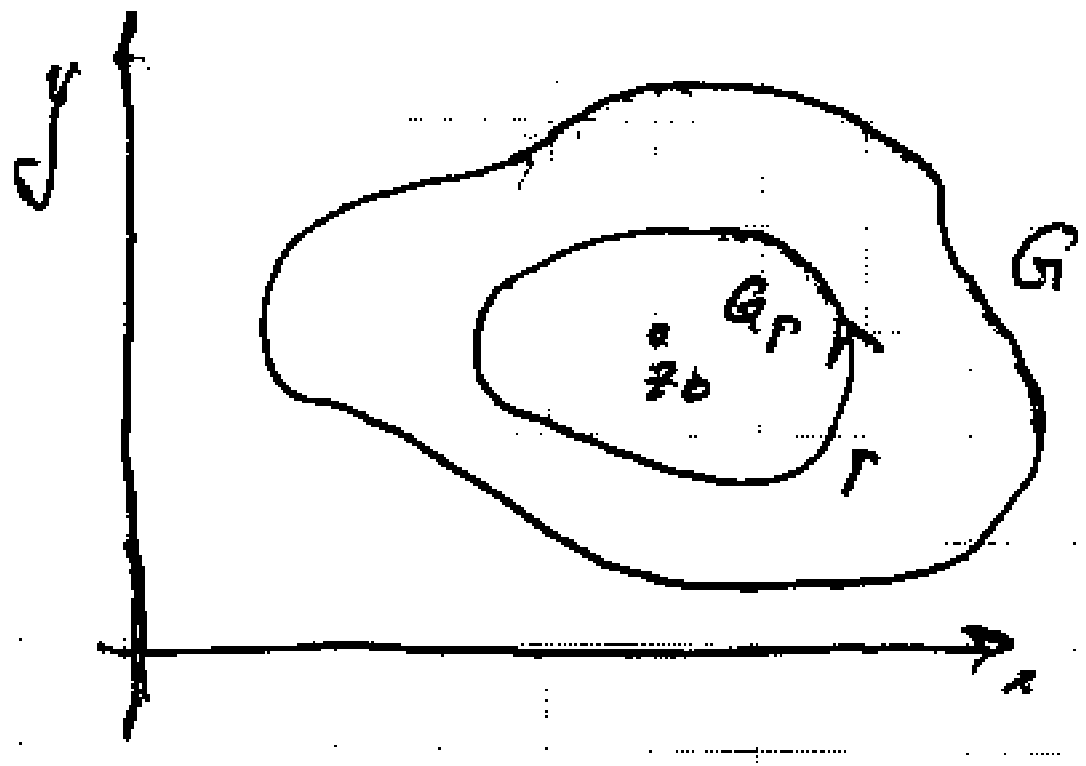
для $n=3$





§ 7 Интеграл Коши и формула Коши.

рассм $G \subset \mathbb{C}$ G - односвязная обл



∃ ф-е $f(z)$ регулярна в G

рассм $z_0 \in G$ и

$\Gamma \subset G$, Γ - кусочн. глад.

z_0 - внутри Γ

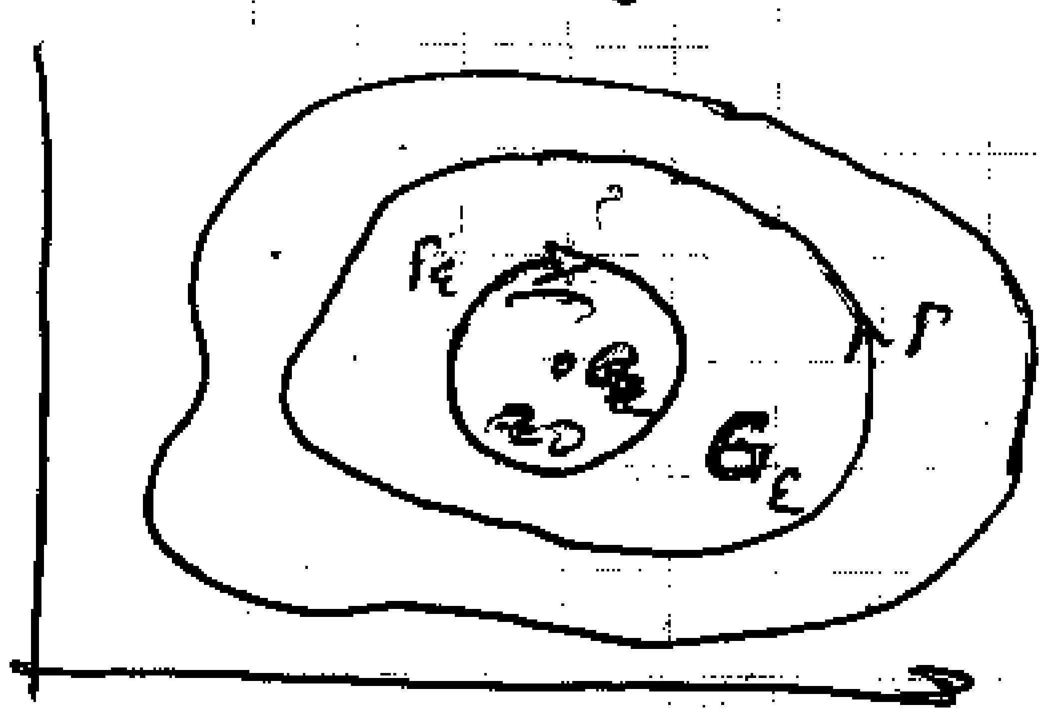
тогда справедлива

Формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \quad (1)$$

Док - во

окружим z_0 окр-тью радиуса ε : Γ_ε



~~$\Gamma_\varepsilon = \{ z = |z - z_0| e^{i\varphi}$~~,

$\Gamma_\varepsilon^- = \{ z = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$

противоположное напр.

рассм $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ - регулярна в G_ε

тогда по ТЗ § 6 $\displaystyle\int\limits_{\partial G_\varepsilon} \varphi(z)\,dz = 0$

$\partial G_\varepsilon = \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon$ тогда $\int\limits_{\partial G_\varepsilon} \varphi(z)dz = \int\limits_{\Gamma} \varphi(z)dz + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z)dz = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \varphi(z)dz = -\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z)dz = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} \varphi(z)dz$$

против часовой стрелки

рассм $\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\varepsilon i e^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi = 2\pi i f(z_0)$$

т.о. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

покаж. $\int\limits_0^{2\pi}\left[f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)\right]d\varphi \le \max\limits_{0\le\varphi\le 2\pi}\left|f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)\right| \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi$

f - равном непр в $\overline{G_\varepsilon}$ (по т Кантора)

т.о. $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0\ \max\left|f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)\right| \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi < \delta$

ч.т.д.

<u>Сл 1</u> $\exists\ \Gamma$ - простой замкн. контур в обл G

рассм $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f(z), & \text{if } z \text{ - внутри } \Gamma \\ 0, & \text{if } z \text{ - вне } \Gamma,\ z\in G \end{cases}$

z - внутри Γ - справедлива ф-ла Коши

z - вне Γ $, \zeta \in G_\Gamma$, то $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ - рег ф-я

$\int\limits_{\Gamma_{\text{замк}}}$ рег ф-и $= 0$ по т Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \text{ - интеграл Коши}$$

След 2 (Теор. о среднем для рег ф-ий)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$\forall \varepsilon > 0$, дост малых, чтобы $z_0 + \varepsilon e^{i\varphi} \in G$

Док-во

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$$

if $z \in \Gamma_\varepsilon^-$, то $z = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

т.о. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z + \varepsilon e^{i\varphi})\,\varepsilon e^{i\varphi} i}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi$

чтд

След 3

$$f(z) = u(z) + i v(z)$$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z)$$

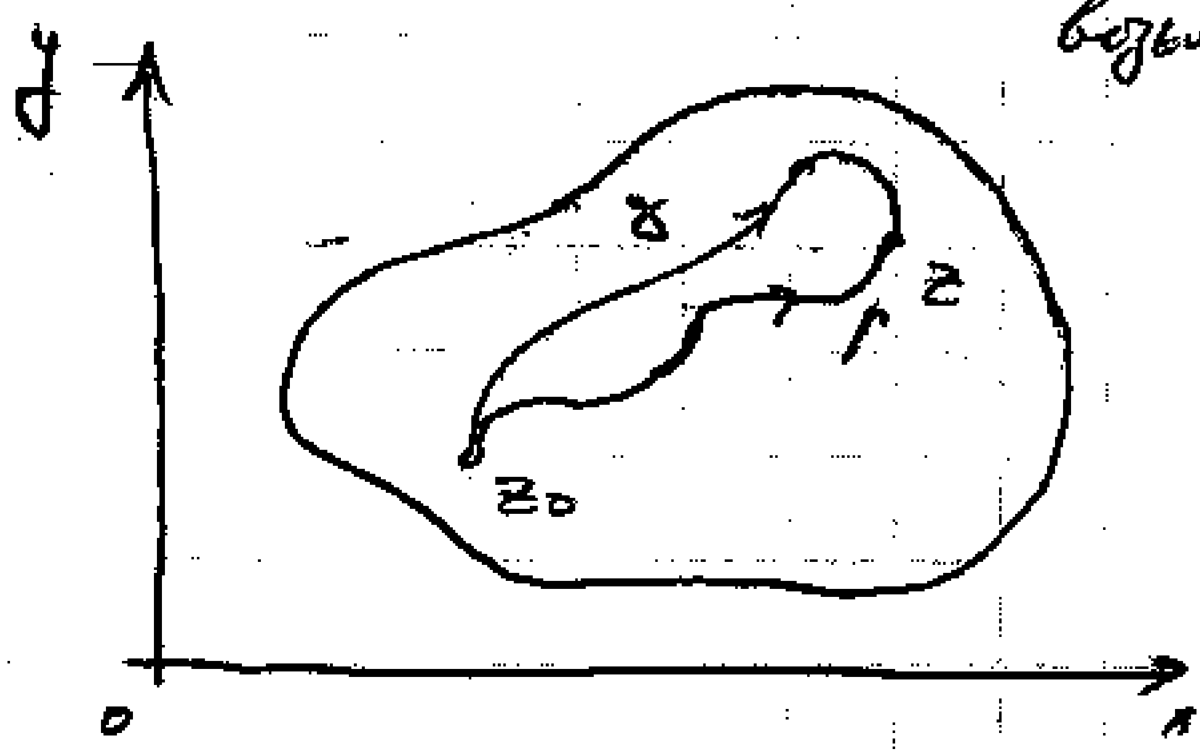
тогда

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi$$

§8 Неопределенный интеграл в комплексной области

] $f(z)$ регулярна в односвязн обл G



возьм. $z_0 \in G$, $z \in G$ $\qquad z_0, z_* \in \Gamma$

$\Gamma \subset G$, Γ кус. непр.

Док. что $\displaystyle\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$

(зависит только от z и z_0)

возьм $\Gamma \cup \gamma^-$ — замкнутый $\displaystyle \underset{\text{Т. Коши}}{0} = \int_{\Gamma\cup\gamma^-} f(\zeta)\,d\zeta = \int_\Gamma + \int_{\gamma^-}$

значит $\displaystyle\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$

тогда $\displaystyle\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z)$ (можно обозн)

$\displaystyle F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ - неопред интеграл в G

Теор

if ф-я $f(z)$ рег в G, то $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ регулярна в G, причем $F'(z)=f(z)\quad \forall z\in G$

Док-во

Возьм приращение F в т. z

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right]\right|$$

$\Delta z \neq 0$, $z+\Delta z \in G$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right]\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta\right|$$

Будем считать, что это интеграл по отрезку $[z, z+\Delta z]$

Оценим

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta\right| \leq$$

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = \frac{f(z)}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\,d\zeta \leq \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta)-f(z)|\,\frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta =$$

$$= \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta)-f(z)| \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0$$

т.о. $F'(z)=f(z)$

След

ф-я $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ рег в G

$f(z)$ - непр в G $\Rightarrow$ $f'(z)$ непр в G $\Rightarrow$ F рег в G

6.03.06

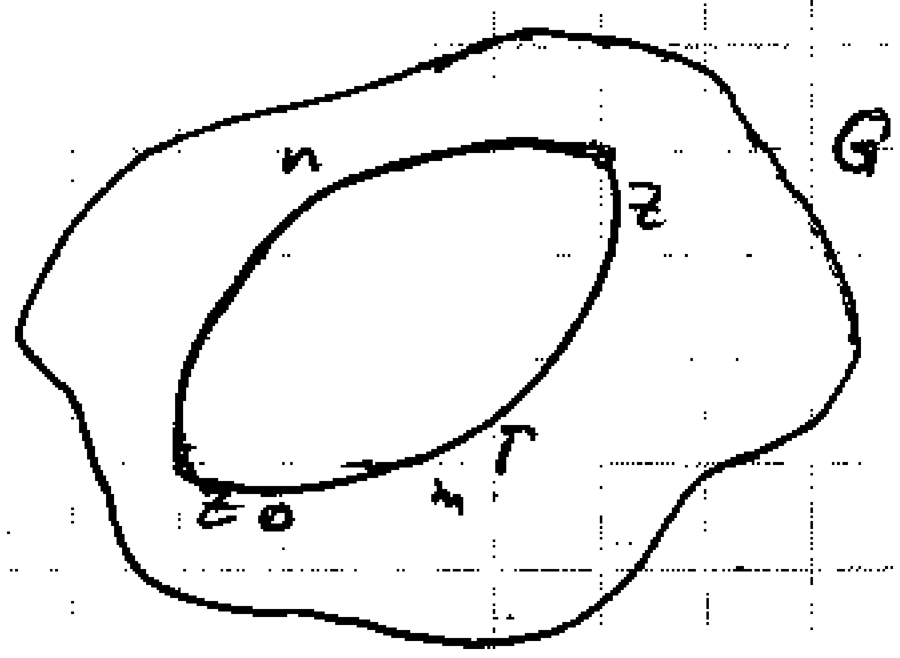
Лекция №5

Теор 2 Пусть G - односвязная обл-ть в $\mathbb{C}$, а ф-я $f(z)$ непр в G, и для любого простого замкнутого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset G$ справедливо рав-во

$$\oint_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad (*)$$

Тогда $\forall z_0, z \in G$ определена ф-я $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, $(**)$ которая регулярна в G

Док-во



$$0 = \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0 m z} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{z n z_0} f(\zeta)\,d\zeta$$

т.о. $$\int_{z_0 m z} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_{z n z_0} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0 n z} f(\zeta)\,d\zeta$$

т.о. инт-л задаётся нач и конечн точками и не зависит от „пути"

Значит $$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$ - регулярна

($\exists$-е $F'(z) = f(z)$ см т1)

Опр Пусть ф-я $f(z)$ регулярна в односвязной обл $G \subset \mathbb{C}$, тогда

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \quad , \quad F'(z) = f(z) \ \forall z$$

Опр Если ф-я $\Phi(z)$ – диф-ма в обл G и $\Phi'(z)=f(z)$, $z \in G$, то ф-я Φ – наз-ся первообразной для f в G

Теор 3. if ф-я $f(z)$ регулярна в G (односв. обл), то $\forall$ две первообразные $F_1(z)$ и $F_2(z)$ этой ф-и в G отличаются на константу, т.е.
$F_1(z) - F_2(z) = C \quad , \forall z \in G$

Док-во
Т.к. F_1 и F_2 – первообр, то

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(z) = f(z) \\ F_2'(z) = f(z) \end{array}\right\} \forall z \in G.$$

~~Рассм~~ обозн $\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$
тогда
$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = \underset{(*)}{0} \quad \forall z \in G$$

с др стор. $\Phi(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, т.к. Φ – рег, то

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ (\text{из } *) \quad (\Delta z = \Delta x)$$

$$\Phi'(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (\Delta z = i\Delta y)$$

т.о. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\forall (x,y)$; $z = x+iy \in G$

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow u(x,y) = c_1 \text{ в } G \text{ конст}$$

аналог. $dv = 0 \Rightarrow v(x,y) = c_2$

значит $\Phi(z) = c_1 + i c_2 \equiv C$

ч.т.д.

След (ф-ла Ньютона - Лейбница для комплексн. ин-тег.)

Если $f(z)$ - рег. ф-я в одност. обл $G \subset \mathbb{C}$, то справедливо:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \text{ где } \Phi - \forall \text{ первообр. для } f \text{ в } G$$

$F(z)$

$$F(z) = \Phi(z) + C \ \Big|_{z=z_0}$$

$0 = F(z_0) = \Phi(z_0) + C$

(опр.)

; т.о. $C = -\Phi(z_0)$, значит $F(z) = \Phi(z) - \Phi(z_0)$

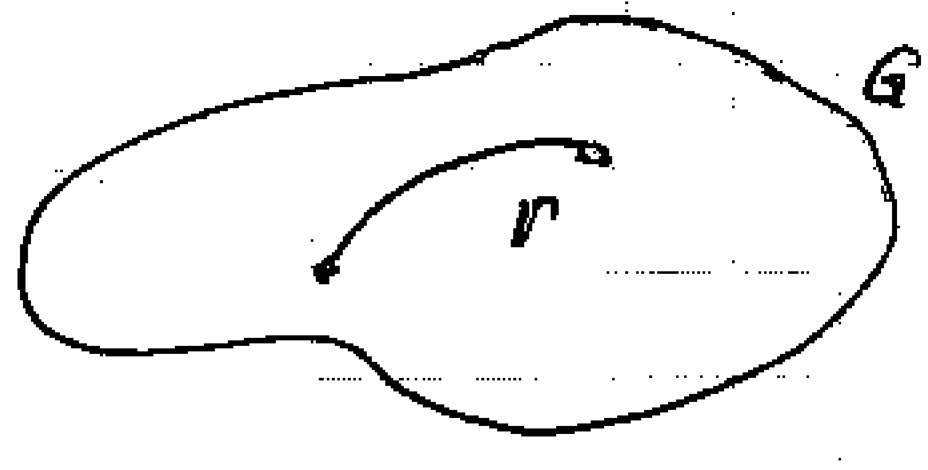
ч.т.д.

Опр Совокупность всех первообр. заданной ф-и $f(z)$ в данной обл., наз-ся её неопределенным интегралом в этой обл.

согл Т3 неопр. инт-л $f(z) = \Phi(z) + C$, Φ - одна из первообр. в G

§9 Интеграл типа Коши.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$, G - обл



Γ - кусочногладкая кривая в G

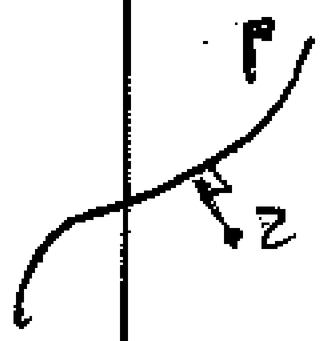
Пусть ф-я $f(\zeta)$ непр на Γ

Γ - необязательно замкн.

(1) $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ — инт-л типа Коши, $\forall z \in G \setminus \Gamma$

(иначе знам $=0$)

в т.с. $G = \mathbb{C}$ (т.е. $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$



$$\rho(z,\Gamma) = \inf_{\zeta\in\Gamma}|z-\zeta| = d > 0$$

$$|z-\zeta| \geq d > 0 \quad \forall\, \zeta \in \Gamma$$

Теор 1

Интеграл типа Коши явл-ся дифф-ой ф. вне Γ, причем

$$(2)\quad F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$$

Док-во

Рассм $F(z+\Delta z) - F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z}\right]d\zeta$

$z,\ z+\Delta z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Delta z\, f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}$$

Рассм

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right]d\zeta =$$

$$= \frac{\Delta z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2} \equiv I$$

$$|I| \le \frac{|\Delta z|}{2\pi|i|} \int\limits_\Gamma \frac{|f(\zeta)|\, d\zeta}{|\zeta - z - \Delta z| \cdot |\zeta - z|^2}$$

интеграл I рода по перем. длине дуги

будем $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \Rightarrow |\zeta - z| \geqslant d > 0, \ \forall \zeta \in \Gamma$

$$|\zeta - z - \Delta z| \geqslant \underbrace{|\zeta - z|}_{\geqslant d} - |\Delta z| \geqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0$$

$|\Delta z| \xrightarrow{\text{будем}} 0$, т.о. м. считать $|\Delta z| \le \frac{d}{2}$

$\max\limits_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)| = M < +\infty \Rightarrow |f(\zeta)| \le M \ \forall \zeta \in \Gamma$

т.о. $$|I| \le \frac{|\Delta z| M}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\frac{d}{2} \cdot d^2} = \frac{2|\Delta z| M}{d^3} |\Gamma|$$

длина Γ $|\Gamma| < +\infty$

т.о. $\lim\limits_{\Delta z \to 0} |I| = 0$

значит $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} = F'(z)$$

чтд

След

$F(z)$ – рег в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$

тк $F'(z)$ непр в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$

(при этом $f(\zeta)$ м.б. нерегулярна)

Теор 2

Ф-я $F(z)$ – бесконечно дифф-ма в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, причем
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Лекция № 6

§9 Интеграл типа Коши (продолжение)

Теор 2 ∃ Γ - кусочно глад. кривая на комплн. пл-ти, а ф-я $f(z)$ непр на Γ. Тогда ф-ция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)} \quad (1)$$

беск. дифф в обл $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, причем $F'(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)}$ (2)

и $$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (3) \quad n = 1, 2, \dots$$

Док-во

см Т1 $$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad (4)$$

Рассм $$F'(z + \Delta z) - F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)^2} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) f d\zeta$$

$$= - \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{2(\zeta - z) - \Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)^2 (\zeta - z)^2} f(\zeta)\, d\zeta \quad (5)$$

рассм $$J(\Delta z) = \frac{F'(z + \Delta z) - F'(z)}{\Delta z} - \frac{2}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^3} =$$

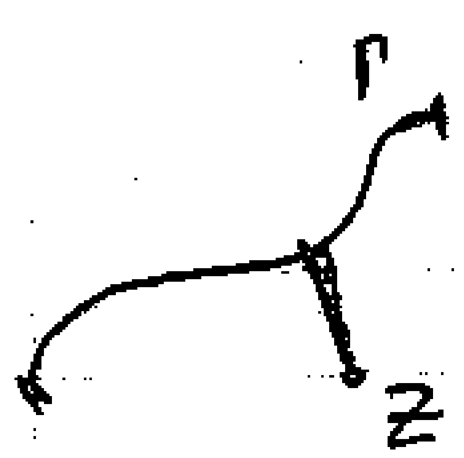
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[2(\zeta-z)-\Delta z]f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^2}\,d\zeta - \frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^3} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{2(\zeta-z)-\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^2} - \frac{2}{(\zeta-z)^3}\right]f(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\cancel{2(\zeta-z)^2} - \Delta z(\zeta-z) - \cancel{2(\zeta-z)^2} + 4(\zeta-z)\Delta z - 2(\Delta z)^2}{(\zeta-z-\Delta z)^2(\zeta-z)^3} f(\zeta)\,d\zeta \quad (6)$$

Оценим

$$|I(\Delta z)| \le \frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_\Gamma \frac{3|\zeta-z|+2|\Delta z|}{|\zeta-z|^3\,|\zeta-z-\Delta z|^2}|f(\zeta)|\,|d\zeta| \quad (7)$$



$$\rho(\Gamma,z)=\inf_{\zeta\in\Gamma}|z-\zeta| = d>0$$

$$|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|\ge d-\frac d2=\frac d2$$

$$\exists\ |\Delta z|<\frac d2.$$

т.о. $$|I(\Delta z)|\le\frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\left(3|\zeta-z|+2\frac d2\right)M}{\left(\frac d2\right)^2 d^2}\,|d\zeta| \le$$

$M=\max_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|$, Γ - огр $\Rightarrow \exists\ L>0 : |\zeta-z|\le L,\ \forall\zeta\in\Gamma$ $(L=L(z,\Gamma))$

тогда $$\le \frac{|\Delta z|}{2\pi}4\int_\Gamma\frac{(3L+d)M}{d^2}\,d\zeta = \frac{c}{2\pi}s(\Gamma)|\Delta z| \xrightarrow[\Delta z\to0]{} 0$$

т.о. $$F''(z)=\lim\frac{F'(z+\Delta z)-F'(z)}{\Delta z}=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^3}$$

ч.т.д. (2)

Аналог для $n = 3, 4, \ldots$ (можно по индукции)

Теор 3

Пусть G - односвязная обл в $\mathbb{C}$, а ф-я $f(z)$ - рег в G. Если Γ - простой кусочн. глад контур, расположенный в G и ориентир. против часовой стрелки, то $\forall$ т. z, лежащей внутри Γ справедливо рав-во

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

След Т2 и ф-лы Коши: $\underbrace{f(z)}_{F(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, z - внутри Γ

Если z не внутри Γ, то Т3 не справедл. т.к $f(z) = 0$

§10 Ряды из регулярных функций.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (1), \text{ где } z \in G \subset \mathbb{C}$$

Опр 1 Если ряд 1 равномерно сходится на G к $f(z)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon$

$\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall z \in G$

$f(z)$ - наз-ся суммой ряда (1)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

Теор 1 (кр. Коши)

Для того, чтобы ряд (1) равномерно сходился на G н. и д., чтобы $\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z)\right| < \varepsilon \quad , \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall m\in\mathbb{N}, \forall z\in G$$

Теор 2

$\exists$ Γ - кусочно гладкая кривая на $\mathbb{C}$, а ряд (1) равномерно сходится на Γ к $f(z)$, причем $f_n(z)$ - непрерывные ф-и на Γ. Тогда ф-я $f(z)$ непр. на Γ и

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz \quad (2)$$

Док-во

Воспол. опр. равном. сх-ти:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ : \ \left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{l(\Gamma)} \text{ — длина } \Gamma$$

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \ , \forall z\in\Gamma$$

~~восп. нер-вом~~

Тогда

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int f_k(z)dz\right| = \left|\int_\Gamma \left(f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)dz\right| \leq$$

$$\leq \int\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| ds < \frac{\varepsilon}{l(\Gamma)}\int_\Gamma ds = \varepsilon \qquad \forall n\geq N(\varepsilon)$$

т.о. док-но рав-во (2)

Теор 3 (Первая теорема Вейерштрасса)

Пусть G — односвязная обл в $\mathbb{C}$, а ф-и $f_n(z)$ — рег. в G, причем ряд (1) сх-ся равномерно на любой замкнутой обл $\bar{D} \subset G$.
Тогда:

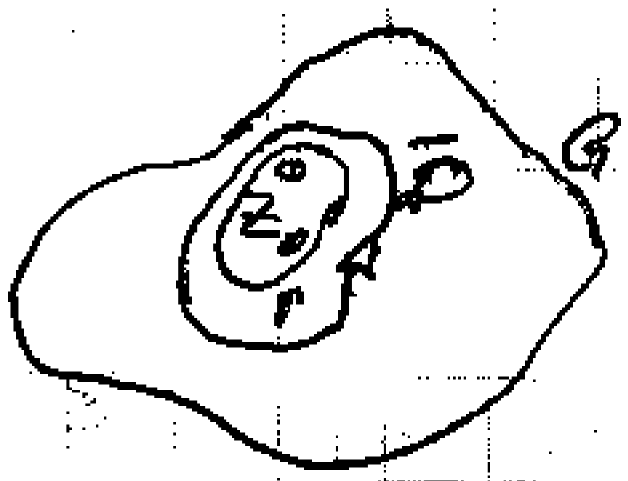
1) сумма $f(z)$ ряда (1) есть рег. ф-я в G
2) $\forall z \in G$ справедливо рав-во

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad \forall k \in N \quad (3), \ \forall z$$

3) ряд (3) сх-ся равномерно на любой замкнутой области $\bar{D} \subset G$

Док-во

1)



возьм $\forall z_0 \in G$, $z_0 \in \bar{D} \subset G$

~~окрестность z_0 конт Γ~~

ряд (1) сх-ся равном на $\bar{D}$, т.к. сх-ся равном на G, а $\bar{D} \subset G$

возьм $\Gamma \subset D$, z_0 — внутри Γ

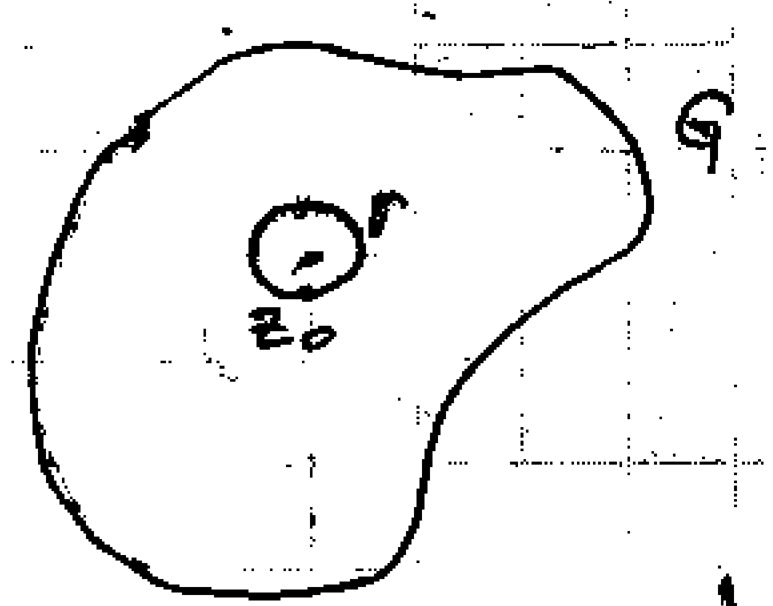
т.к. $f_n(z)$ рег в G, то $\int_\Gamma f_n(z)\,dz = 0$ (т. Коши) $\forall n = 1, 2, \dots$

ряд (1) сх-ся на Γ т.к. $\Gamma \subset G$

тогда $\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,dz = 0$

т.е. $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \Gamma \subset D \Rightarrow f(z)$ — рег. в D

2)



возьм $\forall z_0 \in G$
окружим z_0 конт Γ -
- прост, замк, кус гладк, дост. мал

$$\rho(z_0, \Gamma) = \inf_{z\in\Gamma} (z, z_0) \equiv d > 0$$

$$|z - z_0| \geq d \quad , \forall z \in \Gamma$$

Рассм рав-во $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad , \forall z \in \Gamma$ сх-ся равном на Γ

разделим лев. и прав части на $(z-z_0)^k$, $k = 1, 2, \ldots$

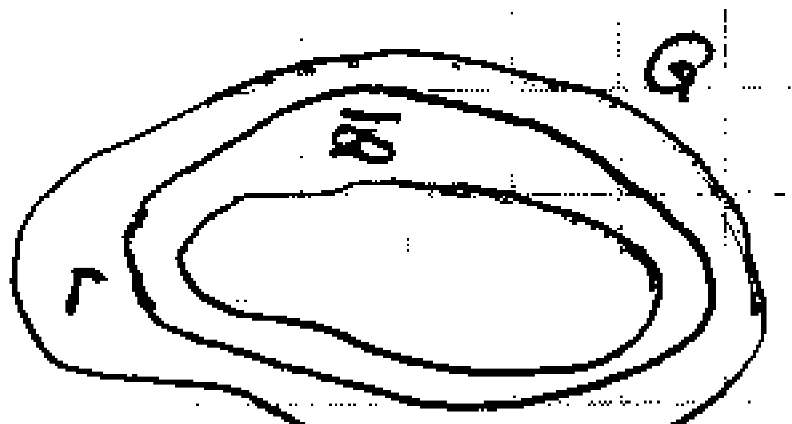
$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$ сх-ся равном на Γ

т.к. $\left|\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{d^{k+1}} < +\infty$ (огр)

$$\underbrace{\frac{k!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} dz}_{f^{(k)}(z_0)} = \underbrace{\frac{k!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz}_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} f^{(k)}(z_0)}$$ почлен рав-ву (3)

чтд 2

3)



Γ - конт $\in G$, Γ охват $\overline{D}$
т.к. ряд (1) сх-ся в $\forall$ замк. обл в G
ряд (1) сх-ся равном на Γ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \left|f(\zeta) - \sum_{m=1}^{n} f_m(\zeta)\right| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall \zeta \in \Gamma$$

$$\rho(\Gamma, \overline{D}) = \inf_{\substack{z\in\overline{D} \\ \zeta\in\Gamma}} |z - \zeta| \equiv d > 0$$

Тогда Рассм

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \sum_{m=1}^{n} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{d^{k+1}}$$

т.к. $|\zeta - z| \geq d$, $\forall \zeta \in \Gamma$, $\forall z \in \overline{D}$

Рассм $\left|\overbrace{\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}}^{f^{(k)}(z)} - \overbrace{\frac{k!}{2\pi i}\sum_{m=1}^{n}\int_\Gamma \frac{f_m(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}}^{\sum_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)}\right| \le$

$$\le \frac{k!}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\left|f(\zeta)-\sum_{m=1}^{n} f_m(\zeta)\right|}{|\zeta-z|^{k+1}}\,ds < \frac{k!}{2\pi}\frac{\varepsilon}{d^{k+1}}\int_\Gamma ds =$$

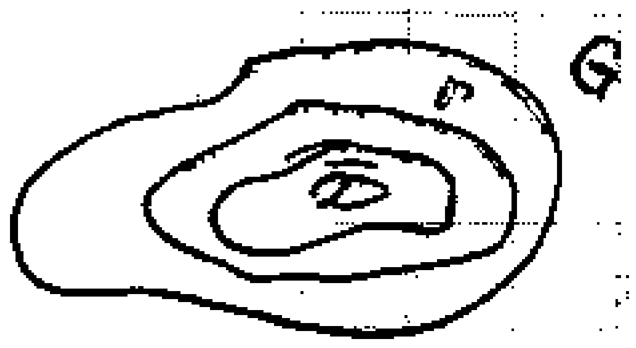
$$= \underbrace{\frac{k!}{2\pi}\frac{l(\Gamma)}{d^{k+1}}}_{c}\,\varepsilon \qquad \forall n \ge n(\varepsilon)$$

с др. стор. это $\left|f^{(k)}(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)\right| < c\varepsilon$

$\forall z \in \overline{D}$, $\forall n \ge n(\varepsilon)$

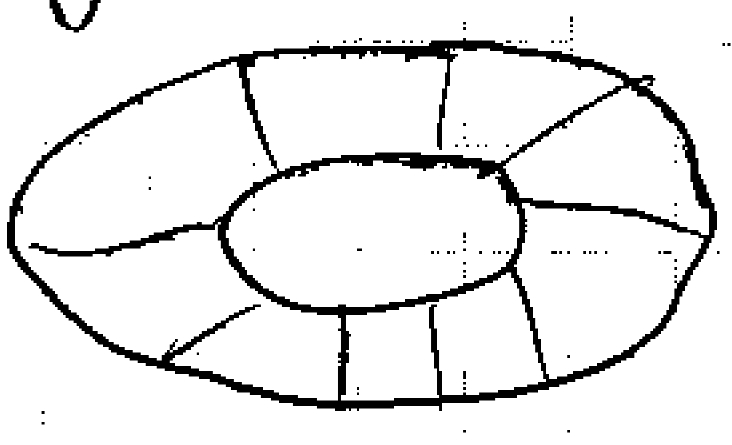
чтд 3

G - односвязна, где это используется?



чтобы $\overline{D}$ и Γ полностью лежали в G

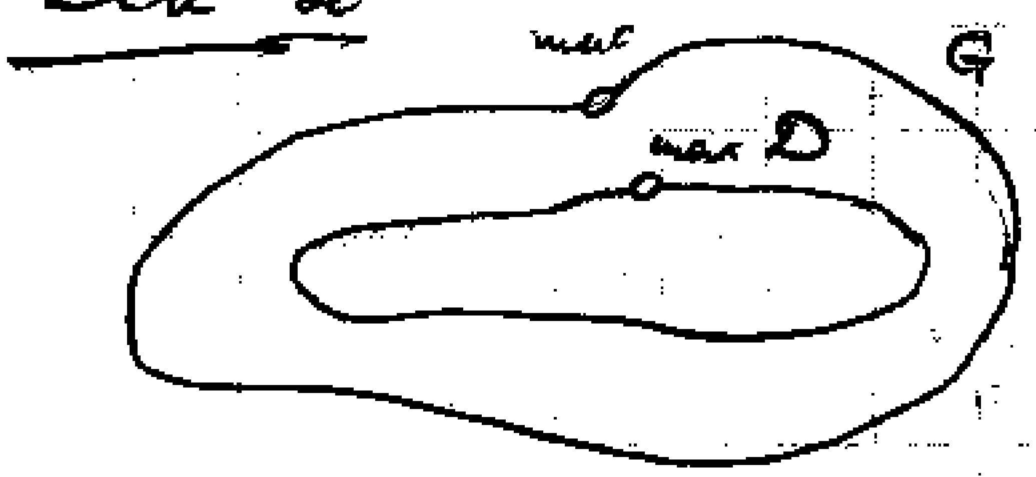
Если G - неодносвязна, то Γ - сложный контур

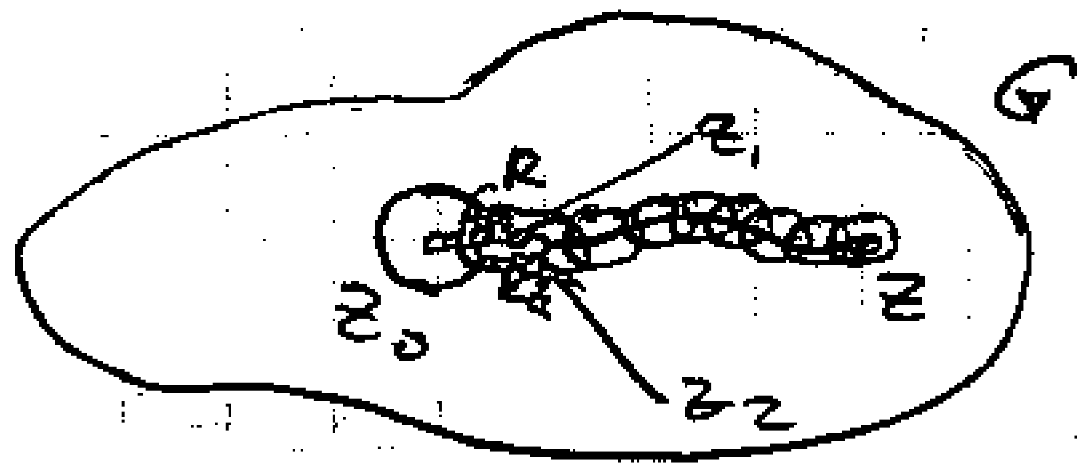


Теор 4 (принцип максимума модуля регулярной функции)

Пусть G - односвязная обл., а ф-я $f(z)$ - регулярна в G и непрерывна в $\overline{G}$. Тогда 1) либо $|f(z)| = const$ на $\overline{G}$, 2) либо $\max_{z\in\overline{G}}|f(z)|$ достигается на границе обл. G.

Док-во





г) $\exists$ ~~...~~ $|f(z)|$ – непостоянная ф-я на $\overline{G}$ (док от противного)
и $\exists$-ет т. $z_0 \in G$: $\max\limits_{z\in \overline{G}} |f(z)| = |f(z_0)|$

тогда $\exists$ круг радиуса R с центром в z_0 : $K_R \subset G$
$(K_R = \{ z : |z - z_0| < R \} \subset G)$

т.к. $|f(z)|$ рег в G, то $|f(z)|$ рег и в K_R, $0 < r \le R$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,d\varphi \qquad \forall r : 0 < r \le R \quad (\text{ф-ла Коши})$$

т.о. $|f(z_0)| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi$, т.к. $\underset{\forall z \in K_R}{|f(z)| \le |f(z_0)|}$ (*)

то $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \dfrac{1}{2\pi}|f(z_0)|\int_0^{2\pi} d\varphi = |f(z_0)|$

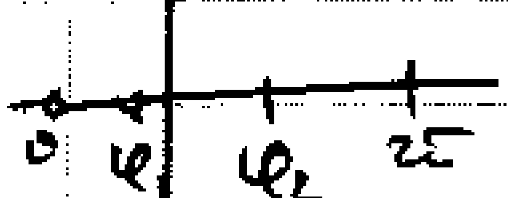
Тогда $|f(z_0 + re^{i\varphi})| = |f(z_0)|$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$

Док-жем это (от противного)
$\exists$ ет $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$: $|f(z_0 + re^{i\varphi_0})| < |f(z_0)|$

$\exists$-ет $[\varphi_1, \varphi_2] \subset [0, 2\pi]$: $|f(z_0 + re^{i\varphi})| < |f(z_0)|$ $\forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

из показанного ранее $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi = |f(z_0)|$

преобразуем этот интеграл $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi =$



$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi_1} \underbrace{|\ldots|}_{|f(z_0)|}\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_2}^{2\pi} |\ldots|\,d\varphi <$$

$$< |f(z_0)| \cdot \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} + \frac{|f(z_0)|}{2\pi}(\varphi_1 + 2\pi - \varphi_2) = |f(z_0)|$$

то $|f(z_0)| < |f(z_0)|$ противоречие

В итоге $\forall \rho < R$ $(\forall z \in K_R)$ $|f(z)| = |f(z_0)| = const$ в круге

Возьмём $\forall z \in G$ док-ем $|f(z)| = |f(z_0)| = const$

Соединим z и z_0 кривой $\Gamma \subset G$ т.к. G - одн.

обл. $\rho(\Gamma, \partial G) = \inf(\Gamma, \partial G) = d > 0$

Возьмём т. $z_1 \in \Gamma$ и $z_1 \in \partial K_R$

начертим круг с центром z_1, рад d

z_1 - внутр т. G, но док. ранее $|f(z)| = const$

$|f(z_1)| = |f(z_0)|$ т.к. $z_1 \in \partial K_R(z)$ $\forall z \in K_d(z_1)$

т.к. $K_R \cap K_d \neq 0$, то $\forall z \in K_d(z_1)$ $|f(z)| = |f(z_0)|$

проведём $K_d(z_2)$ в т. z_2 $|f(z_2)| = |f(z_0)|$ т.к. $z_2 \in K_d(z_1)$

$|f(z)| = |f(z_0)| = const$, $\forall z \in K_d(z_2)$

продолжив подобные рассуждения, конечное число

Вывод ~~$f(z)$~~ какая либо окр. захватит z

В конце $K_d(z_n) \ni z$ $|f(\zeta)| = |f(z_0)|$, $\forall \zeta \in K_d(z)$

т.о. $|f(z)| = |f(z_0)|$

Во всех т. обл G $|f(z)| = |f(z_0)| = const$ в G,
но по предположению $|f(z)| \neq const$ противоречие

ЧТД

Из усл. Коши - Римана в полярной сист. коорд. можно показать, что из усл $|f(z)| = const \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) = const$

Теор 5. (Вторая теорема Вейерштрасса)

If φ-ии $f_n(z)$ рег. в G - односвязн обл. и непрерывны в $\overline{G}$ и ряд $\sum\limits_{n=1} f_n(\zeta)$ сх-ся равномерно на ∂G, то он сх-ся равном в замкнутой обл $\overline{G}$

Док-во

Запишем усл. равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \max_{\zeta \in \partial G} \left| f(\zeta) - \sum_{m=1}^{n} f_m(\zeta) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

по принципу максимума след. $\forall z \in \overline{G}$

$$\Bigl| \overbrace{f(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z)}^{\text{ф-я рег в } G} \Bigr| \leq$$

$$\leq \max_{\zeta \in \partial G} \left| f(\zeta) - \sum_{m=1}^{n} f_m(\zeta) \right| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon$$

$f(z)$ - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, $\forall z \in G$ - рег ф-я

В итоге ряд сх-ся равномерно

§11 Степенные ряды в комплексной области.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1) \qquad z, a_n, z_0 \in \mathbb{C}$$

$(1) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$

рассм ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (2) ряд (1) можно свести к ряду (2), заменив $z = z - z_0$

Теор. Абеля

if ряд (2) сх-ся в т. $z = z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится в $\forall z : |z| < |z_1|$

Зам. if $z_1 = 0$, то ряд (2) сх-ся в т. 0

Пр 1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ сх-ся только при $z=0$

обозн $n!\, z^n = a_n$ $\quad]\ z \neq 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, z^{n+1}}{n!\, z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(1+n)z| = +\infty$$

т.о. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ сх-ся $\forall z$

рассм ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ сх-ся по призн Даламбера

т.о. исх. ряд сх-ся $\forall z$

обозн M — мн-во всех z, в которых ряд (1) сх-ся

$M \neq \emptyset$ т.к. $z_0 \in M$

обозн $R = \sup_{z \in M} |z| \leq +\infty$ $\quad$ R - радиус сх-ти ряда (1)

$0 \leq R \leq +\infty$

Пр $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (z \neq 1)$

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ if $|z| < 1$

$|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = \infty$ if $|z| > 1$

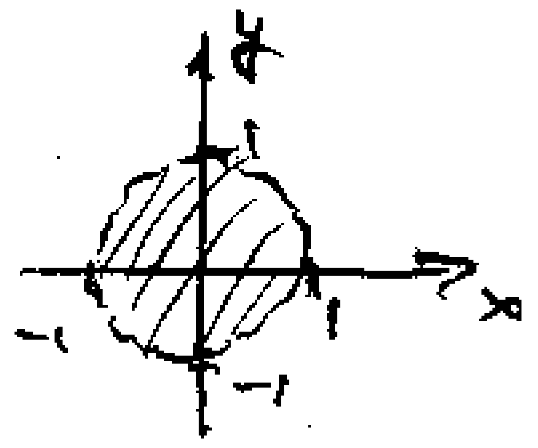
$\nexists \lim_{n\to\infty} z^n$ if $|z| = 1$, $z \neq 1$

$z = e^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

$\nexists \begin{cases} \lim \cos n\varphi & \text{при } \varphi \neq 0 + 2\pi k \\ \lim \sin n\varphi \end{cases}$

т.о. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сх-ся if $|z| < 1$, расх if $|z| \geq 1$

if $|z| = 1$, то $(z_n \not\to 0)$ $\quad |z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$



Возьм $0<r<\infty$

рассм ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\zeta)^n \Rightarrow M=\{\zeta : |\zeta|<1\}$

$\zeta=\frac{z}{r}$ или $M=\{z : |z|<r\}$

~~Свойства [illegible]~~

<u>Опр</u> Круг $K_R(z_0)=\{z : |z-z_0|<R\}$ –
– круг сходимости ряда (1) и R - радиус сходимости.

При $|z-z_0|<R$ ряд (1) сх-ся абс.

($R=\sup\limits_{z\in M}|z-z_0|$ $\forall z : |z-z_0|<R$)
M - мн-во сходимости ряда (1)

Возьм $\varepsilon=R-|z-z_0|>0$ $\exists\, z_1\in M$: ~~$|z_1|>R-\varepsilon$~~ $|z_1-z_0|>R-\varepsilon=$
$=|z-z_0|$

тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z_1-z_0)^n$ сх-ся $\xRightarrow{\text{т. Абеля}}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ сх-ся
т.к. $|z-z_0|<|z_1-z_0|$

т.е. $K_R(z_0)\subset M$

$\forall$ $z : |z-z_0|>R$, то ряд (1) расходится в z
(т.к. $z\notin M$)
иначе $|z-z_0|\le R$

Пр ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ расх на ед. окр-ти

Теор

Если $R>0$ - рад. сх-ти ряда (1), то сумма $f(z)$ ряда (1) регулярна в круге $K_R(z_0)$

Док-во

Возьм. $0<r<R$, док чем: в круге $K_r(z_0)$ ряд (1) сх-ся равномерно

Возьм $z \in K_r(z_0) \Rightarrow |z-z_0| \le r < R$

тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ сх-ся по т. Абеля $\zeta = z_1 - z_0$
(☆) (т.к. $r<R$ и возьм ζ: $|\zeta| = r$, тогда $|\zeta|<R$, $z_1 \in K_R(z_0)$ и(окр)), а ряд (☆) - мажорирующий)

$|z-z_0| \le r$, $|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n| r^n \Rightarrow$ сх-ся равномерно ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ в $K_r(z_0)$

Сумма равномерно сходящегося ряда регулярных ф-й - регулярная ф-я

ч.т.д.

Опр Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ наз-ся точкой голоморфности ф-и $f(z)$ и ∃ ст. степ ряд вида (1), такой что $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ в некотором круге $K_r(z_0) = \{z;\ |z-z_0|<r\}$

Из опред ⇒ ∀ т. из круга сходимости степ. ряда явл-ся точкой голоморфности его суммы

т.о. круг $K_R(z_0)$ - мн-во голоморфности суммы ряда по доп-й теор голоморфная ф-я регулярна.

Если G — мн-во точек голоморфн. ф-и $f(z)$, то G наз-ся мн-во голоморфности.

Опр

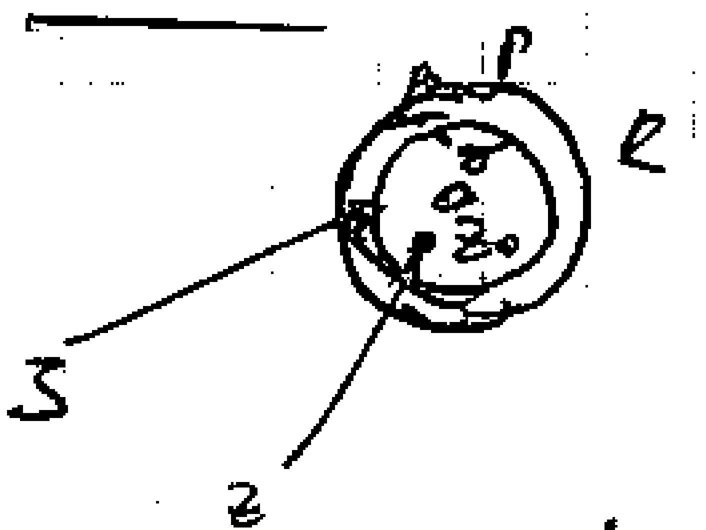
Точка z_0 наз-ся точкой регулярности ф-и $f(z)$ если ф-я $f(z)$ регулярна в некоторой окр-ти т. z_0

Теор

Если z_0 - точка регулярности ф-и $f(z)$, то эта точка явл-ся и точкой голоморфности этой ф-и

(Если в окр т. z_0 у ф-и есть произв, то ее можно представить в окр z_0 - суммой степ ряда)

Док-во



$\exists K_R(z_0)$, $R>0$: $f'(z)$ непр в $K_R(z_0)$

обозн $\Gamma = \partial K_R(z_0)$

$\gamma = \{z : z = z_0 + re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

Возьм z внутри γ, тогда по теор Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} =$$

интегр. Коши

$r = |\zeta - z_0| > |z - z_0|$ (*)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)\left[1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]}$$

$$\text{Ряд} \quad \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n \quad (3)$$

в степ. ряд

$q \equiv \dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, $|q|<1$ в силу (*)

сх-ся равном на γ, т.к.

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n < +\infty \overset{\text{Т Вейл}}{\Rightarrow} \text{ряд (3) сх-ся равном на } \gamma$$

Равном. сх-ся ряд можно интегрировать.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}_{a_n \equiv} (z-z_0)^n \ \text{сх-ся к } f(z)$$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in K_R(z_0)$ т.к. можно брать γ так, чтобы он захватывал z.

Т.О. если ф-е рег в K_R, то она голоморфна в K_R

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \text{ - коэф.}$$

чтд

Нер-во Коши

Если ф-е $f(z)$ регулярна в круге $K_R(z_0)$ и $M = \sup_{\zeta\in K_R} |f(\zeta)|$, то $|a_n| \le \frac{M}{R^n}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\zeta)|\,ds}{|\zeta-z|^{n+1}} \le \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \frac{ds}{R^{n+1}} = \frac{M\cdot 2\pi r}{2\pi R^{n+1}} \cancel{\le \frac{M}{R^n}} \to$$

$|\zeta-z_0| = r < R$ $\qquad r<R$

$$\xrightarrow[r\to R]{} \frac{M}{R^n} \quad \left(\text{или} \le \frac{M}{R^n}\right)$$

Теорема Лиувилля

Если ф-я $f(z)$ рег. во всей компл. пл-ти $\mathbb{C}$, то $f(z) \equiv const$.

След. из нер-ва Коши. $f(z)$ рег $\Rightarrow$ $f(z)$ предст. в виде ряда с $R=+\infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R_0.$$

$$|a_n| \le \frac{M}{R_0^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad \forall R_0$$

$$|a_n| \le 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

т.е. все a_n кроме a_0 равны 0

т.о. $f(z) = const$

Опр. эти z — неогр на [illegible] оси

24.03.06

Лекция №

§12 Ряды Лорана

Ряд Лорана — ряд вида

$$(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \equiv \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{(*)\ f_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{(**)\ f_2(z)}$$

Ряд (1) сх-ся в т. z, если в этой точке сходятся ряды (*) и (**)

Сумма ряда (1) $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (**) — степенной и имеет опред. рад. сх-ти R, $0 \le R \le +\infty$

тогда $\forall z: |z-z_0| < R$ ряд (**) сх-ся
если $|z-z_0| > R$ ряд (**) расх-ся

Рассм ряд (*)

обозн $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, тогда (*) прим вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n$ (***) —

— степенной ряд отн. ζ, имеет рад. сх-ти α, $0 \le \alpha \le +\infty$

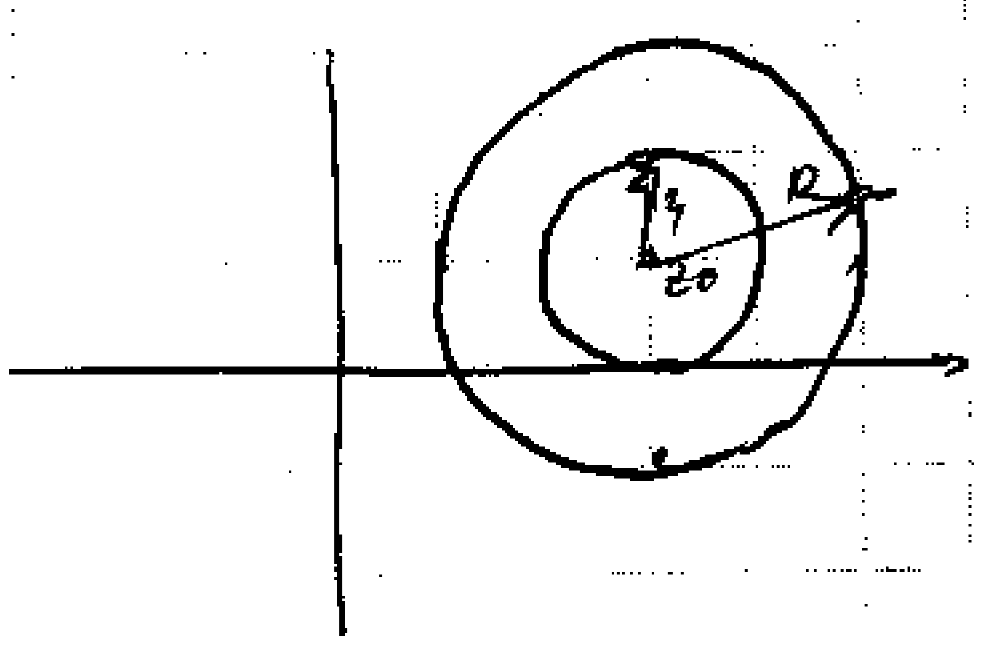
тогда ряд (***) сх-ся если $|\zeta| < \alpha$
расх-ся если $|\zeta| > \alpha$

Уточним: $|\zeta| < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{|z-z_0|} < \alpha \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{\alpha}$

$|\zeta| > \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{|z-z_0|} > \alpha \Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\alpha}$

Когда сх-ся ряд (1)?

если $\frac{1}{\alpha} < |z-z_0| < R$, то ряды (*) и (**) оба сх-ся в т. z



$r = \frac{1}{\alpha}$

Естественной областью сх-ти для ряда (1) явл-ся кольцо, но м.б. все пл-ть кроме z_0

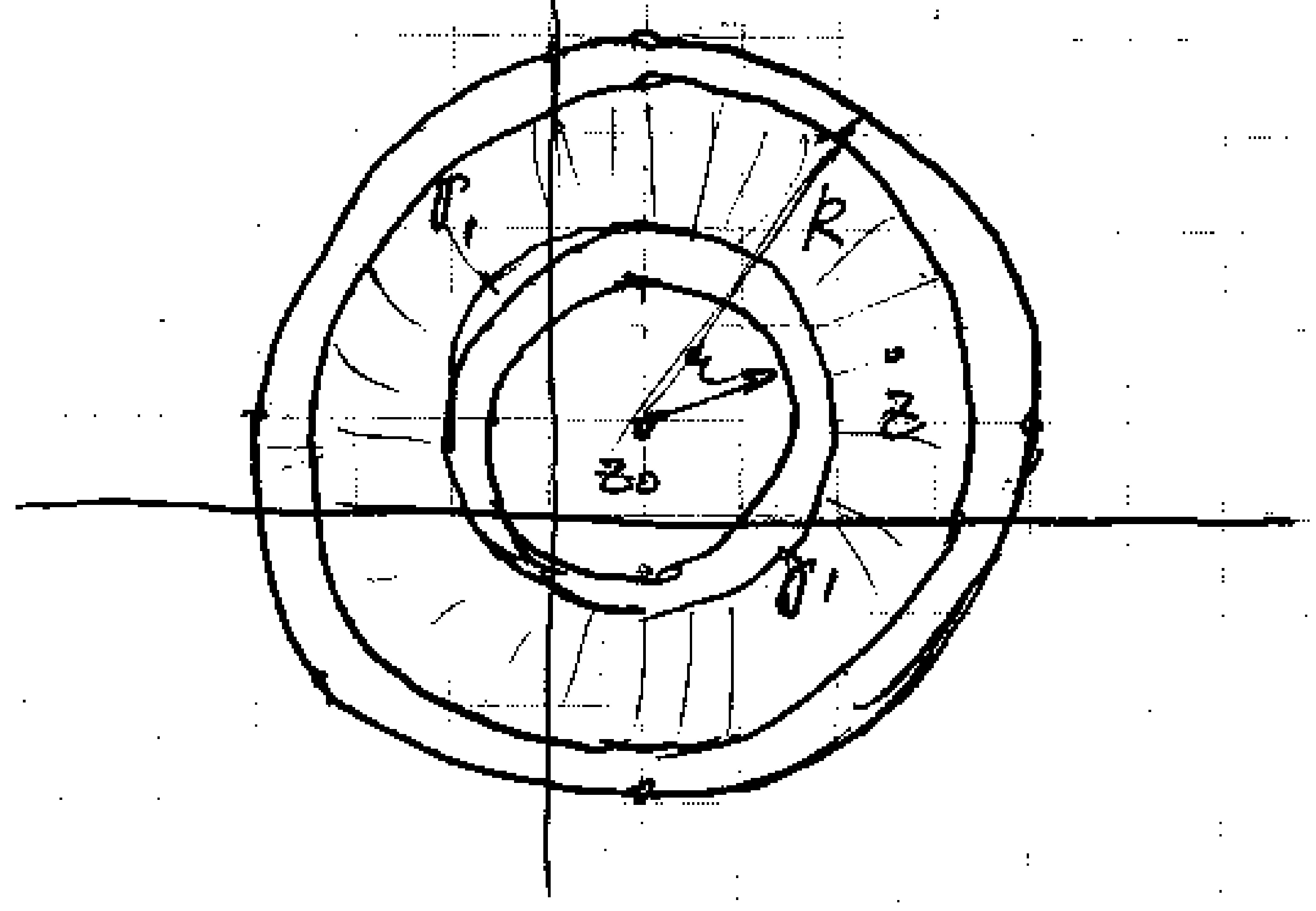
если имеет место ряд (*), то в т. z_0 ряд (1) расх-ся

Теор 1

Пусть ф-я $f(z)$ рег. в кольце $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$
Тогда $\exists$ ед. ряд вида (1), сходящийся в кольце D к ф-и $f(z)$, причём

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где Γ_ρ - окр-ть рад ρ с центром z_0
$(\Gamma_\rho = \{z : z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi\})$



Док-во

Возьм $\forall z \in D$, т.е. $r < |z - z_0| < R$

$r_1 < R_1$; $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$ (*)

$\gamma_1 = \Gamma_{r_1} = \{z : z = z_0 + r_1 e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$\Gamma_1 = \Gamma_{R_1} = \{z : z = z_0 + R_1 e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$\zeta \in$ кольцу D_1 (r_1, R_1)

$\forall \zeta \in \gamma_1$ $|\zeta - z_0| = r_1$

$\forall \zeta \in \Gamma_1$ $|\zeta - z_0| = R_1$

$r_1 < |z - z_0| < R_1$

Прим теор Коши, это возможно,

т.к. ф-я рег в $D \Rightarrow$ рег и в D_1 т.к. $D_1 \subset D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = I_1 + I_2$$

т.к. обход γ_1 по часовой стрелке

Возьм ф-ю $\frac{1}{\zeta - z}$, $\zeta \in \Gamma_1$,

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \ominus$$

Оценим $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{R_1} = q < 1$ см (*)

$$\ominus \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \xrightarrow{\text{подст. в } I_1}$$

сх-ся равном на Γ_1

(по призн. Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty} q^n < +\infty$), а $\left|\frac{1}{\zeta - z_0}\right| = \frac{1}{R_1} = \text{const}$)

$\cancel{\frac{1}{z - \zeta}}$

Расм $I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta =$

т.к. ряд равном. сх-ся

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{a_n} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Возьм $(\forall \zeta \in \gamma_1 \Rightarrow |\zeta - z_0| = r_1 < |z - z_0|)$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} = q < 1 \qquad , q \text{ нез. от } \zeta$$

т.о. $$-\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

подст. в I_2

т.о. $$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\,d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

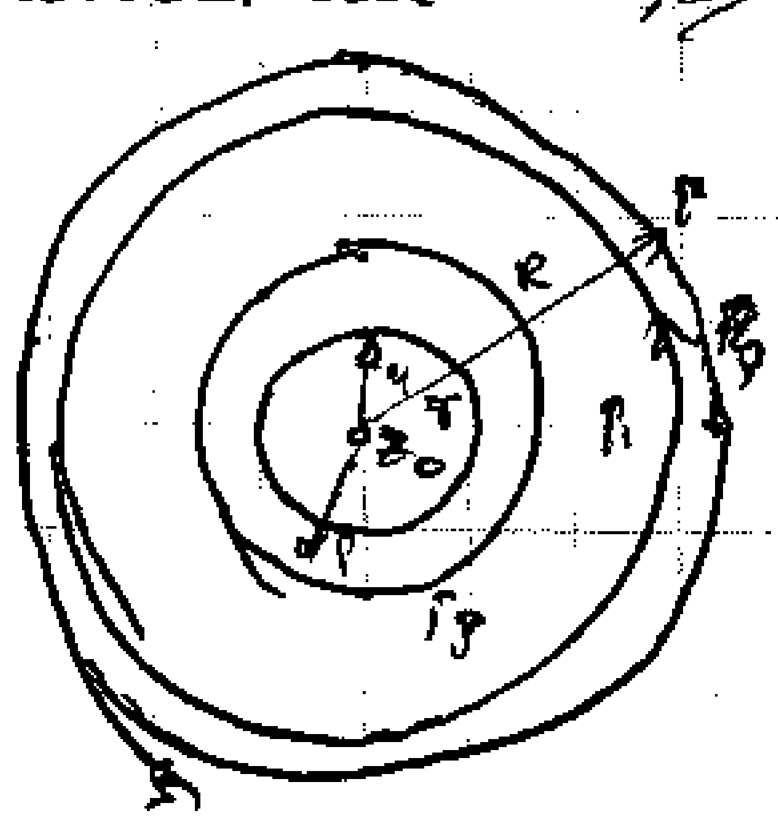
обозн $n+1 = k$ $\quad n = k-1, \ -n = -k+1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}}\,d\zeta \cdot (z - z_0)^{-(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-k+1}}}_{\parallel \atop a_{-k}}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$$

т.о. $$f(z) = I_1 + I_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} \qquad (2)$$

Заметим



$r < \rho < R$

т.к ф-я рег, то инт-л по к простому контуру будет один и тот же ре

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} \quad \text{(по т. Коши)}$$

(Мод.)

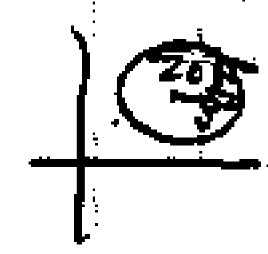
т.о. (2) ~ (1) в силу произвольности т. z

ч.т.д.

Теор 2 (Единственности)

Если регулярная в кольце D ф-я $f(z)$, $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, разложена в нем в ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходящийся равномерно к ф-и $f(z)$ в любом замкнутом подкольце кольца D, то $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$r < \rho < R$, $\Gamma_\rho = \{\zeta : \zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$



Док-во

Заменим z на ζ и запишем

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\zeta - z_0)^n, \ \forall \zeta \in \Gamma_\rho$$ ряд сх-ся равномерно на Γ_ρ

$$f(\zeta)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\zeta - z_0)^{n-k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left|\frac{1}{\zeta - z_0}\right| = \frac{1}{\rho} \quad \forall \zeta \in \Gamma_\rho$$ т.о. ряд равном. сх-ся знач. можно интегрир.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} a_n (\zeta - z_0)^{n-k-1}\,d\zeta$$

Рассм. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}(\zeta-z_0)^{n-k-1}d\zeta$

из опред Γ_ρ: $\zeta = z_0+\rho e^{i\varphi}$ $\Rightarrow d\zeta = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$

т.о.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}(\zeta-z_0)^{n-k-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} i\rho e^{i\varphi}\rho^{n-k-1}e^{i\varphi(n-k-1)}d\varphi = \frac{\rho^{n-k}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-k)}d\varphi = \begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\ne k\end{cases}$$

$e^{i\varphi(n-k)} = \cos(n-k)\varphi + i\sin(n-k)\varphi$

т.о. $$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\zeta-z_0)^{n-k-1}}{2\pi i}d\zeta = a_k$$

ч.т.д.

Пр. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ⇒ рег в кольце $1<|z|<2$

(так же рег в $2<|z|<+\infty$ и $0<|z|<1$)

разл. в ряд Лорана ⇒ $\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{z-1} =$ $z_0=0$

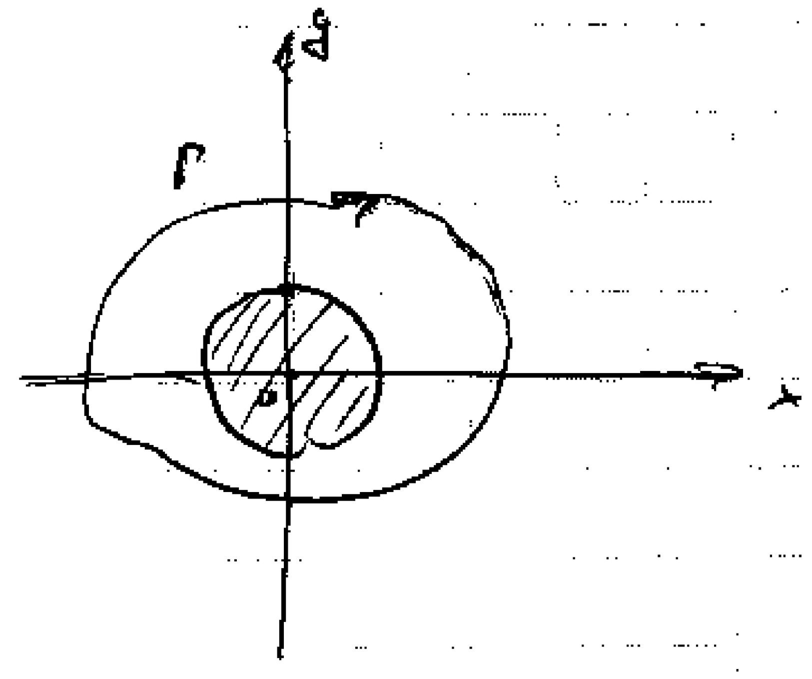
$$= \frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{z}}_{<1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{z}{2}}_{<1}-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$$

7.04.06

лекция №6

§14 Вычет функции (продолжение)

Опр. $f(z)$ – рег в окр-ти $z=\infty$, то $\operatorname{res} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta$

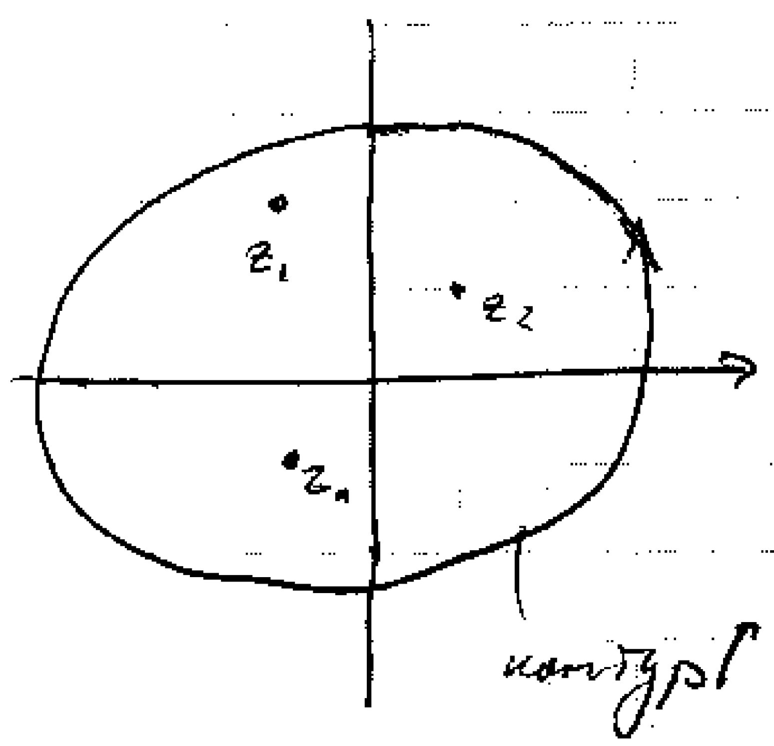


окр-ть ∞ – внешность ∀ круга с центром в (0,0)

напр. выбрано, чтобы окр-ть оставалась слева

Теор 2. ∃ р.е. $f(z)$ – рег в $\mathbb{C}\setminus\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} z_k\}$ и ∃ $z_{n+1}=\infty$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\operatorname{res} f(z_k)=0$

Док-во



контур Γ содержит все z_k, $k=\overline{1,n}$

Γ – замкн

тогда по Т 1 $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\,d\zeta + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\,d\zeta}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{res} f(\infty) \\ \parallel \\ \operatorname{res} f(z_{n+1})}} + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0$$

т.о. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \operatorname{res} f(z_k) = 0$

ч.т.д.

Лемма 1

$\exists$ ф-я $f(z)$ – рег в обл $D = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{\bigcup\limits_{k=1}^{n} z_k\}$ непр вплоть до действ. оси. Причем $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $\delta > 0$, $|z| \geq R_0 > 0$. Тогда $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0$, где $C_R = \{z : z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$

Док-во

будем $R > R_0$ $\left|\int\limits_{C_R} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq \int\limits_{C_R} |f(\zeta)|\,ds \leq \int\limits_{C_R} \frac{M}{R^{1+\delta}}\,ds =$

$\zeta \in C_R$, $|\zeta| = R$

$$= \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^{\delta}} \xrightarrow[\text{т.к. } \delta > 0]{} 0, \quad R \to \infty$$

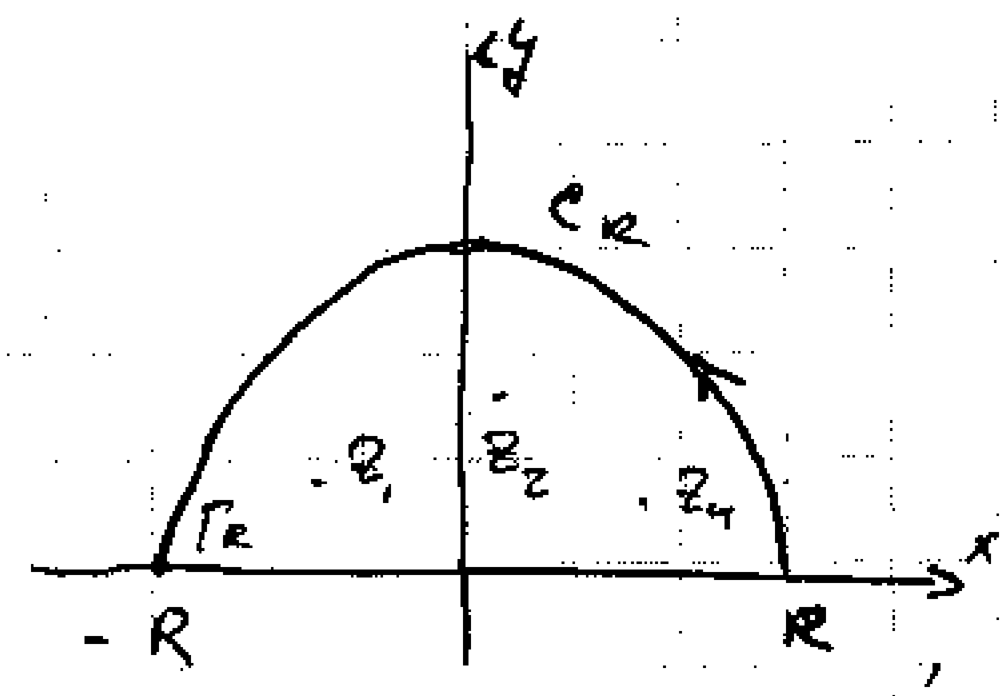
ч.т.д.

Лемма 2

Если вып. усл. Л1, то существует

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

Док-во



$\Gamma_R = C_R \cup [-R,R]$ – граница полукруга, $R > R_0$, где т. $z_1, z_2, \dots, z_n \in$ полукругу

тогда справедливо рав-во

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\zeta)\,d\zeta}_{\to 0,\ R\to+\infty} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

т.о. $$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$ ч.т.д.

деф. из мат. ан.

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$ – инт-л в смысле главного значения

т.о. Л2 $\Rightarrow$ $$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k),\quad \operatorname{Im} z_k > 0$$

Пр вычислить

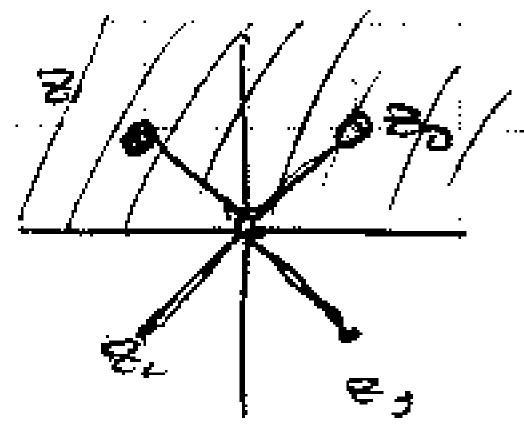
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

возьм $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ имеет 2 полюса в верхней пл-ти

$$z^4+1=0 \qquad z^4=-1=e^{\pi i+2k\pi i}, \quad k=0,1,2,3$$

$$z_k = e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{k\pi i}{2}}$$

$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$ полюсы 1-го порядка



$$|f(z)| \le \frac{1}{|z|^4-1}, \quad |z|>1$$

т.е. $|f(z)| \le \frac{2}{|z|^4}$, $|z|>R_0$

вып. усл 12

в результате
$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname{res} \frac{1}{z^4+1}\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} + \operatorname{res} \frac{1}{z^4+1}\Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}}\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}}\right) = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{e^{\frac{3}{4}\pi i}} + \frac{1}{e^{\frac{9}{4}\pi i}}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i} + e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right) = \frac{\pi i}{2}\cdot\left(-2i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

исслед на сх-ть
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4+1}}_{сх-ся} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4+1}}_{сх-ся} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}}_{сх-ся} < +\infty$$

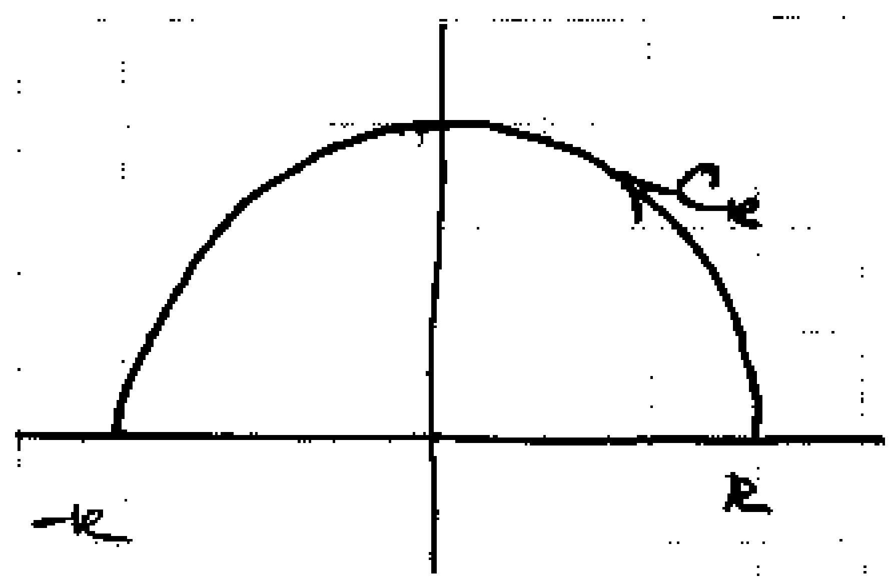
if несоб-й сх-ся, то его V.p. = самому инт

Лемма Жордана

Пусть ф-я $f(z)$ - рег. в верхней полупл-ти за искл., может быть, конечного числа точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, причем $f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ равномерно отн. аргумента z ($\arg z \in [0;\pi]$)

Тогда $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0$, где $C_R = \{z: z = Re^{i\varphi}, 0\le\varphi\le\pi\}$ $\forall a>0$

Док-во



обозн. $I_R = \int\limits_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz$

обозн. $\mu_R = \max\limits_{z\in C_R} |f(z)| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ по усл. теор.

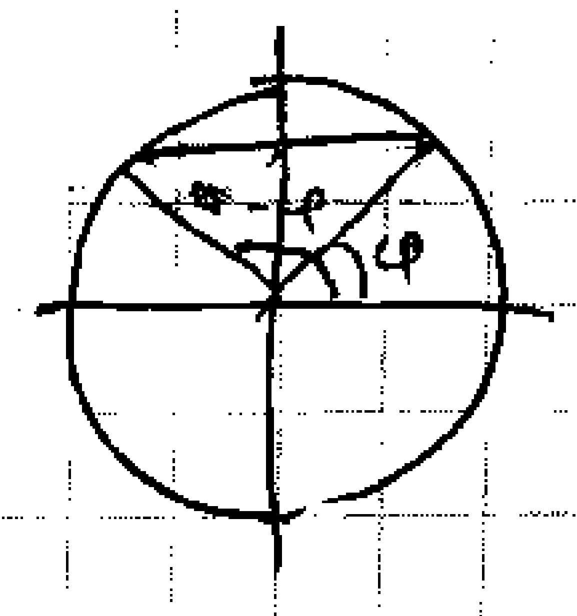
Оценим $|I_R| \le \int\limits_{C_R} |e^{iaz}|\cdot|f(z)|\,ds \le \mu_R \int\limits_{C_R} |e^{iaz}|\,ds$

Оценим $\int\limits_{C_R} |e^{iaz}|\,ds = \int\limits_{C_R} |e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}|\cdot R\,d\varphi =$

заметим $ds = R\,d\varphi$

$$= \int_0^\pi R\underbrace{|e^{iaR\cos\varphi}|}_{1 \text{ по формуле Эйлера}}\cdot e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^\pi R\, e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= R\Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi}_{1} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi}_{2}\Big) =$$



(1) = (2)

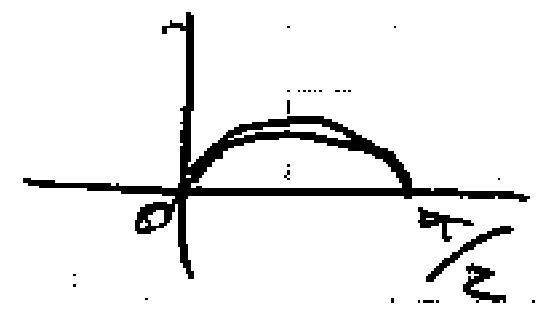
$\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$

$0 \le \varphi \le \pi$

$$= R\cdot 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \le$$

$\to \;(\le)\; 2R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}aR\varphi}\,d\varphi \underset{R\varphi=t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi R}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}at}\,dt \;(\le)$

$\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi \qquad 0 \le \varphi \le \pi$



док-во $\quad g(\varphi) = \sin\varphi - \frac{2}{\pi}\varphi \ge 0$

$g'(\varphi) = \cos\varphi - \frac{2}{\pi}, \quad g''(\varphi) = -\sin\varphi < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g$ - выпуклая ~~вогнутая~~ на $[0 \le \varphi \le \pi]$

$\to \;(\le)\; 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}at}\,dt = C < +\infty$

т.к. $a>0$ то инт-л сх-ся

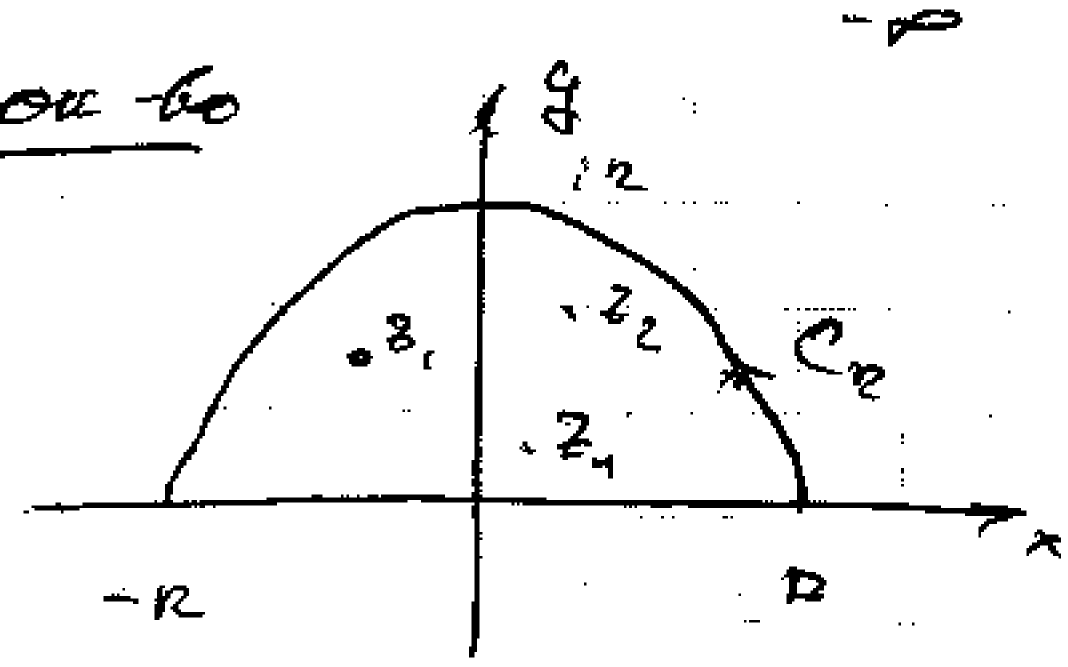
в итоге $\quad |I_R| \le \mu_R \cdot C \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \quad$ чтд

Теор 3

Пусть ф-я $f(z)$ удовл. усл. Леммы Жордана. Тогда для любого $a>0$ существует

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\, e^{iaz} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z_k)\, e^{iaz_k}\right]$$

Док-во



по осн. теор. о вычетах и. д-б.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left(f(z_k)\cdot e^{iaz_k}\right)$$

$\Gamma_R = C_R \cup [-R,R] \qquad e^{iaz}$ - рег в $\mathbb{C}$

Расс. $\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \text{ по л. Ж.}} =$

$= \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(z_k)\, e^{iaz_k}\right]$

$\exists$ ет $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z_k)e^{iaz_k}\right]$

итд

Пр

вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$

$a>0,\ b>0$

Заметим

$V.p.\ i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = 0$ в силу нечётности

Рассм $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2}\,dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\,dx =$

рассм $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$, $f(z) = \frac{1}{z^2+b^2}$ – уд. усл. л. Ж.

полюса $f(z)$ — $z_1 = ib$ $z = -ib$

тогда $= \operatorname{res}\left(e^{iaz_1} f(z_1)\right)\cdot 2\pi i = 2\pi i\, e^{-ba}\frac{1}{2ib} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}$

$a>0,\ b>0$

рассм $\operatorname{res} f(z)\Big|_{z=ib} = \frac{1}{2z}\Big|_{ib} = \frac{1}{2ib}$

14.04.06

Лекция №6

§15 Теорема единственности регулярных функций.

Пусть ф-я $f(z)$ – рег. в обл $G \subset \mathbb{C}$ и т. $z_0 \in G$

Будем говорить, что т. z_0 – нуль ф-и f, если $f(z_0)=0$

Разл. f в ряд Тейлора в окр-ти т. z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{сх-ся в } |z-z_0|<R$$

(т.к. $\exists R>0$)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

положим $z=z_0 \Rightarrow 0=f(z_0)=a_0 \Rightarrow a_0=0$

Тогда ряд м.б. записан:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(z-z_0)^k \;(=)$$

$$(z-z_0)\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad n-1=k$$

$$(=)\;(z-z_0)\,\varphi_1(z)$$

Если $\varphi_1(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 0$, то говорят, что z_0 – нуль порядка 1

Если $\varphi_1(z_0) = 0 \Leftrightarrow a_1=0$, то $\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(z-z_0)^k$

$\varphi_1(z_0) = a_1$ (т.к. $0^0 = 1$)

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(z-z_0)^k = (z-z_0)\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(z-z_0)^{k-1} \overset{k-1=s}{=\!=}$$

$$= (z-z_0)\sum_{s=0}^{\infty} a_{s+2}(z-z_0)^s$$

т.о. $$f(z) = (z-z_0)^2 \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} a_{s+2}(z-z_0)^s}_{\varphi_2(z)} \equiv (z-z_0)^2\varphi_2(z)$$

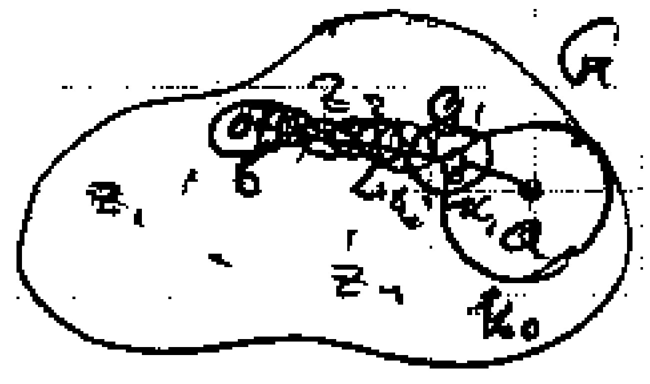
Если $a_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow \varphi_2(z_0) \neq 0$) $\Rightarrow$ z_0 — нуль второго порядка ф-и $f(z)$

Опр. Если $f(z)$ м.б. записана в виде $(z-z_0)^k\varphi(z)$, $\varphi(z)$ — рег в окр-ти т. z_0 ф-я и $\varphi(z_0) \neq 0$, то говорят, что z_0 — нуль k-го порядка ф-и $f(z)$

Теор 1 (теор. единственности)

Пусть $f(z)$ — рег в обл G ф-я и посл-ть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$, причем $z_n \neq z_k$, $n \neq k$, и у посл-ти $\{z_n\}$ есть предельная точка $a \in G$. Если $f(z_n) = 0$ $\forall n = 1, 2, \dots$, то $f(z) \equiv 0$ в G

Док-во



$a \in G \Rightarrow$ в окр-ти a $f(z)$ м.б. разл. в степ. ряд.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

ряд (т.к. a — внутр. точка) будет сходиться в круге $|z-a| < R$, $\exists R > 0$

$\exists R = \rho(a, \partial G)$

$\lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$ — в силу непр.

$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(z_n)}_{0} = f(a) = 0 \Rightarrow a$ - нуль фии f

$a_0 = 0$

$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a) \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (z-a)^k$

рассм

$0 = f(z_m) = (z_m - a) \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (z_m - a)^k$

$z_m \to a$, т.к. $z_m \neq z_k \Rightarrow \exists!\ z_{m_0} = a$

то $(z_m - a) \neq 0 \quad \forall m \geq m_0$

т.о. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (z_m - a)^k = 0$

Обозн. $\varphi_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (z-a)^k$, $\varphi_1(z_m) = 0$, $m \geq m_0$

$\varphi_1(z)$ - непр. в $|z-a| < R$ в т.ч. при $z = a$

поэтому

$\varphi_1(a) = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_1(z_m) = 0$

$\varphi_1(a) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$

тогда $f(z) = (z-a)\varphi_1(z) = (z-a)\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(z-a)^k =$

$= (z-a)^2 \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_{s+2} (z-a)^s$

Рассм. $f(z_m) = \underbrace{(z_m - a)^2}_{\neq 0,\ m \geq m_0} \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_{s+2} (z_m - a)^s$

Введем $\varphi_2(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_{s+2} (z-a)^s \;\Big|\; \varphi_2(z_m) = 0_{\, m \geq m_0}$

$z_m \to a$ $\quad \varphi_2$ - непр $\Rightarrow \varphi_2(a) = 0$ т.к. $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_2(z_m) = \varphi_2(a) \underset{a_2=0}{=} 0$

$$f(z) = (z-a)^2 \varphi_2(z) = (z-a)^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s+2} (z-a)^s =$$

$$= (z-a)^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+3} (z-a)^\ell$$ т.о. a - нуль не меньше 3-го порядка

этот процесс м. продолжить до ∞

В итоге $a_n = 0$ - можно $\forall n$

т.о. в круге с центром a $f(z) \equiv 0$

Выберем $\forall b \in G$ $\quad (\exists\, b \notin |z-a| < r$

Соединим b и a непр. кривой L (L - спрямляема и им. конечн. длину)

обозн $a_1 = L \cap (|z-a| < R)^{K_0}$, a_1 - самые удаленн. у двигаться по L от a

возьм $r_1 \geq d(L, \partial G) > 0$, круг радиуса r_1 $(K_1) \subset G$

~~на где~~ дале $z \in a\, a_1 \cap K_0 \neq \varnothing$ $\quad f(z) = 0$, т.к. $f(z) \equiv 0$ в K_0

т.о. для $z \in a\, a_1 \cap (K_1 \cap K_0)$

~~в $K_1 \cap K_0$ $\exists$ мн-ть~~

в K_1 $\quad f(z) \equiv 0$

аналог $\quad L \cap K_1 = a_2$ $\quad$, круг $K_2(a_2, r_2)$

$(В.ч.с. \;\; r_1 = r_2 = d(L, \partial G))$ $\qquad r_2 \geq d(L, \partial G) > 0$

$K_2 \subset G$

т.о. за конечное число шагов м. дойти до b т.о. b ... в $f(b) \equiv 0 \Rightarrow b \in K_n$ обл $f \equiv 0$

т.о. $f(z) \equiv 0$ в G

<u>чтд</u>

Пр. ($\exists$ $a \in \partial G$)

$f(z) = \sin\frac{1}{z} \not\equiv 0, \; z \neq 0$

$G = \{ z : 0 < |z| < +\infty \}$ $\qquad f(z)$ рег в G

найдем нули

$\sin\frac{1}{z} = 0 \quad \frac{1}{z_n} = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

решим

$\sin w = 0$

$\frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) = 0 \;\Big|\cdot e^{iw} \neq 0 \;\forall w \in \mathbb{C}$

(т.к. $e^{iw} = e^{iu + i^2 v} = e^{-v + iu} = e^{-v} \cdot e^{iu} = \underbrace{e^{-v}}_{\neq 0} \underbrace{(\cos u + i \sin u)}_{\neq 0}$ т.к. $|\cos u + i \sin u| = 1$

$e^{2iw} - 1 = 0$

$e^{2iw} = 1 = e^{2\pi n i}$

$2iw = 2\pi n i \Rightarrow w = \pi n$

т.к. $\frac{1}{z_n} = \pi n \Rightarrow z_n = \frac{1}{\pi n}, \; n \neq 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0 \in \partial G$

<u>След 1. Т. 1</u>

$\exists$ $f_1(z)$ и $f_2(z)$ рег в обл. G и

$f_1(z_n) = f_2(z_n)$, где $\{z_n\}$ - удовл усл Т.1.

Тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в G

Док-во

введём $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ — рег в G

$$f(z_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

тогда по Т1 $f(z) \equiv 0$ в $G \Rightarrow f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$ в $G \Rightarrow$
$\Rightarrow f_1(z) \equiv f_2(z)$

чтд

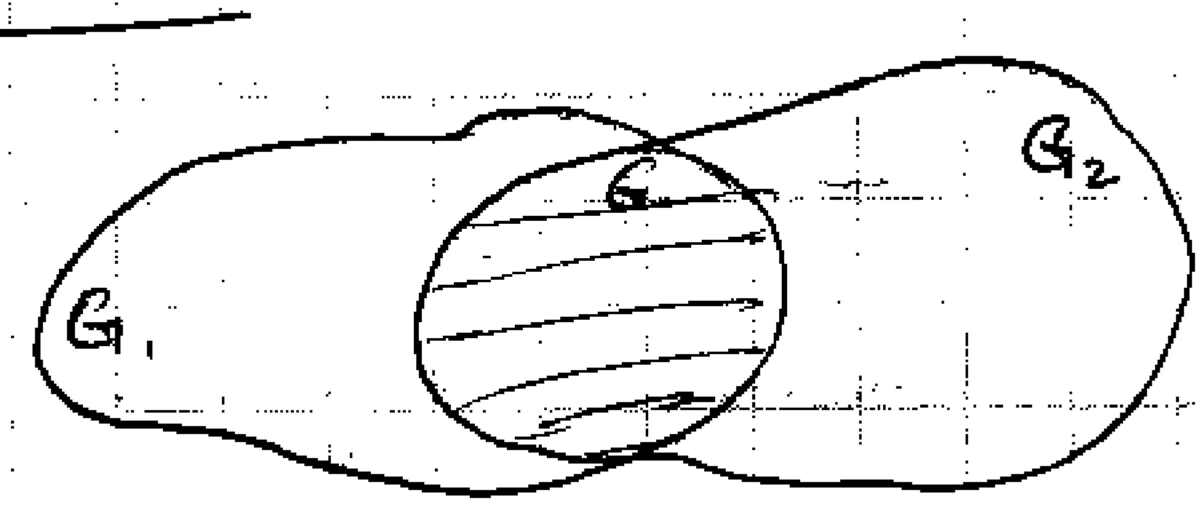
След 2. Т1

$\exists$ G_1 и G_2 — обл-ти в $\mathbb{C}$, причем $G_1 \cap G_2 = G \neq \emptyset$

$\exists$ ~~f_1 и f_2~~ $f_1(z)$ — рег в G_1, $f_2(z)$ — рег в G_2, причем $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в G $(f_1(z) = f_2(z),\ z \in G)$

Тогда $\exists$-ет единственная рег в $G_1 \cup G_2$ ф-я $f(z)$: $f(z) = f_1(z)$ в G_1 и $f(z) = f_2(z)$ в G_2

Док-во



Рассм $f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \\ f_2(z), & z \in G_2 \setminus \overline{G_1} \end{cases}$

т.о. определение $f(z)$:

$$f(z) = f_1(z) = f_2(z), \quad z \in G$$

$f(z)$ м.б. единственным образом продолжена на G_2

§ 16 Принцип аргумента и теорема Руше.

Рассм $f(z)$ рег в G – односвязн. обл, за исключением может быть конечного числа полюсов. $\exists\ \Gamma$ – кусочно гладк. замкнутая простая кривая, лежащая в G, Γ обходится против часовой стрелки

(все нули и полюса f лежат внутри Γ или вне Γ)

Теор 1

При сделанных предположениях отн. ф-и $f(z)$ и кривой Γ, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P \quad (1)$$

где N – число нулей ф-и f внутри Γ, P – число полюсов ф-и f внутри Γ ~~(с учетом кратности)~~

(каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, а полюс — каков его порядок

Док-во (сначала док-жем частный случай)

Возьм $f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – рег в обл G ф-я $\varphi(a)\neq 0$

$$f'(z)=(z-a)^n\varphi'(z)+n(z-a)^{n-1}\varphi(z)$$

рассм. $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}+\dfrac{n}{z-a}$ – в малой окр-ти т. a

рассм.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz}_{0}+\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{n\,dz}{z-a}$$

$$=\underbrace{\frac{n}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-a}}_{=1\ (\text{вычет})}=n\cdot 1$$

, т.к. φ - рег.

(реда $\frac{1}{z-a} = \frac{(1)}{z-a}$
в ряд
Лорана)

$f(z)$ не им. полюсов и им. нуль $(z=a)$ порядка n

т.о. ф-ла (I) доказана.

В ~~общем~~ другом случае: $f(z) = (z-a)^{-p}\varphi(z)$, $\varphi(z)$ - рег. в G
и $\varphi(z) \neq 0$ $\forall z \in G$

и - полюс порядка p ф-и f

$$f'(z) = (z-a)^{-p}\varphi'(z) - p(z-a)^{-p-1}\varphi(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{p}{z-a}$$

рассм. $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -p\left(\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}\right)\frac{1}{2\pi i} = -p$

т.о. ф-ла (1) док

Если нулей и полюсов несколько.

нули: $z_1, \dots, z_k$ полюса: $\xi_1, \dots, \xi_l$
порядки: $n_1, \dots, n_k$ порядки: $p_1, \dots, p_l$

Тогда $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum\limits_{s=1}^{k} n_s - \sum\limits_{r=1}^{l} p_r = N - P$ ч.т.д.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\ln f(z)\right)'$$

$$\left(\ln f(z)\right)' = \left(\ln |f(z)|\right)' + \left(i \arg f(z)\right)'$$

Рассм

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\ln|f(z)|)' dz +$$

$$+ \frac{i}{2\pi i} \oint_\Gamma (\arg f(z))' dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \ln|f(z)|}_{=0} + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

$=0$ т.к. контур замкн

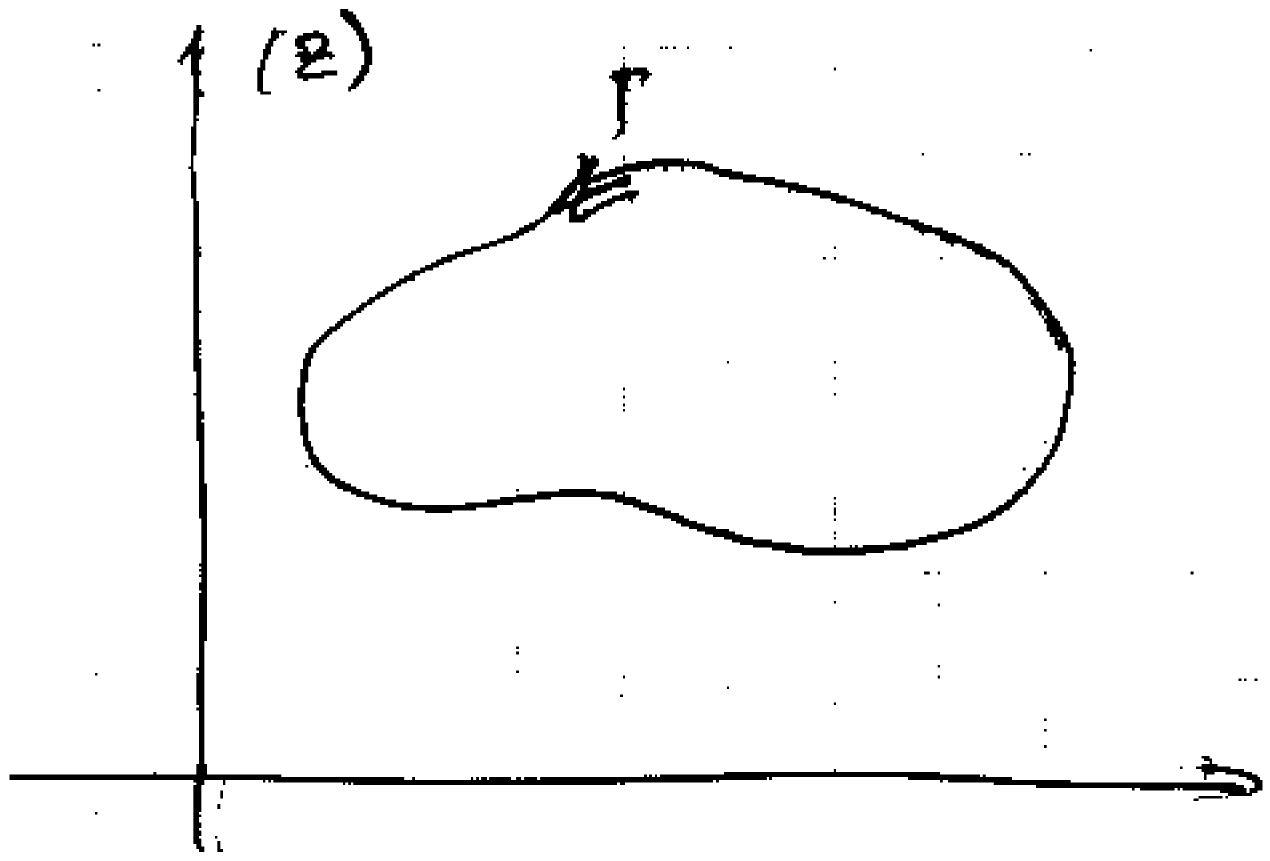
приращение на Γ ф-и $\ln|f(z)|$

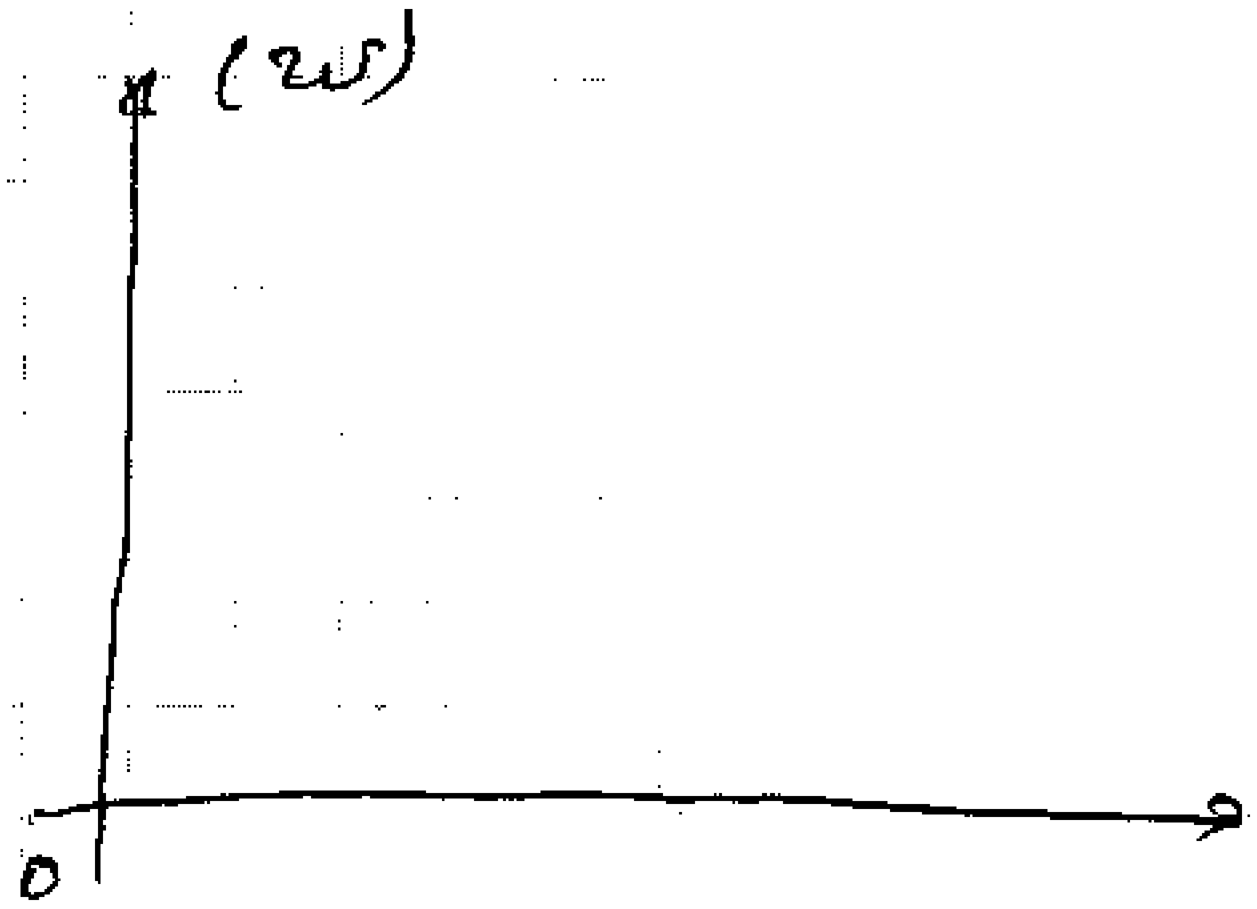
$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

<u>След. Т1</u>

В предположение Т1 справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \arg f(z) = N - P$$





$\Gamma' = f(\Gamma)$, $w = f(z)$ - образ

в (z) т. z обходит контур Γ 1 раз, а

в (w) т. z обходит т. 0 $N-P$ раз

(Если $N-P<0$, то обход по часовой стрелке, если $N-P>0$, то — против)

(Это принцип аргумента)

Теор 2 (Руше)

Пусть ф-ции $f(z)$ и $g(z)$ — рег. в односвязн. обл. G, а $\Gamma \subset G$ — простой замкн. контур, причем $|f(z)|<|g(z)|$ для $z\in\Gamma$. Тогда ф-ции $(f(z)+g(z))$ и $g(z)$ имеют одинаковое кол-во нулей внутри Γ

Док-во

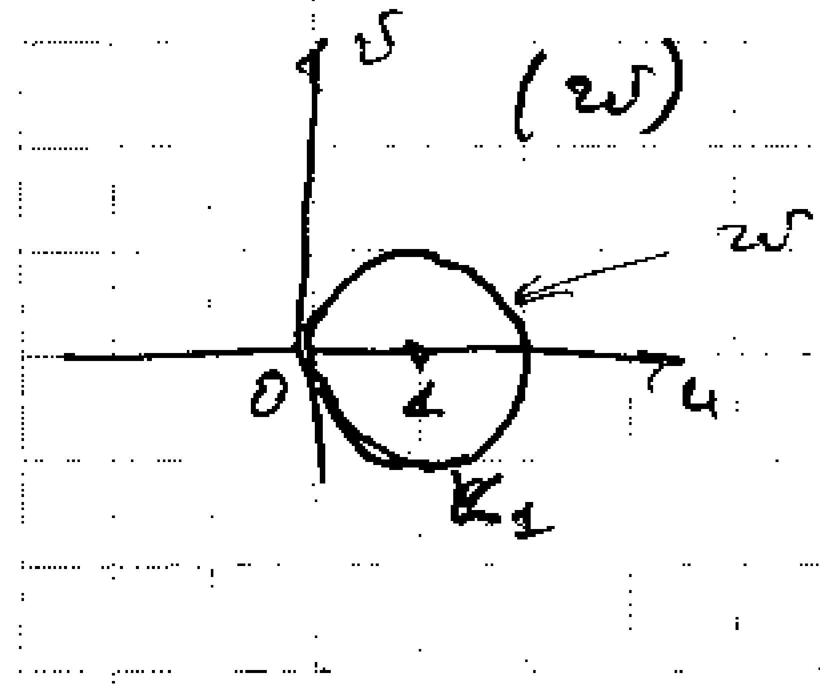
т.к. f и g — рег, то полюсов в G они не имеют, т.о. в рав-ве (1) $P=0$

Применим след Т 1 для $f(z)+g(z)$

$$N_{f+g}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\left(f(z)+g(z)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg g(z)\cdot\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg g(z)}_{N_g}+\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)$$

Обозн $w=1+\frac{f(z)}{g(z)}$, Получим $\left|w-1\right|_{z\in\Gamma}=\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|_{z\in\Gamma}<1$



, тогда $\Delta_\Gamma \arg\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)=0$ по принципу арг.

т.о. $=N_g$ ч.т.д.

Пр $z^9 - 6z^4 + 3z^2 - 1$ $\quad |z|<1$

найти число нулей

Возьм $g(z) = -6z^4$ и $f(z) = z^9 + 3z^2 - 1$

$\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ $\quad$ (f и g - рег в $|z|<1$)

Оценим $|f(z)|_{z\in\Gamma} = |z^9 + 3z^2 - 1|_{z\in\Gamma} \le |z|^9_{z\in\Gamma} + 3|z|^2_{z\in\Gamma} + 1$

$= (|z|^9 + 3|z|^2 + 1)\big|_{\substack{z\in\Gamma \\ \Downarrow \\ |z|=1}} = 1^9 + 3\cdot 1^2 + 1 = 5$

$|g(z)|_{z\in\Gamma} = |-6z^4|_{z\in\Gamma} = 6|z|^4_{z\in\Gamma} = 6 > 5 \ge |f(z)|_{z\in\Gamma}$

т.е. вып усл Т2.

по Т2 Число нулей ф-и $g(z) = -6z^4$ и $f(z) + g(z) = z^9 - 6z^4 + 3z^2 - 1$ внутри Γ одинаково

$N_g = 4 \Rightarrow$ всего нулей $f+g$ — 4

$N_g = N_{f+g}$

Теор 3 (Основная теорема алгебры)

Всякий многочлен вида $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ имеет ровно n корней (с учетом их кратности)

Док-во

возьм $g(z) = z^n$, $f(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ рассм.

возьмем в

Тогда $|g(z)|_{z\ldots}$

$|f(z)|_{z\in\Gamma_R}$

$\cancel{\lim_{R\to\infty} \frac{|f(z)|}{|g(z)|}}$

значит $\exists R_0$ для

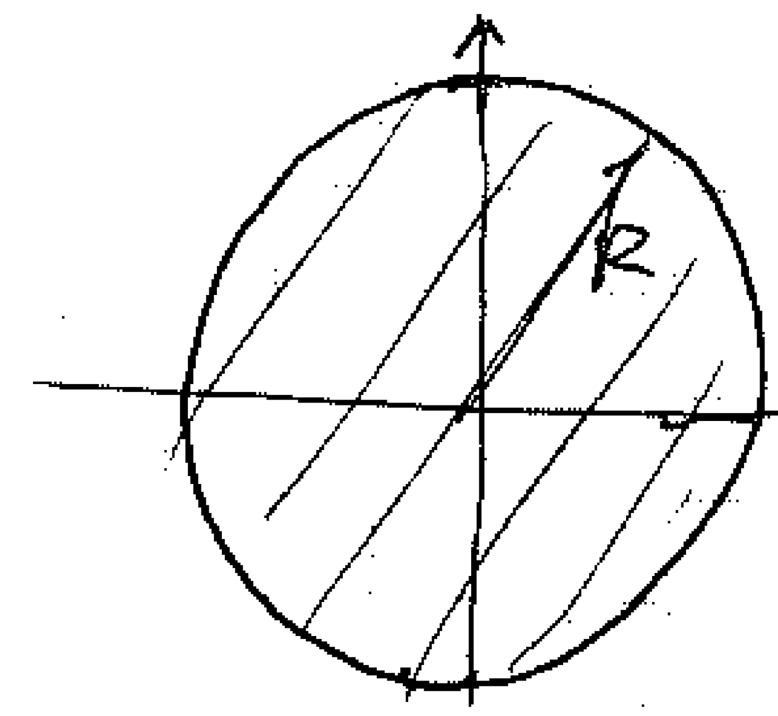
$\Rightarrow |f(z)|_{z\in\Gamma_R} <$

Тогда по Т2

N_g - число ну

$N_g = N_{z^n}$

$n = N_{z^n} =$



Пр (к §13)

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

V.

$|z|<1$

...ло нулей

z^9+3z^2-1

рез в $|z|<1$)

$\le |z|^9_{z\in\Gamma} + 3|z|^2_{z\in\Gamma}+1 =$

$\dots 1 = 5$

$|z|^4_{z\in\Gamma} = 6 > 5 > |f(z)|_{z\in\Gamma}$

ТЗ

$6z^4$

$z^9-6z^4+3z^2-1$

...ей $f+g$ – 4

алгебры)

$P_n(z) = z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$

с учетом их

$(z) = a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\dots+a_{n-1}z+a_n$

возьмем в качестве $\Gamma_R = \{z : z = Re^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $R>0$

Тогда $|g(z)|_{z\in\Gamma_R} = |R^n e^{in\varphi}|_{0\le\varphi\le 2\pi} = R^n$

$$|f(z)|_{z\in\Gamma_R} \le \underbrace{|a_1|R^{n-1}+|a_2|R^{n-2}+\dots+|a_{n-1}|R+|a_n|}_{\Phi_{n-1}(R)}$$

$$\cancel{\lim_{R\to\infty}\frac{|f(z)|}{|g(z)|}} = \lim_{R\to\infty}\frac{\Phi_{n-1}(R)}{R^n} = 0$$

значит $\exists R_0$ для ~~…~~ $\forall R\ge R_0$ (дост. больших) $\Phi_{n-1}(R) < R^n \Rightarrow$

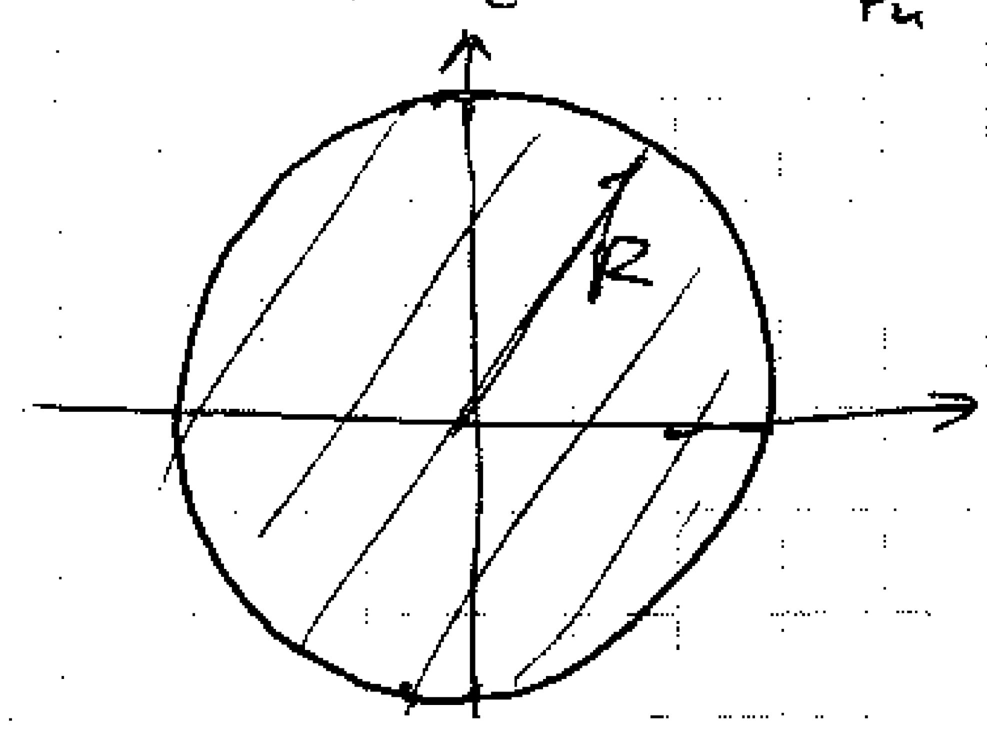
$\Rightarrow |f(z)|_{z\in\Gamma_R} < |g(z)|_{z\in\Gamma_R}$, $R\ge R_0$

Тогда по ТЗ

N_g – число нулей ф-и g совпадает с N_{f+g} внутри Γ_R

$N_g = N_{z^n}$, $N_{f+g} = N_{P_n}$

$n = N_{z^n} = N_{P_n}$



т.к. R м.б. как угодно большим то ~~…~~ число корней – n

чтд

Пр! (к §13) док-ть

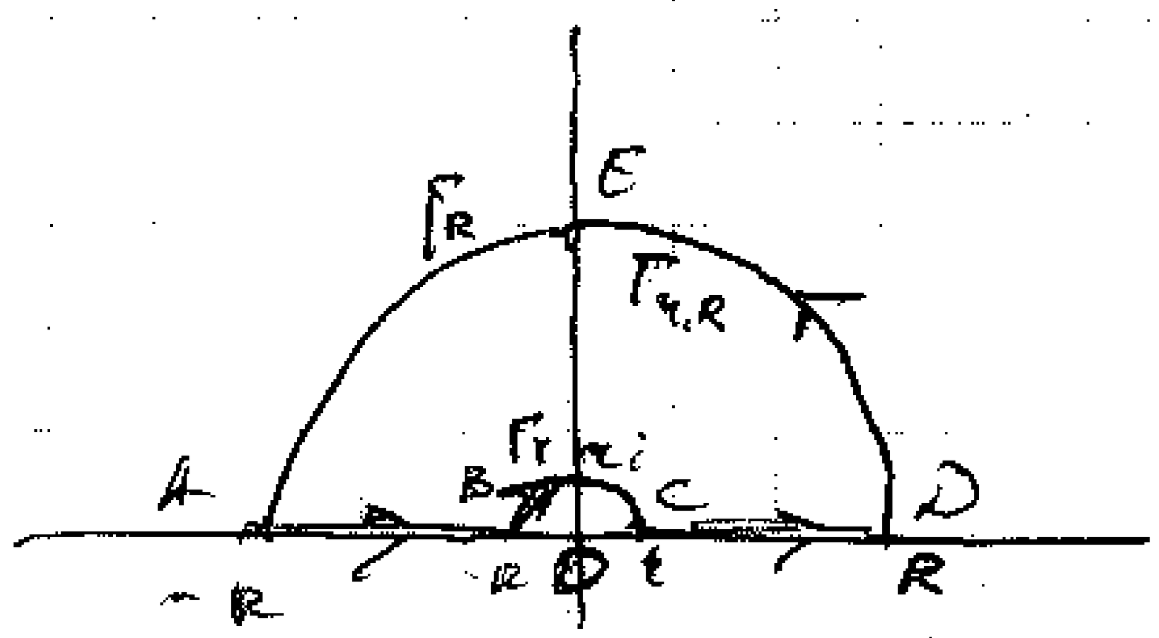
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

рассм. V.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = 0$ (т.к. $\frac{\cos x}{x}$ – нечет. ф-я)

$$V.p. = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} 0 = 0$$

Возьм. V.p. $\quad iI + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx = iI$

применим лемму Жордана



рассм $\int_{\Gamma_{r,R}} \frac{e^{z}}{z}\,dz = 0$

$$\| $$

$$\left(\int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_r} + \int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}\right)\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

по л. Ж.

$$0$$

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}\right)\frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\underbrace{\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{I_r}$$

$$I_r = \int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\pi}^{0}\frac{e^{ire^{i\varphi}}\cdot r i e^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\,d\varphi \xrightarrow[r\to 0]{} i\cdot(-\pi)$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}\right)\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi$$

$$\| \; I$$

§ 18 Ф-я Жуков...

$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right.$

<u>Св-во 1</u>

Ф-я (1) ...

области $|z| > 1$.

<u>Св-во 2.</u>

Ф-я (1) ...

в эллипс на ...

$\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} =$

<u>Док-во</u>

Заменив в ...

$w = u + iv$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi +$

т.о.

$u + iv = \frac{1}{2}($

т.к. $u \in \mathbb{R}$ и v

Рассм окр-ть

при ...

$= 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i I$

$dz = 0$

$+ \int_{r}^{R} \Big) \frac{e^{iz}}{z} dz$

$\xrightarrow[r \to 0]{} \xi - \pi$

28.04.06

Лекция №

(§18) Ф-я Жуковского (продолж.)

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (1)$$

Св-во 1

Ф-я (1) однолистна в круге $|z|<1$ и в области $|z|>1$.

Св-во 2.

Ф-я (1) отображает окружность $|z| = r > 0$ в эллипс на плоскости (w) с уравнением $\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1$ (2), где $a_r = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b_r = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$

Док-во

Заменив в ур-е (1) $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $0 \le \varphi < 2\pi$

$w = u + iv \Rightarrow u + iv = \frac{1}{2}\left(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi}\right)$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

т.о.

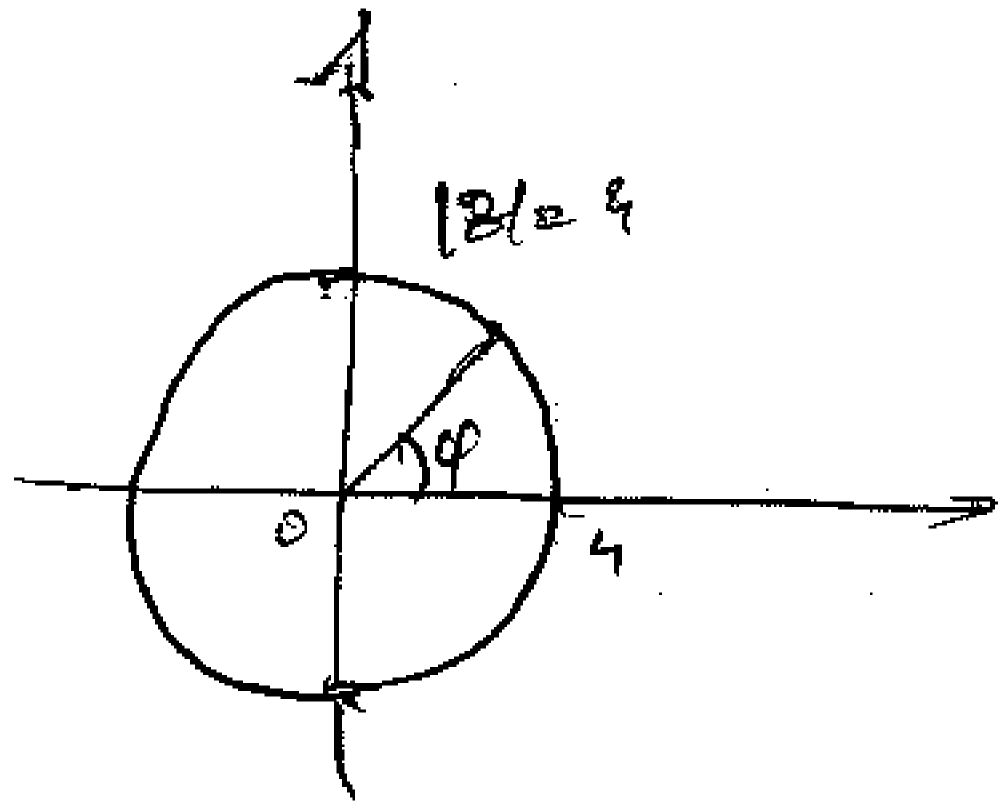
$u + iv = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$

т.к. $u \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad (3)$$

Рассм. окр-ть $|z| = r$ в пл-ти (z)

при введенных обозн. a_r и b_r $\begin{cases} u = a_r\cos\varphi \\ v = b_r \sin\varphi \end{cases}$



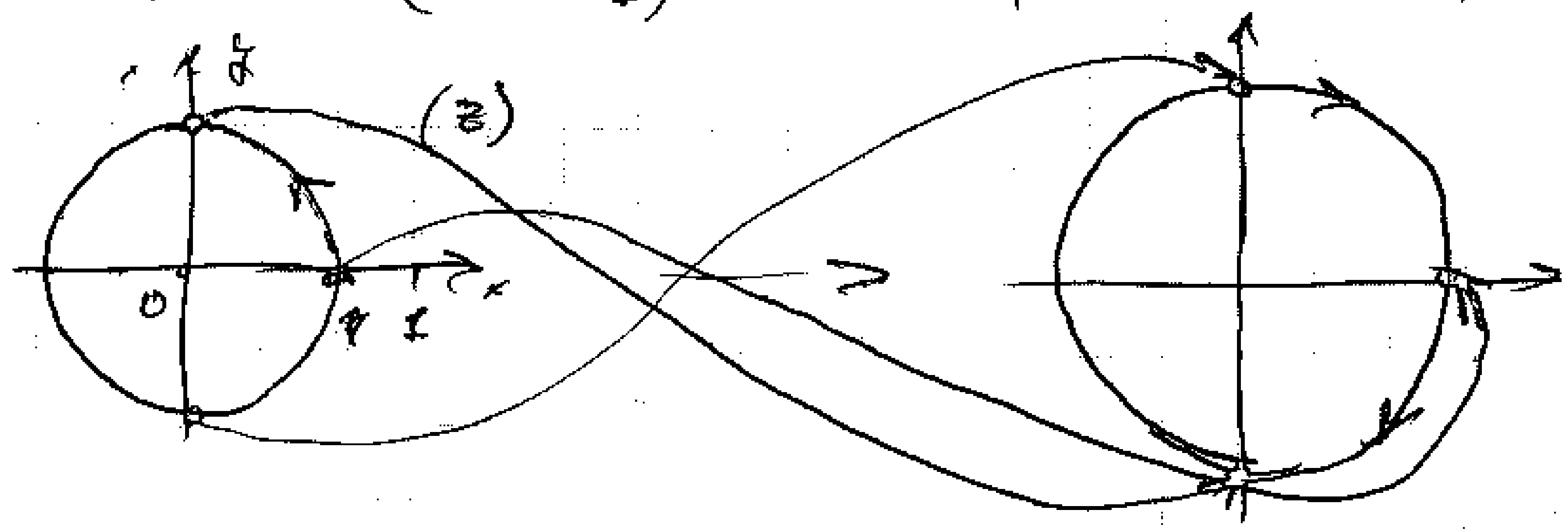
$(3) \Rightarrow \dfrac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$ (4)

возв. в квадрат и сложим

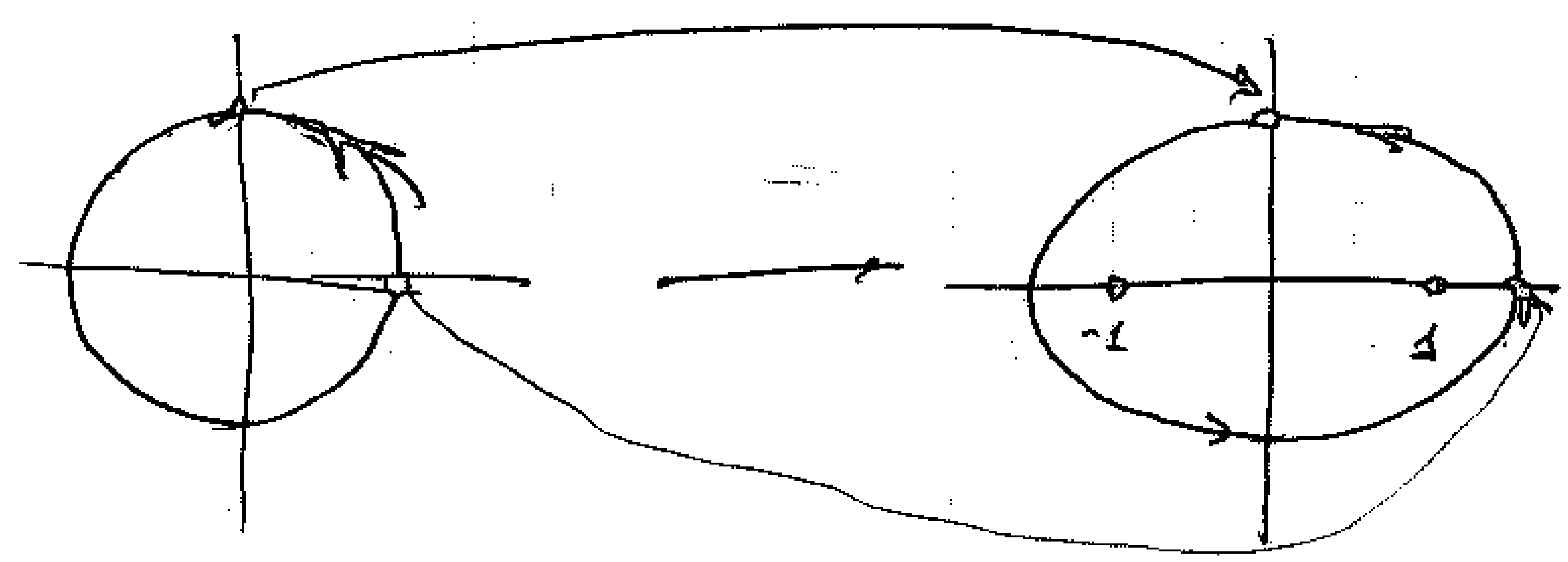
$(4) \Leftrightarrow \dfrac{u^2}{a_r^2} + \dfrac{v^2}{b_r^2} = 1$

Рассм. $0<r<1$

тогда $\left(r - \frac{1}{r}\right) < 0$ $\quad \begin{cases} u = a_r \cos\varphi \\ v = -b_r \sin\varphi \end{cases}$



Рассм. $r > 1$



Увеличиваем r $\quad a_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$, $b_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$

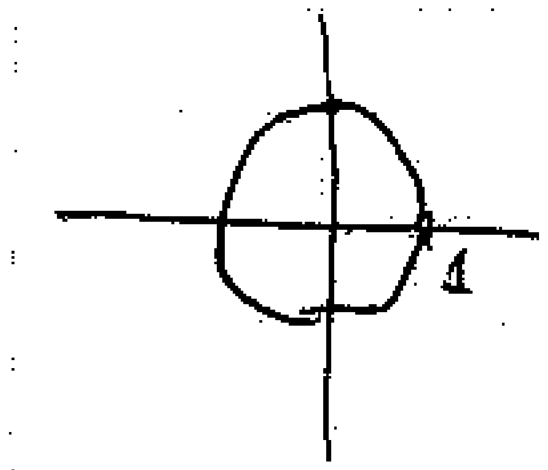
Найдем координаты фокусов эллипса

$c = \sqrt{a_r^2 - b_r^2} = 1$ т.о. фокусы ± 1

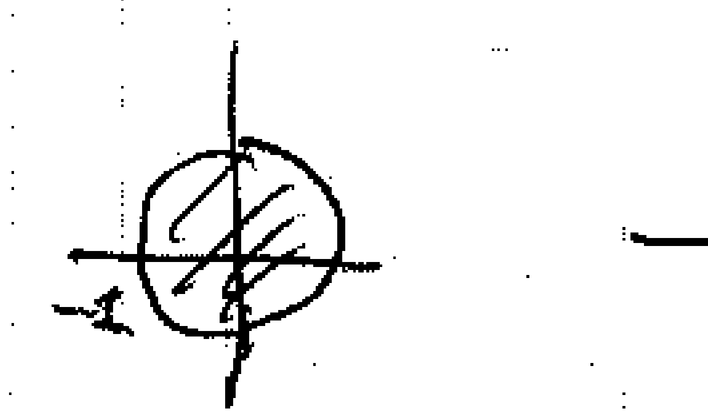
$a_r > 1$

Рассм. $r = 1$

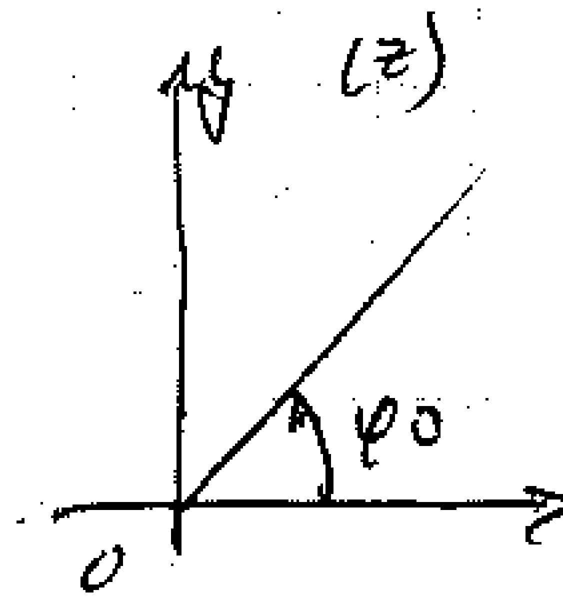
$\begin{cases} u = \cos\varphi \\ v = 0 \end{cases}$



Ф-я Жу



Образы лу



$\left(\dfrac{u}{\cos\varphi_0}\right)^2 - \Big(\dfrac{}{\sin}$

луч перех

а) $0 \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$

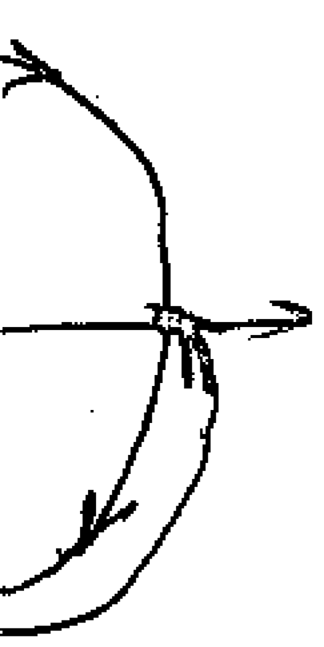
$v > 0$, $r > 1$

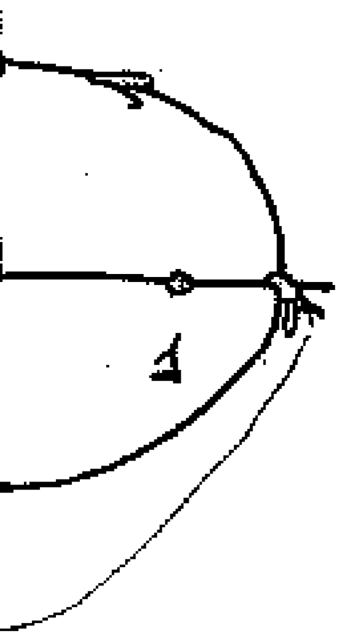
$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=1 \quad (4)$$

…рат и сложение

$+\frac{v^2}{b_r^2}=1$

$\cos\varphi$
$\sin\varphi$





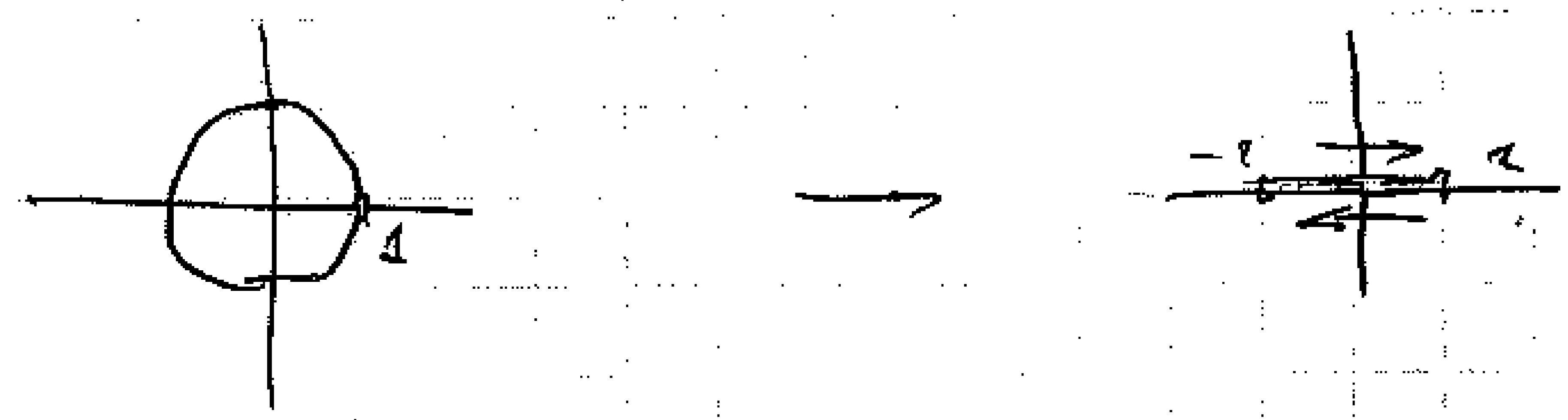
∞, $b_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$

Эллипса

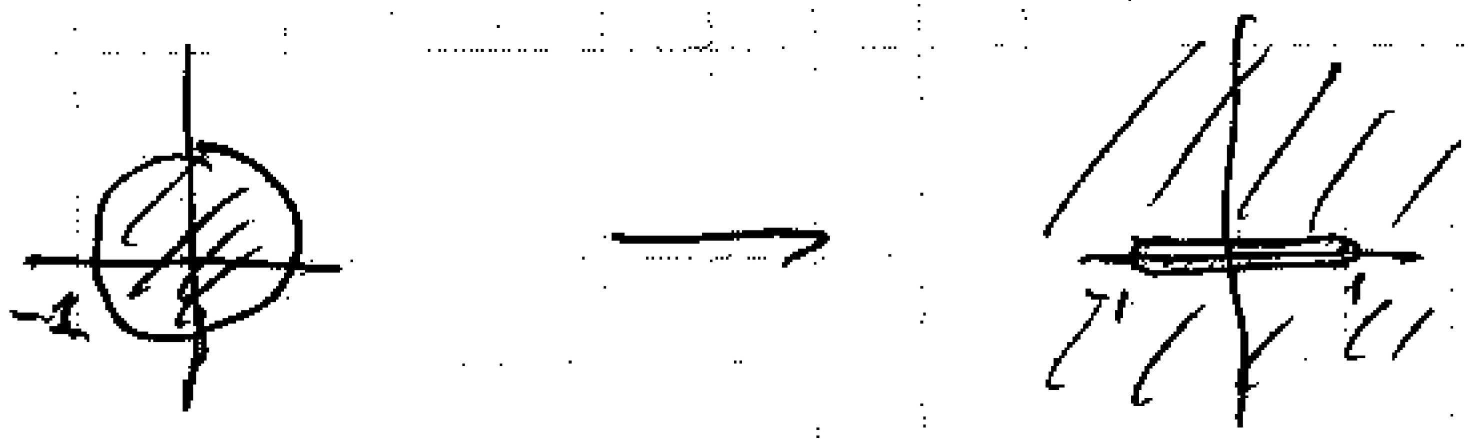
Фокусы ± 1

Рассм $r=1$

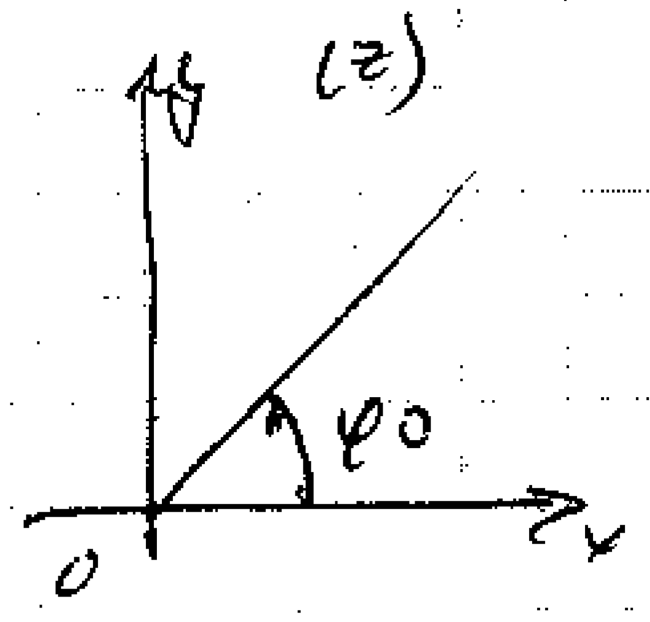
$\begin{cases} u=\cos\varphi \\ v=0 \end{cases}$ $\qquad 0\le\varphi<2\pi$, $\quad -1\le\cos\varphi\le 1$



Ф-е Жуковского отображения при $r=1$



Образы лучей



заменив в (3) φ на φ_0 и получим

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi_0 \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi_0 \end{cases} \quad (5) \quad 0<r<+\infty$$

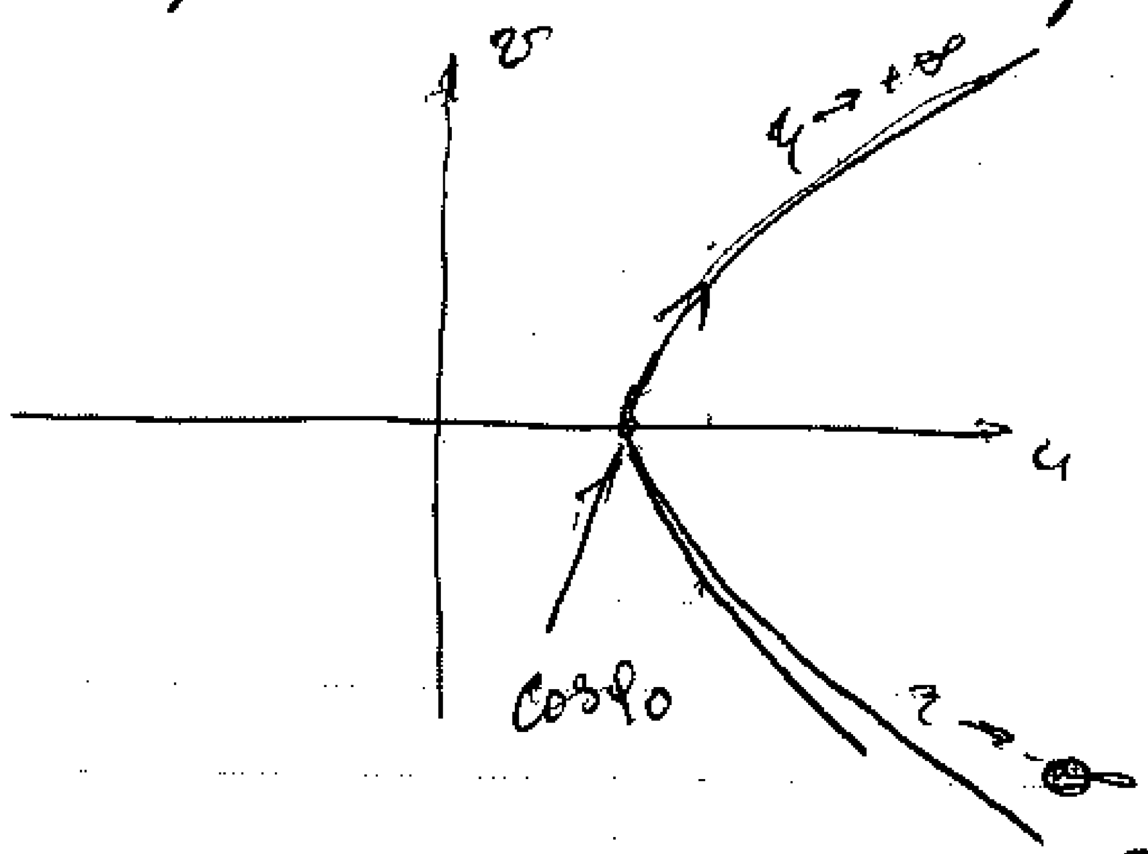
$$\left(\frac{u}{\cos\varphi_0}\right)^2-\left(\frac{v}{\sin\varphi_0}\right)^2=1 \quad (6)$$ - гипербола

луч переходит в одну из ветвей гиперболы

а) $0\le\varphi_0<\frac{\pi}{2}$, тогда $\cos\varphi_0\ge 0$, $\sin\varphi_0>0$
$u>0\ \forall r$, а v меняет знак!

$v>0$, $r>1$ и $v<0$, $r<1$.

Начертим ветвь гиперболы



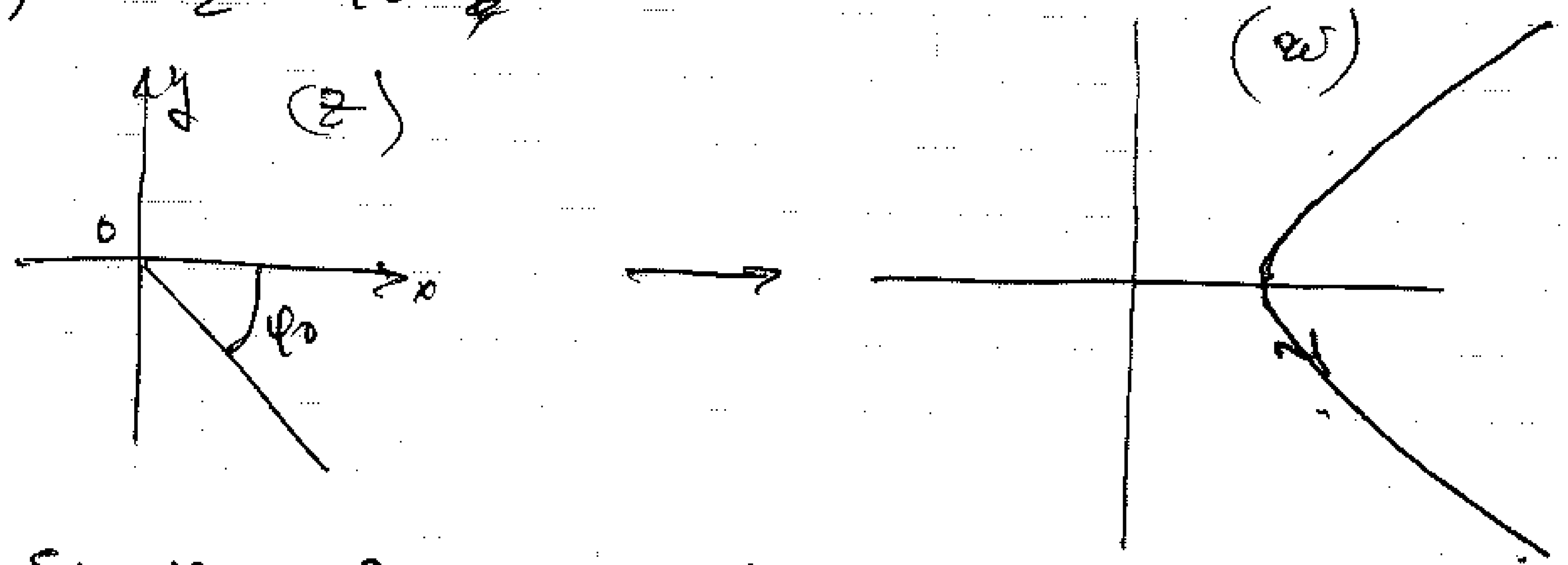
$r\to+\infty$ $v\to+\infty$

$r\to0$ $v\to-\infty$

$0<r<\infty$ =>

Найдем фокус $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0}=1$

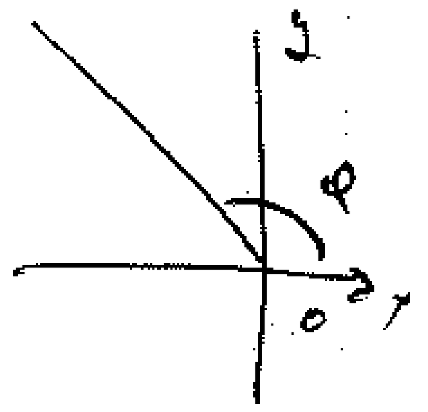
б) $-\frac{\pi}{2}<\varphi_0<0$



$\sin\varphi_0<0$ => $r\to\infty$ $v\to-\infty$

$r\to0$ $v\to+\infty$

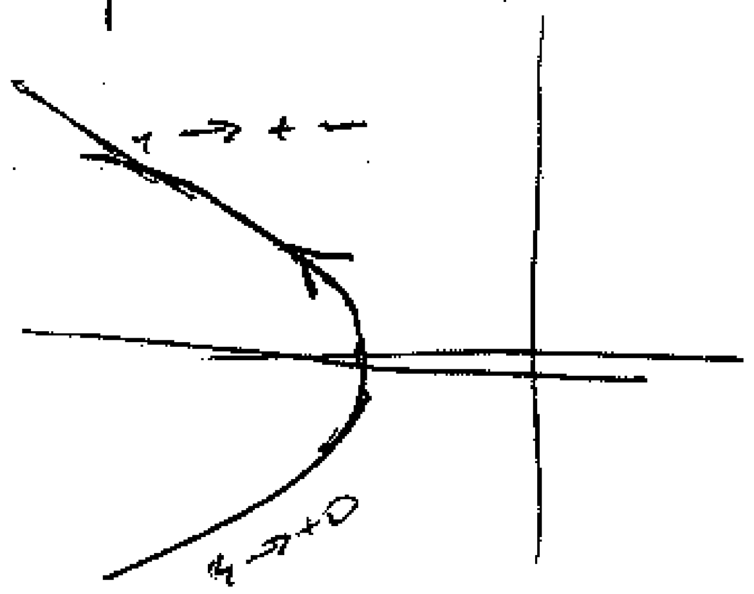
в) $\frac{\pi}{2}<\varphi_0\le\pi$



$\cos\varphi_0<0$ $u<0$

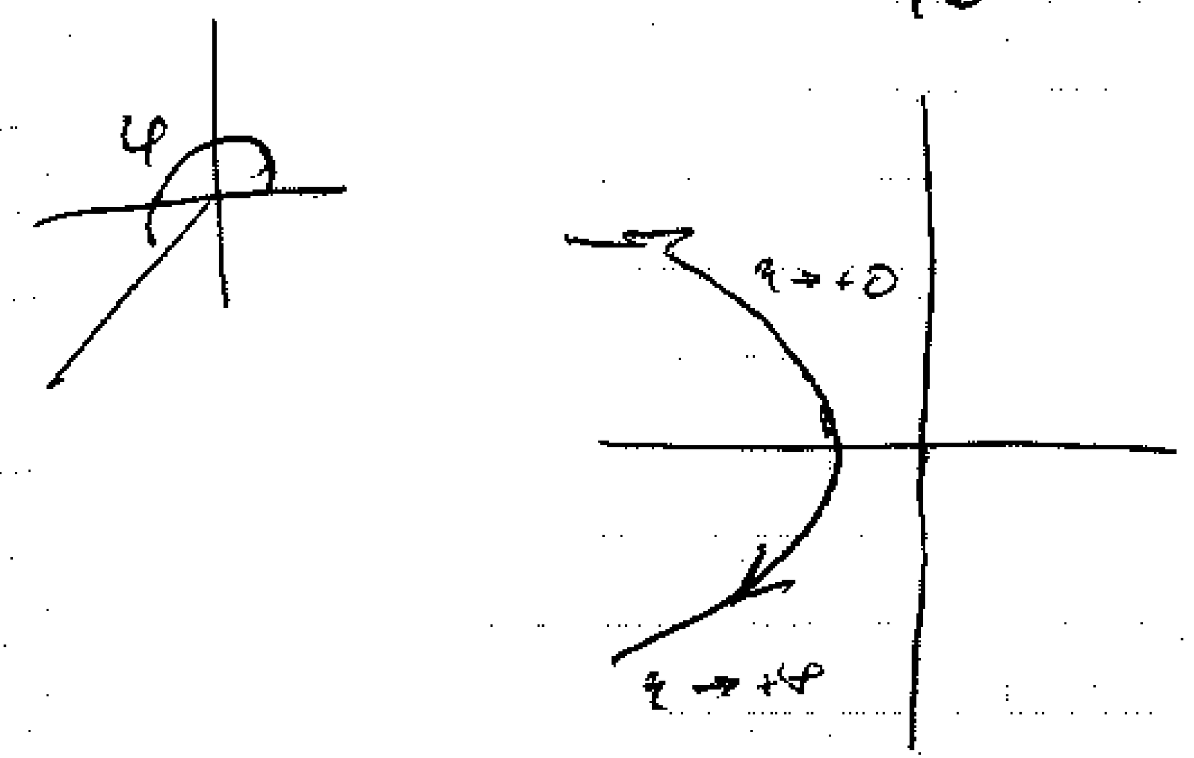
$\sin\varphi_0>0$ $r\to+0$ $v\to-\infty$

$r\to+\infty$ $v\to+\infty$



г) $\pi<\varphi_0<\frac{3\pi}{2}$ $\cos\varphi_0<0$

$\sin\varphi_0<0$



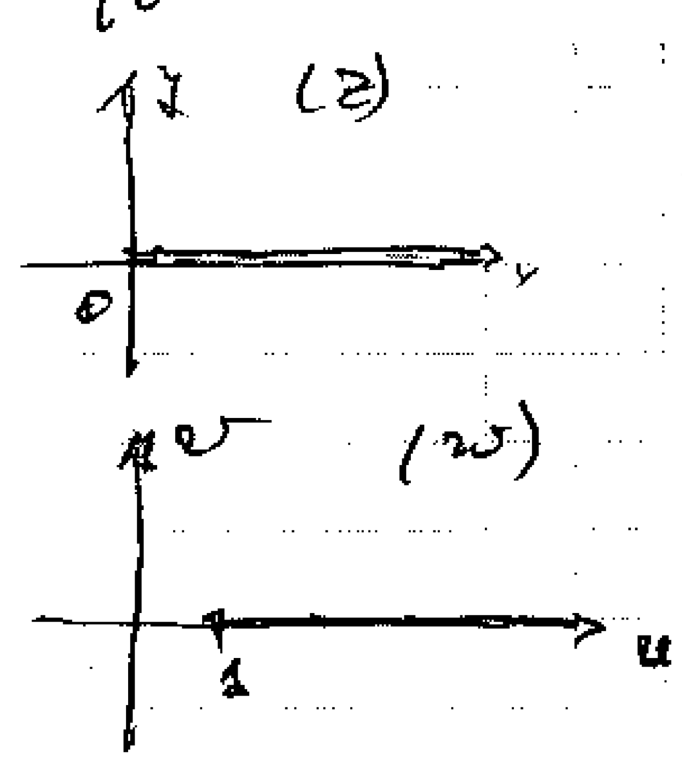
~~Док-ием~~

$\left(r+\frac{1}{r}\right)\ge2$ $r\ge0$

$r^2+1\ge2r$

$(r-1)^2\ge0$

д) $\varphi_0=0$



$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\ge1$

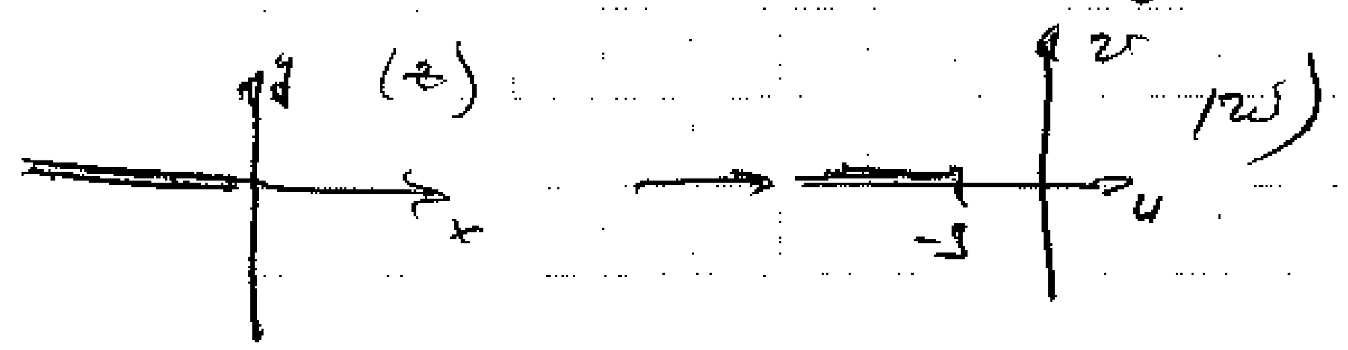
$v=0$

$0<r<+\infty$

$1\le u<+\infty$

е) $\varphi_0=\pi$ $u=-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$

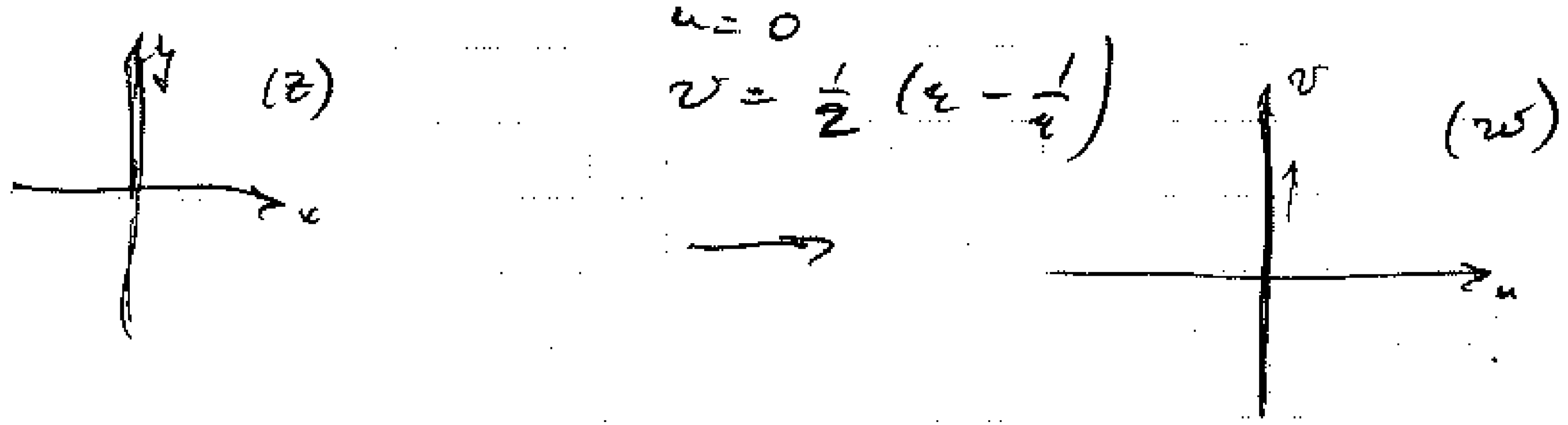
$v=0$



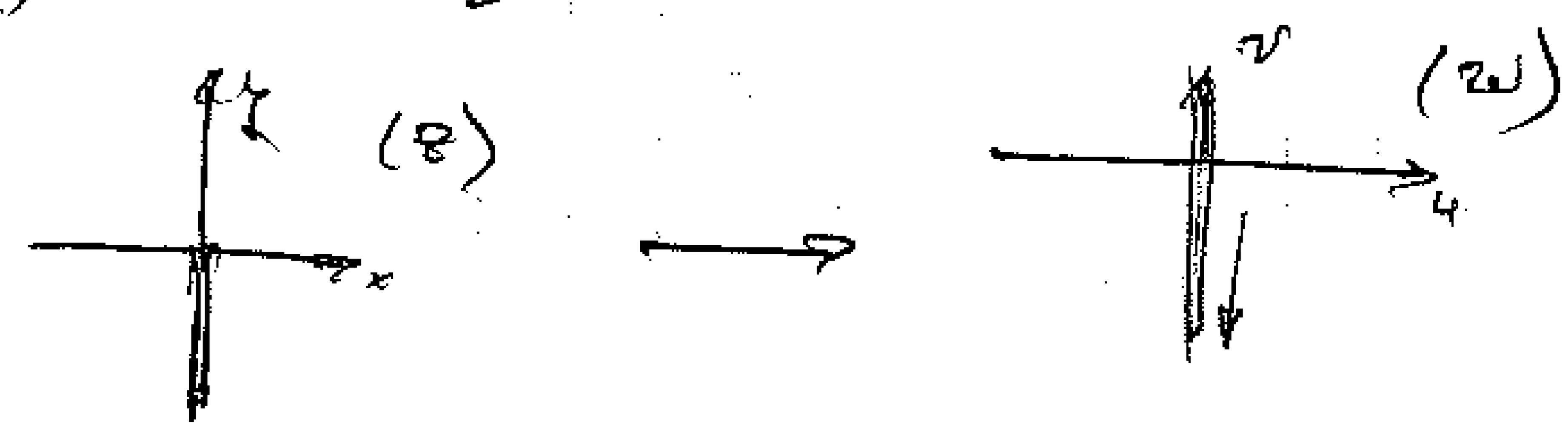
ж) $\varphi_0=+\frac{\pi}{2}$

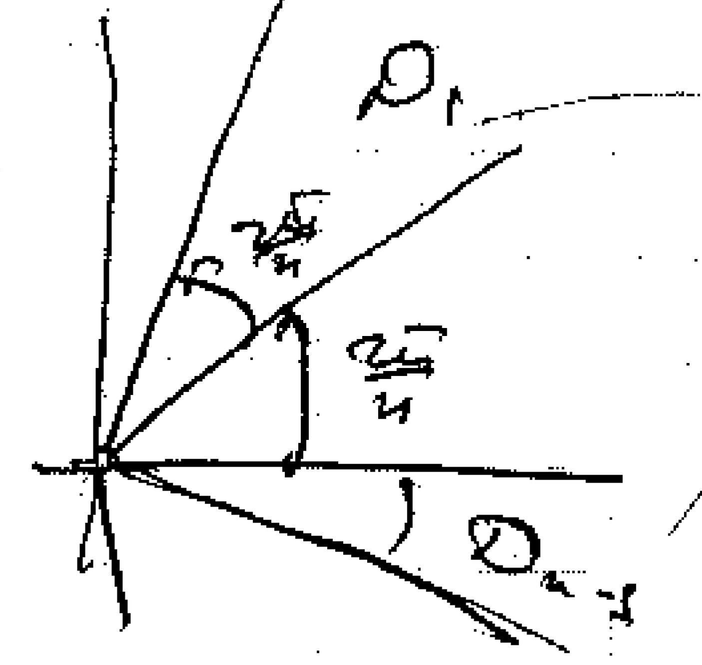
$u=0$

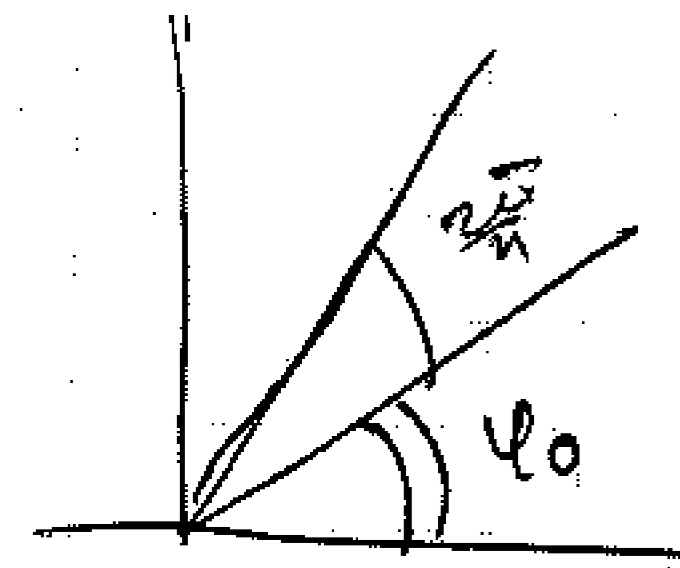
$v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$



н) $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$

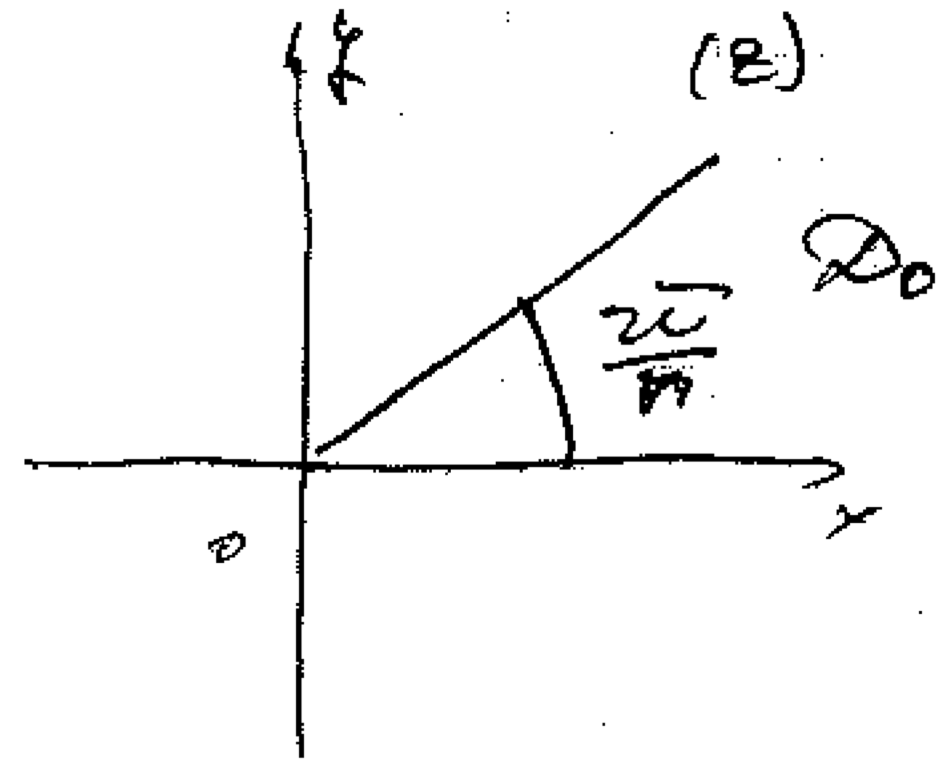






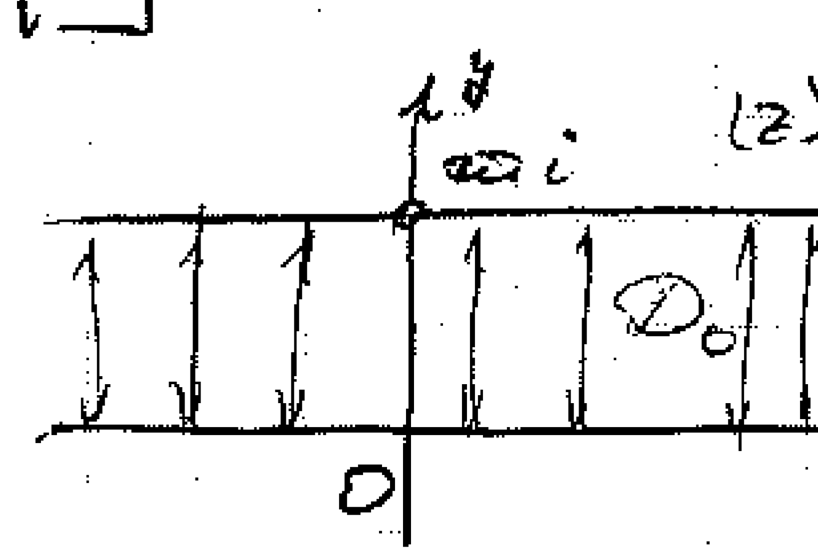
§19 Отображения с помощью степенной и показательной функций

1) Рассм. $w = z^n$ (1), $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$



Обозн. D_0 - внутренность угла $\frac{2\pi}{n}$

2) $w = e^z$

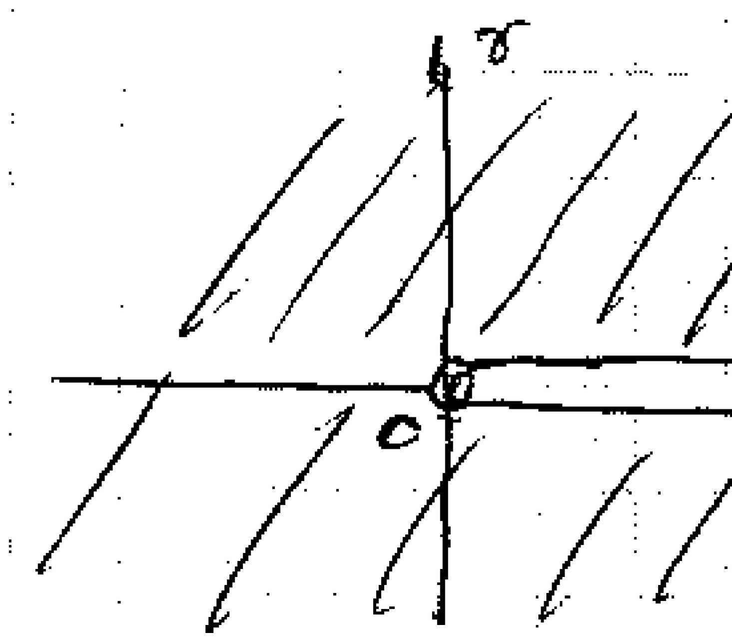


$w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ (т.е. $z \in D_0$). Тогда $|w| =$ … $\arg w$ …

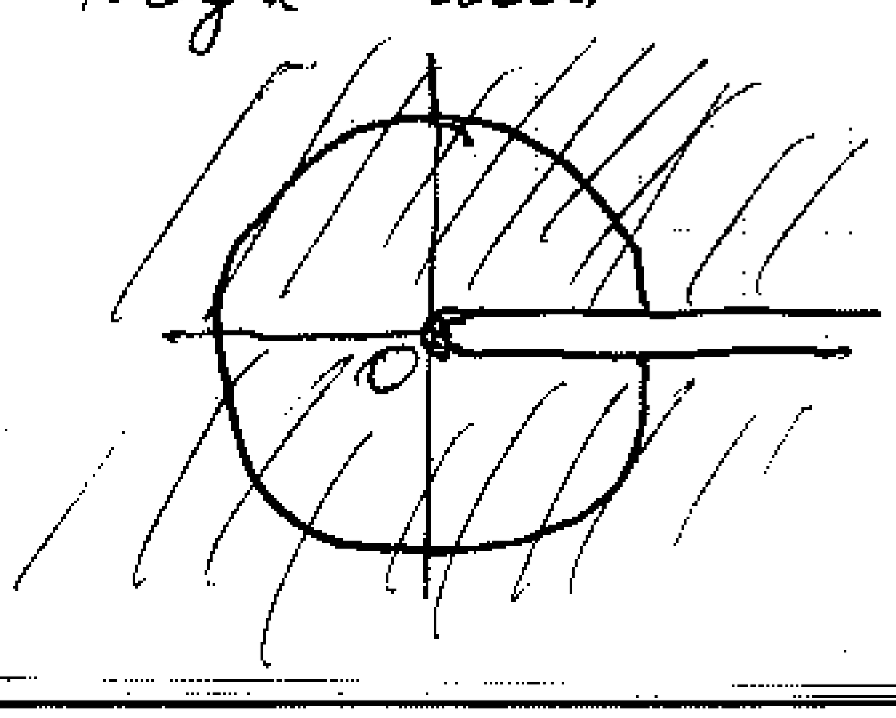
~~$z \in D_0$~~ тогда ур-е (1) примет вид

$u + iv = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

$\begin{cases} u = r^n \cos n\varphi \\ v = r^n \sin n\varphi \end{cases}$ (2) $0 < n\varphi < 2\pi$, $r > 0$



тогда имм



$G_0 = \{w : w \neq a > 0, \forall a\}$

ено
функций

N

...утренность угла $\frac{2\pi}{n}$

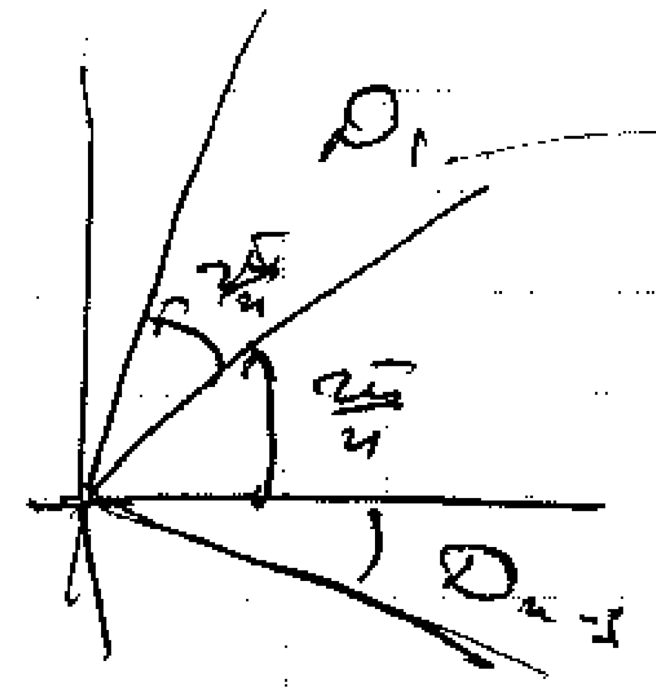
$0<\varphi<\frac{2\pi}{n}$ (если $z \in D_0$)

arg

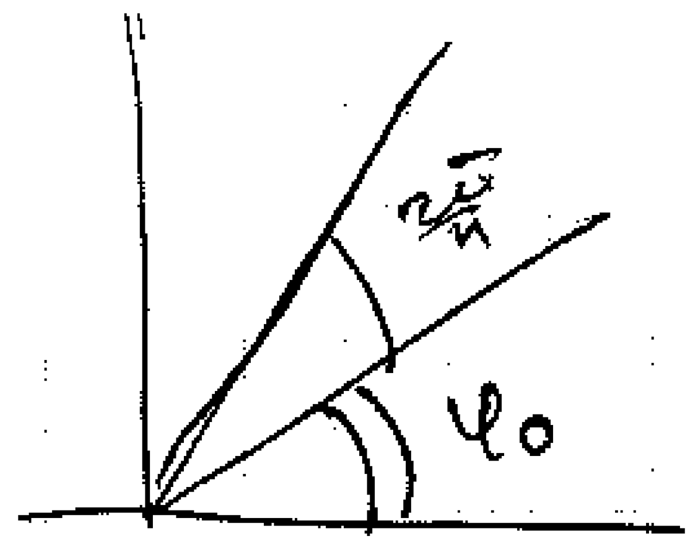
$n\varphi)$

$, r>0$

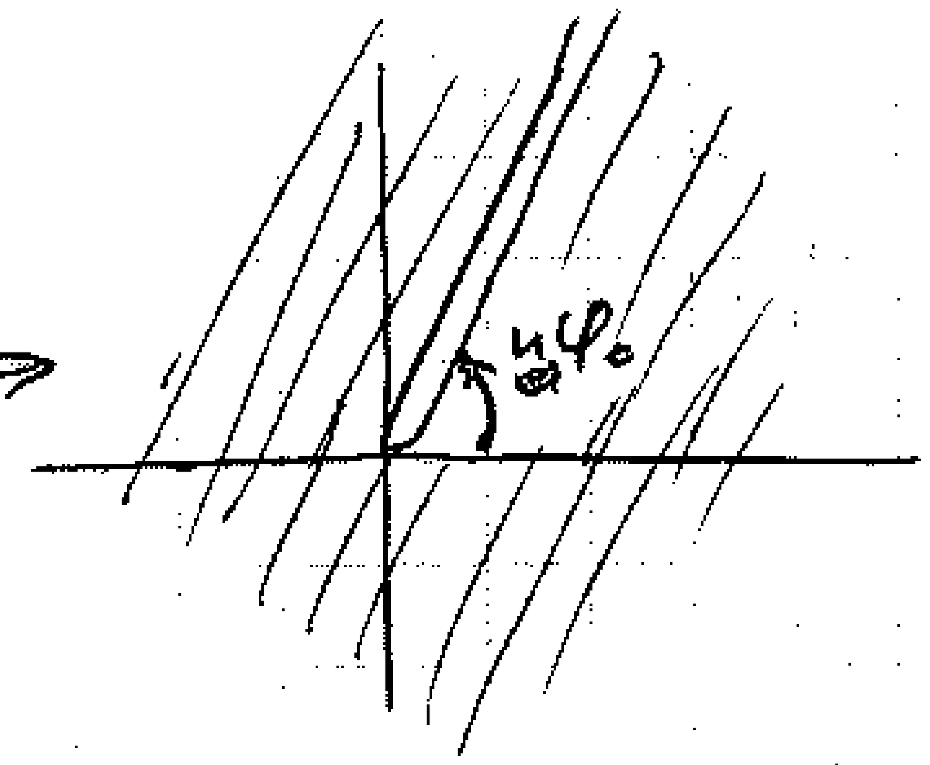
$>0, \forall a \}$



аналог D_0

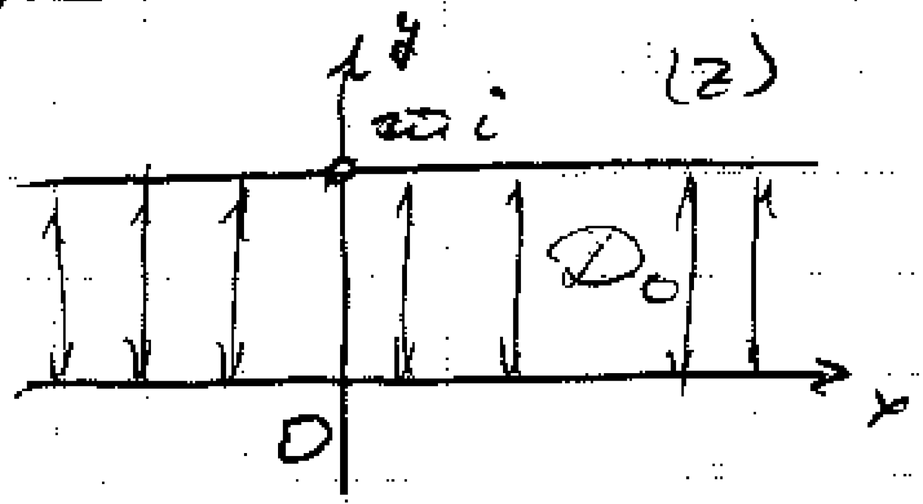


$\longrightarrow$



$n\varphi_0$ м.б. $> 2\pi$

$\boxed{2}$ $w = e^z$ (3)

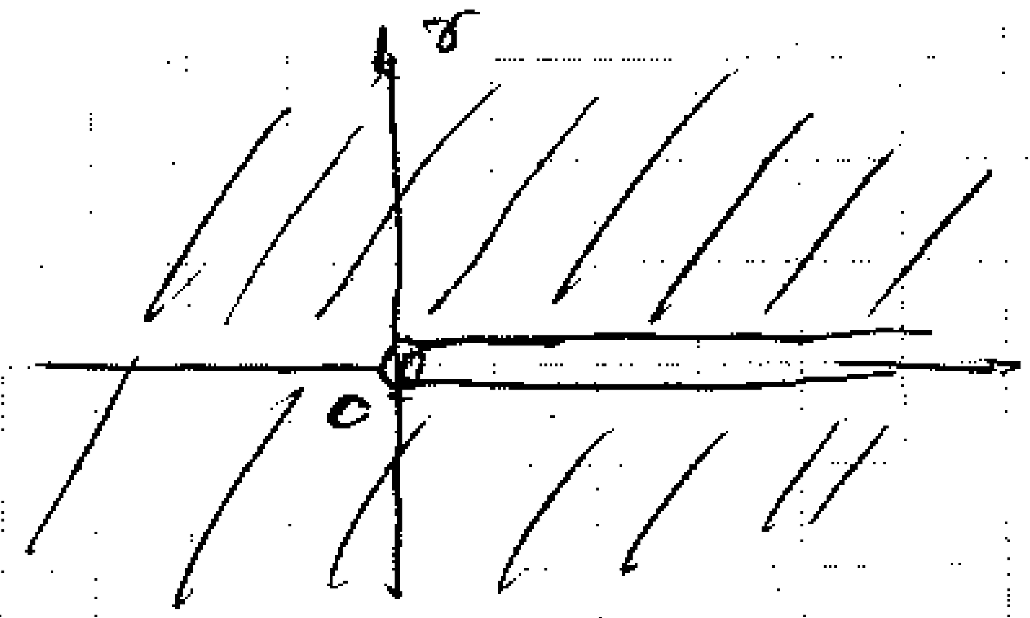


$w = u + iv$
$z = x + iy$

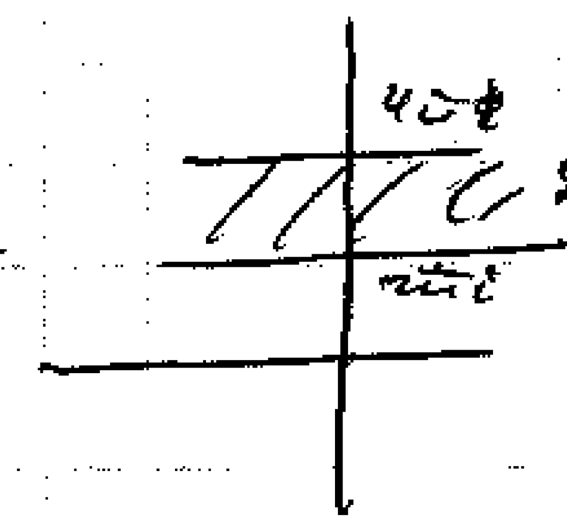
$w = u + iv = e^{x+iy} = e^x e^{i\varphi} = e^x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

если $z \in D_0$, то $0 < y < 2\pi$, $-\infty < x < +\infty$

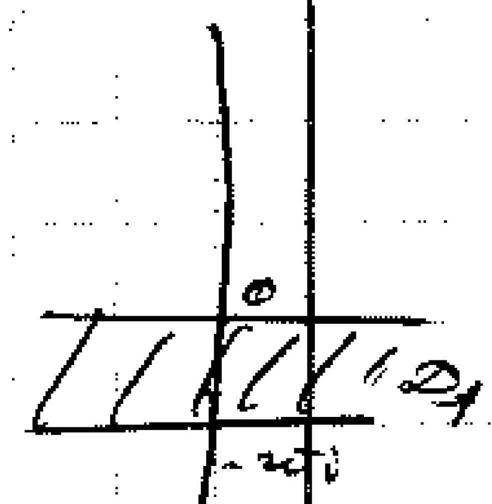
Тогда $\begin{cases} |w| = e^x \geq 0 \\ \arg w = y \end{cases}$



аналог

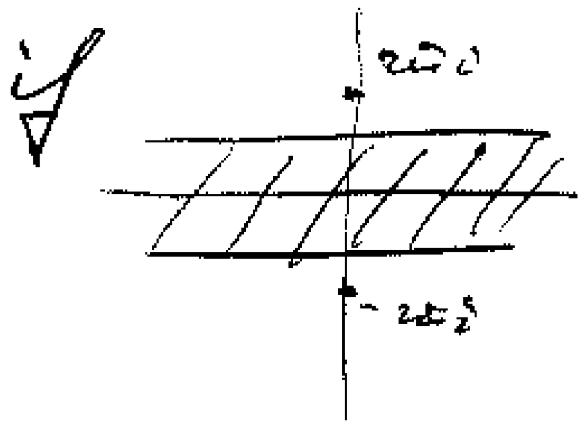


,



$D_n = D_0 + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$

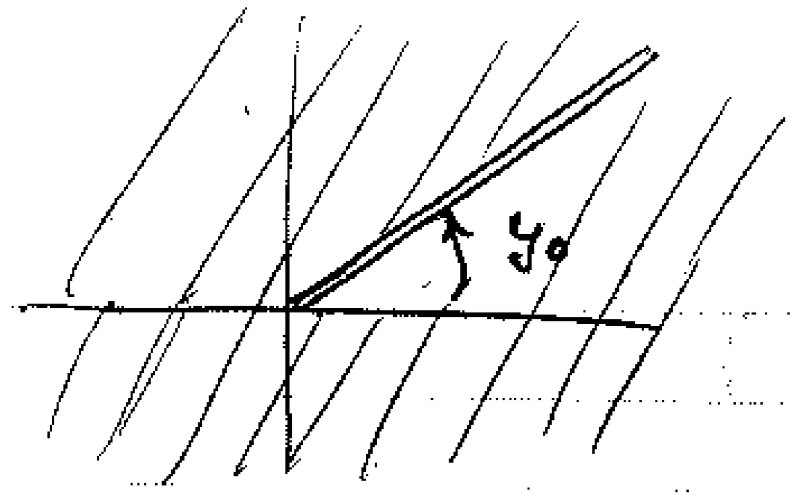
тогда $e^{D_n} = G_0$



тогда имеем $y_0 < y < y_0 + 2\pi$

Тогда $\arg w = y \in (y_0, y_0 + 2\pi)$.

y_0 м.б. $> 2\pi$



т.о. ф-я e^z — бесконечнолистная

$\forall$ т. w — образ ∞ кол-ва т. z

Опр. Отображение $\underset{\vee}{w = f(z)}$ обл-ти D в обл-ть G наз-ся n-листным, если $\forall\, w \in G$ существуют n точек $z_k \in D$ $k = 1, \dots, n$, таких, что $f(z_k) = w$

$w = z^n$ — n-листное отобр. в обл-ти $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

§20 Регулярные ветви многозначных функций

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$

то $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

$\left\{\sqrt[n]{z}\right\}$ — n-значная ф-я $\forall\, z \neq 0$

$\{F(z)\}$ — многозначная ф-я

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

усл. Коши-Римана (необх., чтобы ф-я была регулярна)

Пусть $w = re^{i\varphi}$

Лемма:

Для того, чтобы ф-ция $w = re^{i\varphi}$ с непрерывными частными производными 1-го порядка была регулярной в обл. D, н. и д., чтобы в этой области выполнялись равенства:

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$; $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ $\forall (r, \varphi) \in D$.

$\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$

Док-во

$w = u + iv$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\sin\varphi}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}_{-r\sin\varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}_{r\cos\varphi}$$

т.о.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 \Rightarrow \exists! \text{ реш.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \sin\varphi \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \frac{\partial u}{\partial r} \\ -r\sin\varphi & \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

<u>аналогично</u>
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

подст. в (1)

$$\oplus\quad \begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{array} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi & \cdot\cos\varphi \\ \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi = -\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi & \cdot\sin\varphi \end{cases} \oplus$$

найдем $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

<u>чтд</u>

$\{\sqrt[n]{z}\}$ −

$\{\sqrt[n]{z}\}_0 = \sqrt[n]{\ }$

$u = \sqrt[n]{r}$

$v = \sqrt[n]{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\cos$$

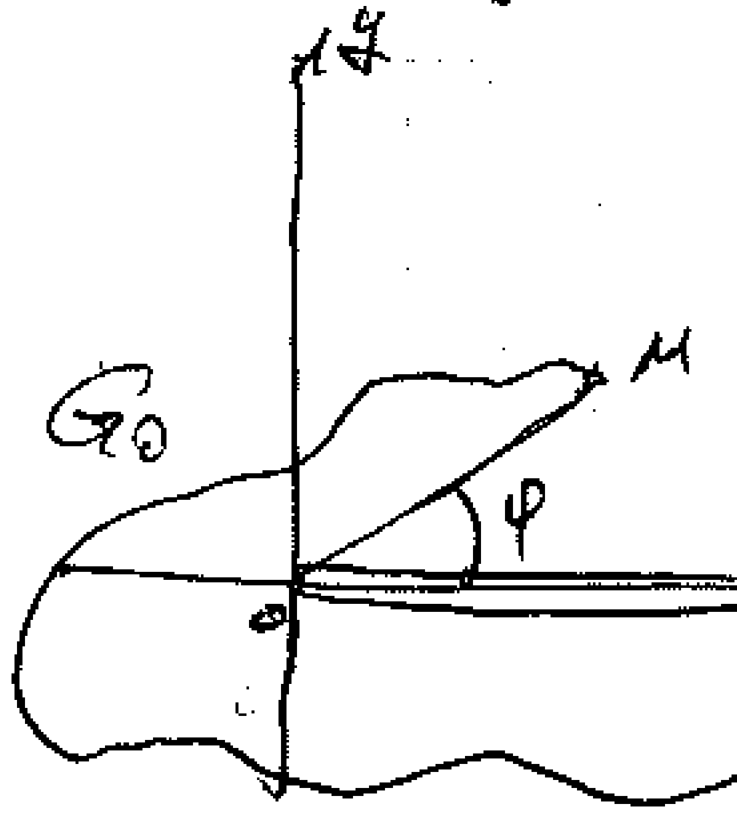
т.е. всех у

Рассм $\{\sqrt[n]{z}$

$= \{\sqrt[n]{z}\}_0 \cdot e$

Рассм Arg

$0 \le \arg z <$



$\Rightarrow \exists!$ реш

$\{\sqrt[n]{z}\}$ – порождает n однозначных ветвей (n различных рег. ветвей)

$$\{\sqrt[n]{z}\}_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$u = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi}{n}$$

$$v = \sqrt[n]{r}\cdot\sin\frac{\varphi}{n}$$

$\boxed{r > 0}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\varphi}{n} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\varphi}{n}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\varphi}{n} \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = +\frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\varphi}{n}$$

т.е. вып усл К-Р и эта ветвь рег ф-я

$-\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi$

$+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi$

$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi$

$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi$

$+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi \quad \cdot\cos\varphi$

$+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi \quad \cdot\sin\varphi$ (4)

Рассм

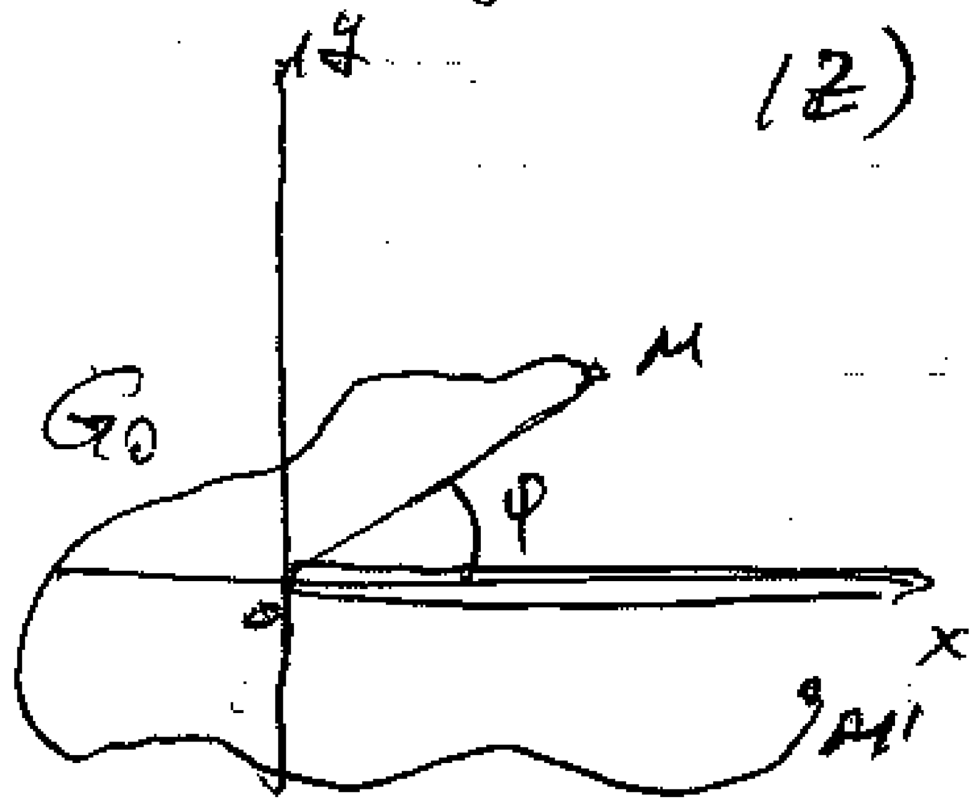
$$\{\sqrt[n]{z}\}_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\varphi}{n}}\underbrace{e^{\frac{2k\pi i}{n}}}_{\text{const}} =$$

$$= \{\sqrt[n]{z}\}_0 \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

, очевидно, что усл (2) сохраняется т.к. обе части равенства домножить на константу.

Рассм $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2n\pi\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – счётнозначная ф-я

$0 \le \arg z < 2\pi$



$G_0 = \mathbb{C} \setminus \{z : x > 0\}$

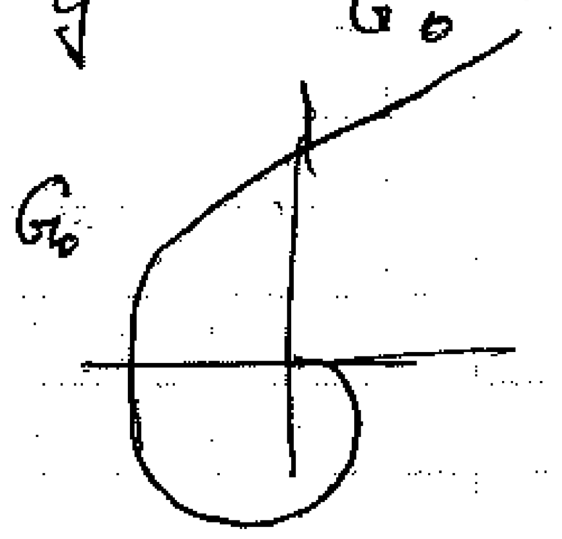
Удалим точки $x > 0,\ y = 0$

$0 \le \varphi \le 2\pi$ – нулевая ветвь ф-и $\operatorname{Arg} z$

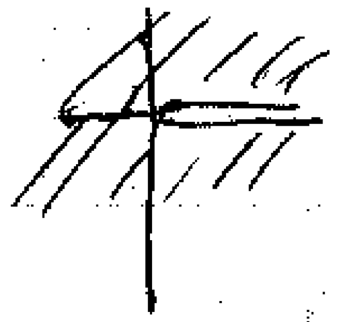
скачок (на 2π) возможен только при пересечении оси $x>0$

Многозначная ф-я $\operatorname{Arg} z$ допускает выделение однозначной ветви?

$\forall \quad G_0 = \mathbb{C} \setminus \{\Gamma\}$ $\qquad \Gamma$: Γ-росток $\infty \in \Gamma$



Проверим $w = \arg z = \varphi$ - беск. дифф-ма по r и φ в обл $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{z : y=0, x>0\}$



Проверим усл К-Р $\quad u=\varphi, \ v=0$

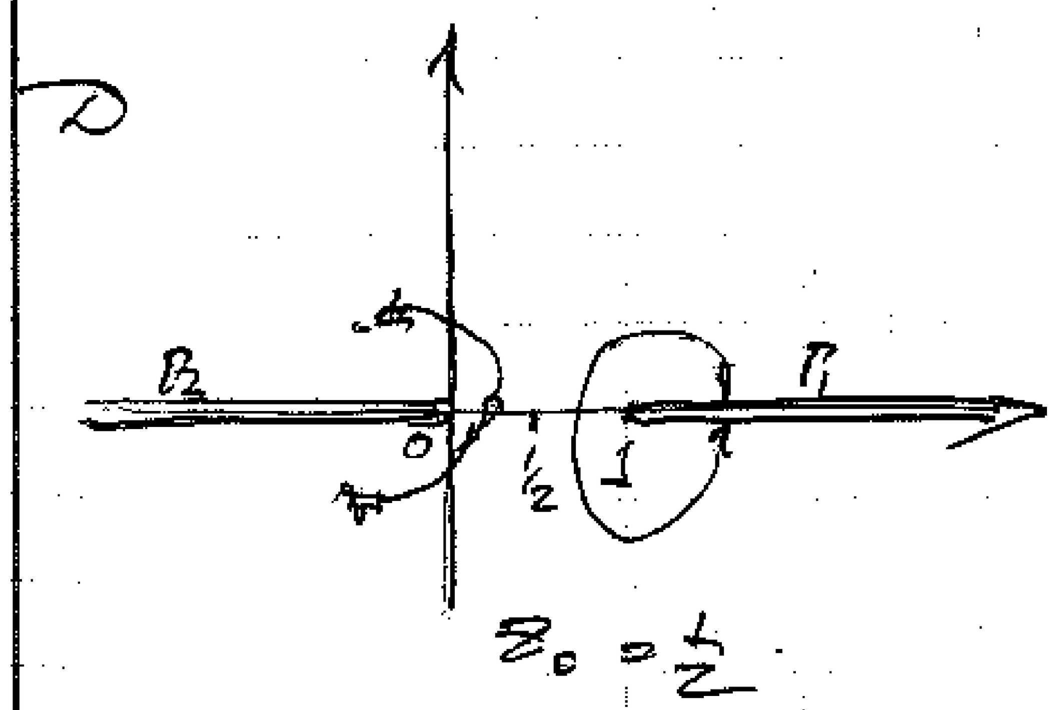
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \neq \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

т.о. не рег.

Рассм $\{\sqrt{z-z^2}\} =$ в обл D можно выделить рег. ветвь.

$= \{\sqrt{-z(z-1)}\} =$

$= \{i\sqrt{z(z-1)}\}$



одн $(\sqrt{z-1})_1 = r_1^{1/2} e^{\frac{i\varphi_1}{2}}$, $r_1 = |z-1|$, $\varphi_1 = \arg(\underbrace{z-1}_{\zeta}) = \arg\zeta$

тогда т. $(1,0)$ можно считать началом коорд в пл-ти (ζ)

$\sqrt{\zeta}$ - рег в пл-ти $\mathbb{C} \setminus \{z : y=0, x>0\}$

одн $(\sqrt{z})_2 = \sqrt{r_2}\, e^{\frac{i}{2}\varphi_2}$, $r_2 = |z|$, $\varphi_2 = \arg z \quad -\pi < \varphi_2 < \pi$

рег. в $\mathbb{C} \setminus \{z : y=0, x<0\}$

Перемножаем ветви: $w_1(z) = i\sqrt{r_2}\, e^{i\frac{\varphi_2}{2}} \sqrt{r_1}\, e^{i\frac{\varphi_1}{2}} =$

$= \sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\, e^{i(\pi+\varphi_1+\varphi_2)\frac{1}{2}}$ - рег. ветвь исходн. ф-и в обл $G = \mathbb{C} \setminus \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$

Вторая ветвь будет отличаться знаком

$$w_2(z) = -w_1(z)$$

Найдем значение этой ф-и в т. $1/2$

$0 < \varphi_1 < 2\pi \qquad , -\pi < \varphi_2 < \pi$

считаем $\quad r_1(z_0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad r_2(z_0) = \frac{1}{2}$

$\varphi_1(z_0) = \pi \quad ; \quad \varphi_2(z_0) = 0$

т.о.

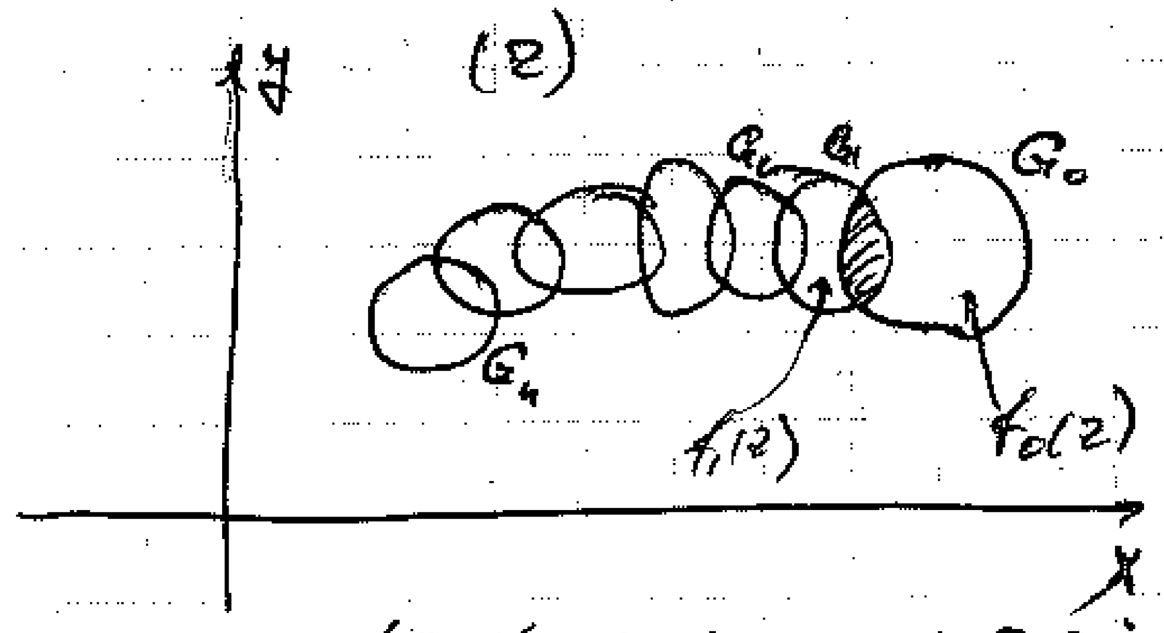
$$w_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = i \cdot \frac{1}{2} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} = -\frac{1}{2}$$

$$w_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

§ 21 Аналитическое продолжение регулярных функций

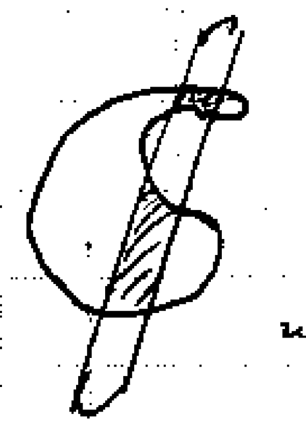
1 Продолжение по цепочке областей

$f_0(z)$ — рег в обл G_0

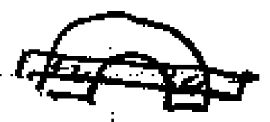


$G_k \cap G_{k+1} \neq \emptyset$ $k=0,1,\dots,n-1$

$G_k \cap G_{k+1}$ — открытое мн-во, но не область (м. б. несвязным)



или

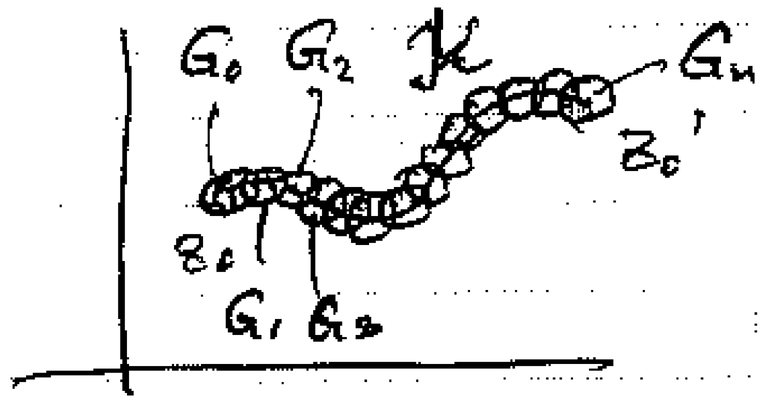


$f_1(z) = f_0(z)$ $\forall z \in G_0 \cap G_1$

Предположим, что $\exists$ регулярная в обл G_k ф-я $f_k(z)$ и пусть $f_k(z) = f_{k+1}(z)$ $\forall z \in G_k \cap G_{k+1}$ $(\forall k = 0, 1, \dots, n-1)$. Тогда ф-я $f_n(z)$ наз. ее аналитическим продолжением ф-и $f_0(z)$ в обл G_n вдоль цепочки областей $\{G_k\}_{k=0}^{n}$

2 Продолжение по кривой

возьмем $z_0 \in G$ и $z_0' \in G$



$z_0 \in K$, $z_0' \in K$

K — кусочно глад. кривая без самопересеч.

Покроем кривую K цепочкой пересекающихся кругов $\{G_k\}_{k=0}^{n}$

$z_0 \in G_0$, $z_0' \in G_n$, $G_k \cap G_{k+1} \neq 0$ $\forall k = 0, 1, \dots, n$

и $\exists$-ют $f_k(z)$ — рег в G_k, $f_k(z) = f_{k+1}(z)$ $\forall z \in G_k \cap G_{k+1}$

тогда $f_n(z)$ — рег продолжение ф-и $f_0(z)$ в т. z_0' вдоль кривой K

31.03.06

Лекция №

§ 13 Особые точки регулярных функций.

Пусть $z_0 \neq \infty$ $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z)$ рег. в некоторой проколотой окр. т. z_0

т.е. $\exists$ круг (z_0, ε) : $0<|z-z_0|<\varepsilon$ $f(z)$ рег

$\mathring{O}_\varepsilon(z_0)$

В этом случае будем говорить, что z_0 — изолированная особая точка ф-и $f(z)$

$\neq \infty$

$\boxed{1.}$ $f(z)$ м. разложить в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1), \quad z \in \mathring{O}_\varepsilon(z_0)$$

Пусть $a_n=0$ $\forall n<0$

Тогда говорят, что z_0 - устранимая особая точка ф-и $f(z)$

Тогда $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $0<|z-z_0|<\varepsilon$

Если $|z-z_0|\le \varepsilon-\delta$ $(0<\delta<\varepsilon)$, то ряд сх-ся равномерно

Если доопределить $f(z_0)=a_0$, то f - будет рег в круге $|z-z_0|<\varepsilon$

Теор 1

Для того, чтобы т. z_0 была устранимой особой точкой ф-и $f(z)$ рег в некот. прокол. окр-ти.

этой точки, M и D, чтобы ф-я $f(z)$ была ограничена в этой окр-ти.

Док-во.

Необход.

Пусть z_0 - устранимая особая т. ф-и f, тогда, т.к. f рег в $\mathring{O}_r(z_0)$, то она огр. в $\mathring{O}_r(z_0)$ см. рассужд. выше

Дост.

Пусть $f(z)$ - огр в окр. $\mathring{O}_r(z_0)$, т.е. $\exists M>0 : |f(z)| \le M$, $\forall z: 0<|z-z_0|<r$

и $f(z)$ - рег, тогда $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$, $n=0,\pm1,\dots$

при этом $\Gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho\}$, $0<\rho<r$

Рассм $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{1-n}} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\rho} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta$

Оценим $|a_{-n}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\right| \le$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} |f(\zeta)|\,|\underbrace{\zeta-z_0}_{\rho}|^{n-1} ds \le \frac{M}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} \rho^{n-1}ds =$$

$= \frac{2\pi\rho\cdot\rho^{n-1}M}{2\pi} = \rho^n M$, $\forall\rho<r$

т.к. л.ч. не зависит от ρ, устремим $\rho\to0$. тогда

$|a_{-n}| = \rho^n M \xrightarrow[\rho\to0]{} 0 \Rightarrow 0\le|a_{-n}|\le 0 \Rightarrow a_{-n}=0$ $\forall n=0,1,2,3,\dots$

т.о. z_0 - устран. особ. т.

чтд

2 Пусть в ряде (1) все коэф. $a_{-n} = 0 \ \forall n > m, \ m \in \mathbb{N}$, и $a_{-m} \neq 0$

Тогда говорят, что z_0 – полюс m-ого порядка ф-и $f(z)$

Тогда $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dfrac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\quad 0<|z-z_0|<\varepsilon$

Теор 2

Для того, чтобы т. $z_0 \neq \infty$ была полюсом ф-и $f(z)$, рег. в нек. проколот. окр-ти т. z_0, Н и Д $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ (2) $\left(\sim \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \right)$

Док-во

необх.

Пусть z_0 – полюс порядка $m \geq 1$ $(m \in \mathbb{N})$, тогда справедливо рав-во $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Рассм $f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} +$
$+ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \equiv \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k$

этот ряд сх-ся в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(z_0)$,

т.о. в силу непр степ. суммы $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0$

т.о. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Док-во

Пусть вып. (2), тогда $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$, $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ - рег

в нек. прокол. окр-ти т. z_0

(усл. (2) гарантирует то, что $\exists$ окр-ть т. z_0, где $f(z)$ не обращ. в 0)

$f(z)$ им. непр. произв. $\Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ им. непр. произв.

т.к. $\varphi(z)$ рег, то она м.б. разл. в ~~ряд~~ степенной ряд

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad, 0<|z-z_0|<\varepsilon_1$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0 \Rightarrow \varphi(z)$ огр. в $\mathring{O}(z_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0$ - устр. осб. т. ф-и $\varphi(z)$

с др. стор. $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=a_0=0$ в силу единств. предела

~~тогда~~ $\exists\, m\geq 1:\ a_m\neq 0$ и

$\varphi(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots$

$$\varphi(z)=(z-z_0)^m\left(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\dots\right)\equiv(z-z_0)^m\cdot\psi(z)$$

если все $a_n=0$, то $\varphi(z)=0 \Rightarrow \frac{1}{f(z)}=0 \Rightarrow f(z)=\infty$

$\Rightarrow f(z)$ не рег

Рассм. $\psi(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\dots$ - сумма ст. ряда $\Rightarrow$

$\Rightarrow \psi(z)$ рег в $0<|z-z_0|<\varepsilon_1$

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\psi(z)} \qquad 0<|z-z_0|<\varepsilon_1$$

Рассм. $\frac{1}{\psi(z)}$, $\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)=a_m\neq 0$

доопределим $\psi(z_0) = a_m$, тогда $\psi(z)$ - рег в $|z-z_0|<\varepsilon_1$

значит ф-ю $\frac{1}{\psi(z)}$ м. разл. в степ. ряд

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_0 = \frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{a_m} \neq 0$$

т.о. $$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \left[c_0 + c_1 (z-z_0) + c_2 (z-z_0)^2 + \ldots + c_n (z-z_0)^n + \ldots\right] =$$

$$= \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + c_m + \ldots + c_n (z-z_0)^{n-m} + \ldots$$

$$0<|z-z_0|<\varepsilon$$

т.о. z_0 - полюс порядка m чтд

$\boxed{3}$ $\forall$ в ряде (1) $\exists$ беск. мн-во $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

тогда z_0 наз-ся существенно особой точкой ф-и $f(z)$

Теор 3

Для того, чтобы т. z_0 была существ. особ т. ф-и $f(z)$, рег в нек проколот окр-ти этой точки Н и Д, чтобы в $\forall$ сколь угодно малой прокол. окр-ти т. z_0 ф-я $f(z)$ принимало значение сколь угодно близкие к $\forall$ числу $A \in \overline{\mathbb{C}}$ (*)

Док-во

Дост

$\exists$ вып (*)

а) $f(z)$ - не может быть огр в прокол окр-ти тогда по Т1 z_0 не может быть устр. особ. точкой

с др. стор из тех же предположе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не может быть услов. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

т.о. т. z_0 не полюс (по т2)

В итоге остается, что z_0 - существ. особая точка

<u>Необх</u>

Пусть z_0 - существ. особ. точка ф-и $f(z)$

<u>От противного</u> Пусть $\exists$ числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$|f(z) - A| \geq \varepsilon \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta$$

Рассм $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$, опред в $0 < |z - z_0| < \delta$

т.к. $f(z)$ рег в прокол окр-ти, то $\varphi(z)$ рег в

Разл. $\varphi(z)$ в ряд Лорана.

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

но $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\varepsilon} < +\infty$ т.к. $\varphi(z)$ - огр

т.о. z_0 - устр. ос. т. $\varphi(z)$, тогда для этой ф-и ~~ряд Лорана~~

$$a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

т.о. $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

возм 2 случая а) $a_0 = 0$, б) $a_0 \neq 0$

а) $a_0 \neq 0$, тогда $\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$

доопред $\varphi(z)$ в т. z_0 : $\varphi(z_0) = a_0$

Тогда $\varphi(z)$ становится рег в $0<|z-z_0|<\delta$ (как сумма степ. ряда)

Рассм. ф-ю $\frac{1}{\varphi(z)}$ – рег в круге $|z-z_0|<\delta$

т.о. $f(z)-A=\frac{1}{\varphi(z)}$ – рег. ф-я в _ " ——

значит $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}+A$ регл " ——

Тогда ряд Лорана не содерж a_{-n}, $n=1,2,\dots$

т.е. z_0 – устранимая ос. т. ф-и f. противореч.

б) $a_0=0$, тогда ~~$\varphi(z)=$~~ $\exists\, m\in\mathbb{N}, m\geq 1$: $a_m\neq 0$ и

$$\varphi(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots$$

если $\varphi(z)\equiv 0$, то $f(z)-A\equiv\infty \Rightarrow f(z)\equiv\infty \Rightarrow f(z)$ не рег.

~~$\varphi(z-z_0)$~~ $\varphi(z)=(z-z_0)^m\underbrace{\left(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\dots\right)}_{\psi(z)}$

тогда $\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\psi(z)}\xrightarrow[z\to z_0]{}\infty$ ~~$\Rightarrow \varphi(z)\xrightarrow[z\to z_0]{}0$~~

Тогда z_0 – полюс (не т Z) для ф-и $f(z)-A$)

т.е. z_0 – полюс и для $f(z)$ противоречие

~~ч.т.д.~~

Пр) 1) $f(z)=\frac{e^z}{z}$, $z=0$ – полюс первого порядка

$0<|z|<+\infty$ то $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=+\infty$

$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots$ ряд Тейлора

$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\dots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\dots$ $0<|z|<+\infty$ – ряд Лор. в силу т. единств г) $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $z \neq 0$ $z=0$ — сущ. особ. т.

обозн $\frac{1}{z} = \zeta$ $\sin\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \dots$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^5 \cdot 5!} - \dots$$

§ 14 Вычет функции.

Рассм $z_0 \neq \infty$, $f(z)$ — рег в $\mathring{O}_\delta(z_0)$

Разл. $f(z)$ в ряд Лорана в $\mathring{O}_\delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad 0<|z-z_0|<\delta$$

Опред Вычетом ф-и $f(z)$ в т. z_0 наз-ся коэф. a_{-1} и обозн $\operatorname{res} f(z_0)$

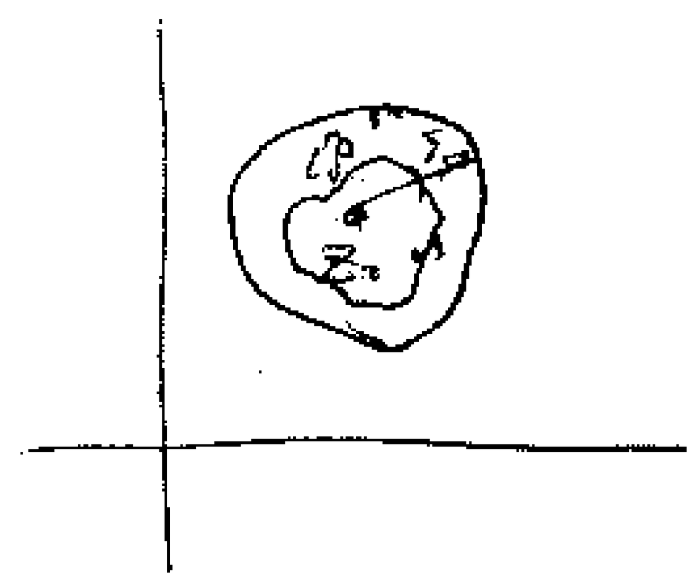
в др. обозн $\operatorname{res} f(z)\big|_{z_0}$

$\text{Выч } f(z)\big|_{z_0}$

Известно, что $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\rho} f(\zeta)\,d\zeta \qquad 0<\rho<\delta$$

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\rho} f(\zeta)\,d\zeta$$



Как вычислить вычет?

$\boxed{1}$ z_0 – устр. ос. т. ф-и $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \ a_{-n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a_{-1} = 0$$

т.о. $\operatorname{res} f(z_0) = 0$

$\boxed{2}$ z_0 – полюс 1-го порядка ф-и $f(z)$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1 (z-z_0) + \dots + a_n (z-z_0)^n + \dots$$

$$(z-z_0) f(z) = a_{-1} + a_0 (z-z_0) + a_1 (z-z_0)^2 + \dots$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1} = \operatorname{res} f(z_0)$$

$\boxed{3}$ z_0 · полюс m-го порядка

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z-z_0) + \dots$$

$a_{-m} \neq 0$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1} (z-z_0)^{m-1} + \dots + a_{-1} (z-z_0)^{m-1} +$$
$$+ a_0 (z-z_0)^m + a_1 (z-z_0)^{m+1} + \dots$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m \cdot f(z) \right] = (m-1)!\, a_{-1} + (m-2)!\, a_0 (z-z_0) + \dots \to$$
$$\xrightarrow[z \to z_0]{} (m-1)!\, a_{-1}$$

Тогда $\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]$

$\boxed{4}$ $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – рег в $\overset{\circ}{O}_\delta(z_0)$
$\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, но
$\psi'(z_0) \neq 0$

говорят z_0 – нуль первого порядка ф-и $\psi(z)$

т.к $\psi(z) = \underset{\shortparallel 0}{\psi(z_0)} + \underset{\neq 0}{\dfrac{\psi'(z_0)}{1!}}(z-z_0) + \dfrac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots =$

$= (z-z_0)\underbrace{\left[\psi'(z_0) + \dfrac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \ldots\right]}_{\alpha(z) \text{ рег в } O_\delta(z_0)}$

$\alpha(z_0) = \psi'(z_0) \neq 0$

т.о $\psi(z) = (z-z_0)\alpha(z)$

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)\alpha(z)}$

$\dfrac{\varphi(z)}{\alpha(z)}$ – рег. ф-я , разл. в ряд Тейлора

$f(z) = \dfrac{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots}{z-z_0} = \dfrac{c_0}{z-z_0} + c_1 + c_2(z-z_0)$

$c_0 = \dfrac{\varphi(z_0)}{\alpha(z_0)} \neq 0$, т.о z_0 – полюс 1-го порядка
для $f(z)$

$\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z) - \underset{\shortparallel 0}{\psi(z_0)}} =$

$= \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

Пр $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ $\quad z = 0$

$1 = \cos 0 \neq 0$, $\cancel{z=0}$ $\quad z\big|_{z=0} = 0 \quad 1 = z' \neq 0$

$$\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res}\left(\frac{\cos z}{z}\right)\Bigg|_{z=z_0} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

Пр

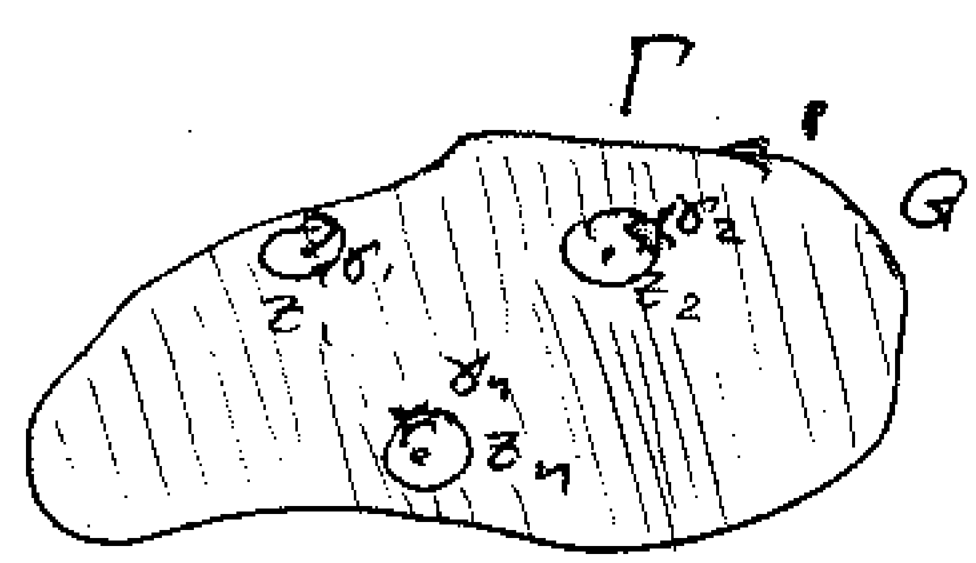
$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\cancel{(z-z_0)}^n \cdot \frac{\cos z}{\cancel{z^n}}\right]$$

Т 1 (Осн. теорема теории вычетов)

Пусть ф-я $f(z)$ рег. в замкн. обл. $\overline{G}$, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots, z_n \in G$. У $\Gamma = \partial\overline{G}$ - кусочно-глад. контур, обх против часовой стрелки, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

Док-во



в окрест. т. границы ф-я рег $\Rightarrow$ она задана и в каждой малой окр. т. т. границы

$\Gamma_0 \equiv \Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$

$\Gamma \not\cap \gamma_1$, $\cancel{\Gamma}\ \gamma_2 \dots$
$\Gamma \not\cap \gamma_2 \quad \gamma_1 \not\cap \gamma_2 \dots$

$\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = 0$ по т. Коши

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = 0 \quad \Big/ \frac{1}{2\pi i}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz\right] =$$

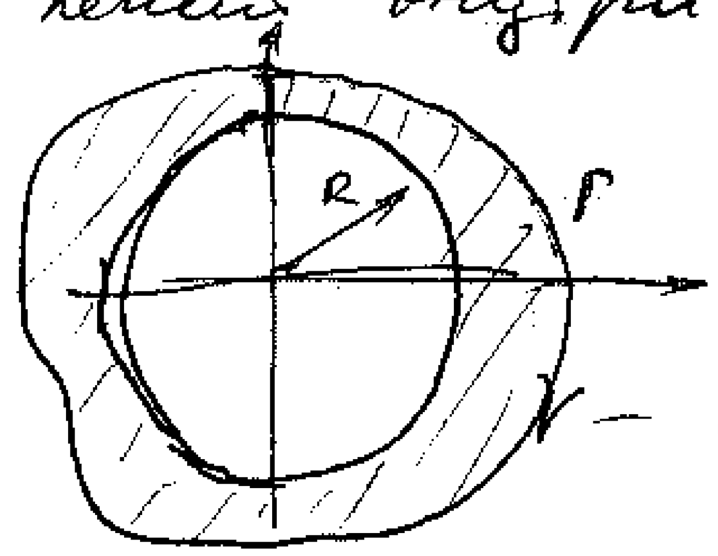
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\operatorname{res} f(z_1)} + \dots + \oint_{\Gamma_n} f(z)\,dz$$

т.к. внутри γ_1 только одна точка z_1

чтд

Опр ∃ ф-я $f(z)$ рег. в обл $O_R(\infty) \equiv \{z : |z| > R\}$
тогда $\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz$, где Γ - замкн. глад. контур, простой

Γ лежит внутри $O_R(\infty)$



γ — беск уд. обл : при обходе она ост. слева

$O_R(\infty) = \{z : R < |z| < +\infty\}$ — част. случай $r < |z - z_0| < R$

значит $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$

$z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\rho > R$

Γ_ρ - люб. и не огр.

Рассм $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{-1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\,d\zeta = -\operatorname{res} f(\infty)$

т.о. $\operatorname{res} f(\infty) = -a_{-1}$

У к усл. теор 1 добавить $z_{n+1} = \infty$

тогда $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \operatorname{res} f(z_k) = 0$.

21.04.06

Лекция №

§17 Дробно-линейные функции.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1) \qquad ad - bc \neq 0 \quad (2)$$

Если $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow w$ ~~...~~ $= const$

3 воз. усл. 1) $c = 0 \Rightarrow w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = a_0 z + b_0$ — лин. ф-я

$w(\infty) = \infty$

$c = 0 \Rightarrow ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0,\ d \neq 0$, $a_0 = \frac{a}{d} \neq 0$

$w(\infty) = a_0 \cdot \infty = \infty$ т.к. $a_0 \neq 0$

2) $c \neq 0$ $\quad w = \frac{az+b}{c(z+\frac{d}{c})}$ $\qquad z \to -\frac{d}{c} \Rightarrow w \to \infty$

считаем, что $w(-\frac{d}{c}) = \infty$

в т. $-\frac{d}{c}$ ф-я w им. полюс 1-го порядка

т.о. w определена на $\overline{\mathbb{C}} = \{\mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$

Значение w так же заполняют $\overline{\mathbb{C}}$

Св-во 1 $\quad w(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$

(мн-во знач. w — расшир. компл. пл-ть)

Док-во $\rightarrow$

разрешим отн z ур-е (1)

$$wcz + wd = az + b$$

$$(cw - a)z = -\{b - d\}w$$

т.о. $z = \dfrac{b - dw}{cw - a} = \dfrac{-dw + b}{cw - a}$ в силу усл (2)

$-d\cdot(-a) - b\cdot c \neq 0$

т.к. $ad - bc \neq 0$

т.е. $z(w)$ - не константа

определим z при 1) $c = 0$, $w \to \infty$

$\Rightarrow a \neq 0,\ d \neq 0$

т.о. $z = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a} \xrightarrow[w \to \infty]{} \infty$

$$z(\infty) = \infty$$

2) $c \neq 0$ $w \to \infty$

$$\lim_{w \to \infty} z(w) = \lim_{w \to \infty} \frac{-d + \frac{b}{w}}{c - \frac{a}{w}} = -\frac{d}{c}$$

$z = \dfrac{b - dw}{c(w - \frac{a}{c})}$ если $w \to -\frac{a}{c}$ то $z(w) = \dfrac{b - d(\frac{a}{c})}{c(w - \frac{a}{c})} =$

$= \dfrac{\overbrace{bc - ad}^{\neq 0}}{c^2(w - \frac{a}{c})} \Rightarrow z(w) \xrightarrow[w \to \frac{a}{c}]{} \infty$

чтд

Св-во 2

Суперпозиция двух дробно-линейных ф-й есть дробно-линейная ф-я.

Док-во Расм $w_1 = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ и $w_2 = \dfrac{a_2 w_1 + b_2}{c_2 w_1 + d_2}$

$\Delta_1 = a_1 d_1 - c_1 b_1 \neq 0$ и $\Delta_2 = a_2 d_2 - c_2 b_2 \neq 0$

Рассм. w_2 ~~т.д.~~ $w_2 = \dfrac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} =$

$$= \frac{a_2 (a_1 z + b_1) + b_2 (c_1 z + d_1)}{c_2 (a_1 z + b_1) + d_2 (c_1 z + d_1)} = \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}$$

$$\Delta = (a_1 a_2 + b_2 c_1) \cdot (c_2 b_1 + d_2 d_1) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(c_2 a_1 + d_2 c_1) = \Delta_1 \Delta_2 \neq 0$$

т.о. $w_2(w_1)$ — др.-лин. ф-я

ч.т.д.

Св-во 3

Дробно-линейная ф-я отображает окружность в окружность
(Прямая — окр-ть бесконечного радиуса)

Док-во

Запишем ур-е окр-ти в пл-ти (x, y)

$m(x^2+y^2) + nx + py + q = 0$ (заметим если $m = 0$ то ур. прямую)

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

тогда $x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$ $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

подст. в ур-е окр-ти

$$m z\bar{z} + \frac{n}{2}(z + \bar{z}) + \frac{p}{2i}(z - \bar{z}) + q = 0$$

приведем подобные

$$m z\bar{z} + \left(\frac{n}{2} + \frac{p}{2i}\right) z + \left(\frac{n}{2} - \frac{p}{2i}\right) \bar{z} + q = 0$$

$$m z\bar z + \underbrace{\left(\frac{n}{2} - \frac{p}{2}i\right)}_{\overset{\text{"}}{\bar A}} z + \underbrace{\left(\frac{n}{2} + \frac{p}{2}i\right)}_{\overset{\text{"}}{A}} \bar z + q = 0$$

$$\bar A \longleftrightarrow A$$

т.е. ин. ~~запись~~ $\quad m z\bar z + \underbrace{\bar A z + A \bar z}_{\text{действ. число (сумма сопряж.)}} + q = 0 \quad (3)$

Рассм $\quad w = az + b \quad (c=0, d=1),\ a \neq 0 \ (\Leftarrow (2))$

т.е. $z = \frac{w-b}{a} \xrightarrow{\text{подст. в ур-е (3)}} m\left(\frac{w-b}{a}\right)\cdot\overline{\left(\frac{w-b}{a}\right)} + \bar A \cdot \frac{w-b}{a} +$
$$+ A\overline{\left(\frac{w-b}{a}\right)} + q$$

введем обозн $\quad -\frac{b}{a} = w_0$

$$m\left(\frac{w}{a} + w_0\right)\overline{\left(\frac{w}{a} + w_0\right)} + \bar A\left(\frac{w}{a} + w_0\right) + A\overline{\left(\frac{w}{a} + w_0\right)} + q = 0$$

$$m\left(\frac{w}{a} + w_0\right)\left(\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \bar w_0\right) + \bar A\left(\left(\frac{w}{a}\right) + w_0\right) + A\left(\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \bar w_0\right) + q = 0$$

$$m\left[\frac{w}{a}\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \left(\frac{\bar w_0}{a}\right)w + w_0\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + w_0\bar w_0\right] + \frac{\bar A}{a}w + \bar A w_0 + A\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} +$$
$$+ A\bar w_0 + q = 0$$

$$m\left[\frac{w}{a}\overline{\left(\frac{w}{a}\right)}\right] + m\left(\frac{\bar w_0}{a} + \frac{\bar A}{a}\right)w + \left[w_0 + A\right]m\cdot\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \underset{\text{const}}{Q} = 0$$

$$\boxed{w = u + iv}$$

$$\frac{w}{a}\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} = \left|\frac{w}{a}\right|^2 = \frac{|w|^2}{|a|^2} = \frac{w\cdot\bar w}{|a|^2}$$

$$\frac{m}{a^2}w\bar w + \bar B w + B\bar w + Q = 0 \quad (3')$$

В итоге получили аналог ур-е (3)

т.е. ин. окружность в (w)

чтд

св-во 4

Др.-лин. ~~ф-я~~ преобразование определяется указанием трех различных точек на пл-ти (z) и трех различных образов этих точек на пл-ти (w)

Док-во

Возьм. z_1, z_2, z_3 - разл.
и w_1, w_2, w_3

$w(z_1)=w_1$; $w(z_2)=w_2$; $w(z_3=w_3)$

др-лин преобр задается рав-вом

$$\underbrace{\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}}_{\zeta}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \quad (4)$$

подст. $w=w_1$ и $z=z_1$ — (4) верно $0=0$
$w=w_2$ и $z=z_2$ $\frac{1}{0}=\frac{1}{0} \Rightarrow \infty=\infty$ верно
$w=w_3$ и $z=z_3$ $1=1$ верно

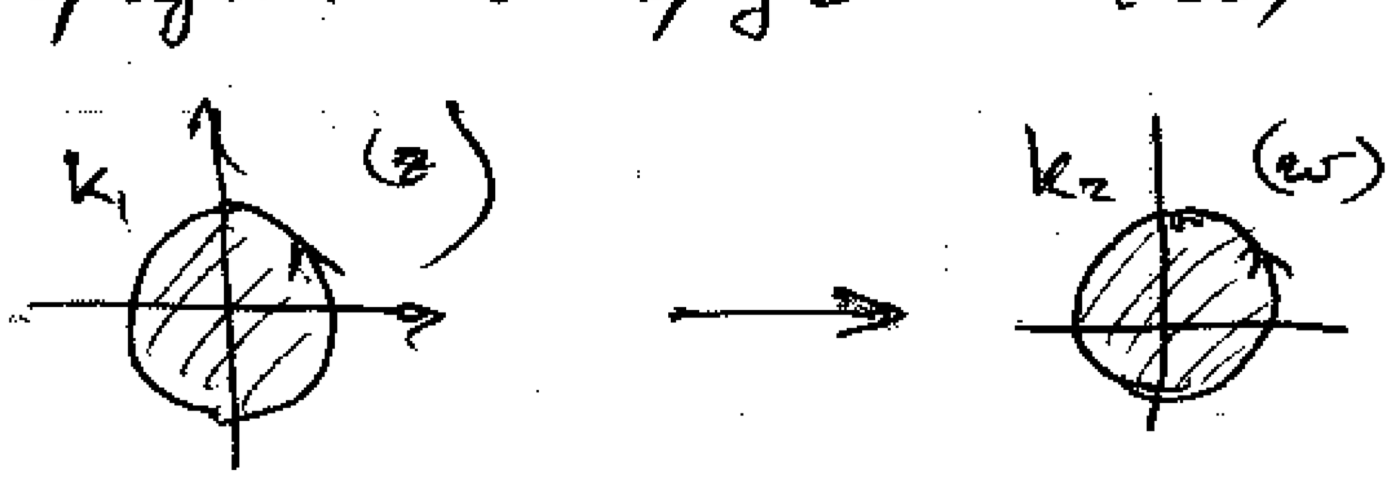
Др-лин ф-я ~~[illegible]~~ опр-ся 3-я параметрами

если c или $d\neq 0$, то на него можно разделить

выразим w через ζ $\quad w=\frac{A_1\zeta+B_1}{C_1\zeta+D_1}=\frac{A_2z+B_2}{C_2z+D_2}$

ч.т.д.

С помощью св-ва 3 можно $\forall$ круг пл-ти (z) отобразить в круг в (w)



если граница одной обл $\to$ гр. другой обл, а отобр - рег ф-я, то внутренность 1-ой перех во внутр можно ~~от~~ отобразить внутренность одного круга на внешность другого

можно круг отобразить в п/пл-ть

§18 Функция Жуковского

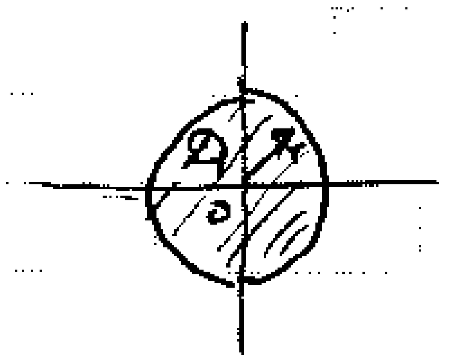
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (1)$$

Опр

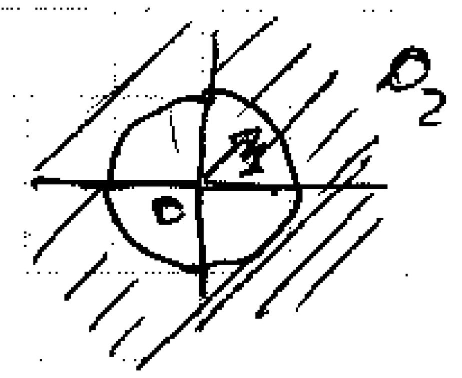
Функция $w = f(z)$ называется однолистной в обл-ти $D \subset \mathbb{C}$ если $\forall z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow w_1 = f(z_1) \neq f(z_2) = w_2$

Св-во 1

Ф-я (1) однолистна в круге $D_1 = \{z : |z| < 1\}$ и в области $D_2 = \{z : |z| > 1\}$



или



Док-во

Предп. противное.

Возьмём $z_1 \neq z_2$, ~~и~~ и предп $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$

$$z_1 - z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = 0$$

$$z_1 - z_2 + \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} = 0 \quad \Big| : \frac{1}{z_1 - z_2}$$

$$1 - \frac{1}{z_1 z_2} = 0 \Rightarrow z_1 z_2 = 1 \underset{б.т.с.}{\Rightarrow} |z_1||z_2| = 1 \quad (*)$$

1) если $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$ то $(*)$ - неверно $\Rightarrow$ в круге D, ф-я однолистна

2) если $|z_1| > 1$ и $|z_2| > 1$ то $(*)$ - неверно

чтд