

1. Пассивные RC – цепи

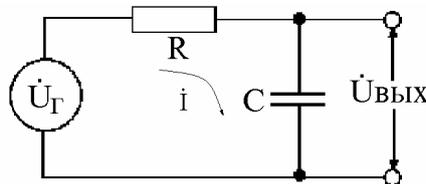
Введение

В задачах рассматриваются вопросы расчета амплитудно-частотных, фазочастотных и переходных характеристик в пассивных RC - цепях.

Для расчета названных характеристик необходимо знать и уметь использовать законы Ома и Кирхгофа. Для расчета частотных характеристик пассивных RC - цепей необходимо использовать символический метод и помнить, что сопротивление синусоидальному току конденсатора с ёмкостью C определяется формулой: $Z_c = \frac{1}{j\omega C}$,

где ω - круговая частота, j - мнимая единица. Для расчета переходной характеристики необходимо использовать закон коммутации: напряжение на емкости скачком измениться не может, если источники не идеальны, а также операторный метод, учитывая, что сопротивление емкости в операторной форме имеет вид: $Z_c(p) = \frac{1}{pC}$.

Задача. 1.1 Рассчитать и нарисовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики интегрирующей RC - цепочки,



приведенной на рис. 1.1.

Рис. 1.1 Схема интегрирующей RC – цепочки.

Решение. 1. Определим передаточную функцию цепи:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_G}$$

Для этого воспользуемся законом Ома и вторым законом Кирхгофа: сумма ЭДС в замкнутом контуре равна сумме падений напряжений на участках цепи. Отсюда:

$$\dot{U}_G = iR + i \frac{1}{j\omega C}, \quad \dot{U}_{\text{ВЫХ}} = i \frac{1}{j\omega C},$$

$$K(j\omega) = \frac{i \frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)i} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (1.1)$$

где i - ток в цепи, а $\tau=RC$ - постоянная времени RC - цепи.

2. Из полученного выражения (1.1) можно получить формулы для расчета амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик.

Для построения АЧХ необходимо найти модуль $K(j\omega)$. Из (1.1) получаем:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}. \quad (1.2)$$

Из условия $\omega^2\tau^2 = 1$ определяем значение верхней граничной частоты ω_B , при которой модуль коэффициента усиления уменьшается по сравнению с коэффициентом передачи при $\omega=0$ в $\sqrt{2}$ раз:

$$\omega_B = \frac{1}{\tau} \text{ и } |K(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 1.2 приведен вид АЧХ интегрирующей RC - цепочки. При построении учитывалось, что $f = \frac{\omega}{2\pi}$; т.е. $f_B = \frac{1}{2\pi\tau}$.

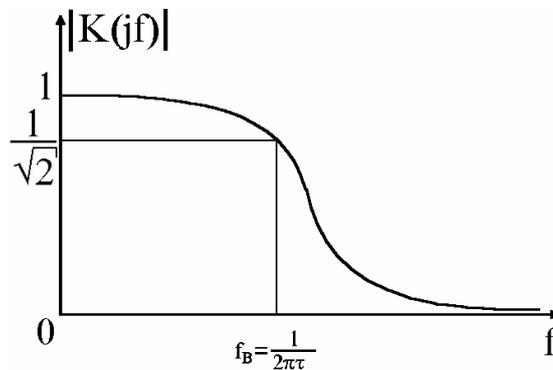


Рис. 1.2. АЧХ интегрирующей RC - цепочки.

Для построения ФЧХ умножим числитель и знаменатель передаточной функции (1.1) на комплексно - сопряженную величину $(1 - j\omega\tau)$. Получим

$$K(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует: $\varphi(\omega) = \arctg(-\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau)$, т.е. напряжение на выходе цепи отстаёт от напряжения на входе.

Отметим, что на верхней граничной частоте $f_B = \frac{1}{2\pi\tau}$ сдвиг по фазе между выходным сигналом и сигналом генератора составляет 45° .

На рис. 1.3 приведена фазочастотная характеристика интегрирующей RC - цепи.

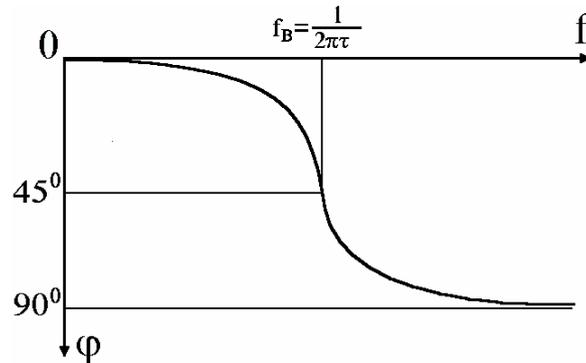


Рис. 1.3 Фазочастотная характеристика интегрирующей RC - цепи.

Задача 1.2. Найти такие значения емкости C и сопротивления R интегрирующей RC - цепочки, при которых изменения сопротивления генератора R_G и паразитной емкости нагрузки $C_{П}$ приводили бы к наименьшему изменению верхней граничной частоты. При этом $f_B = 16$ кГц, $R_G \leq 100$ Ом, $C_{П} \leq 10$ пФ.

Решение. 1. С учетом R_G и $C_{П}$ схему на рис. 1.1 можно заменить схемой на рис. 1.4,а и преобразовать к виду, изображенному на рис. 1.4,б, где $R_{ЭКВ} = R_G + R$, а $C_{ЭКВ} = C + C_{П}$.

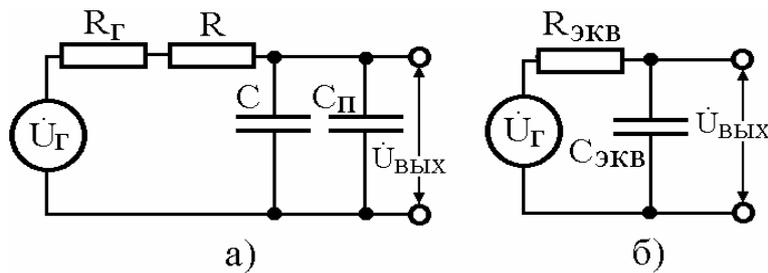


Рис. 1.4 Схема интегрирующей RC - цепочки с учетом сопротивления генератора и паразитной емкости нагрузки (а) и ее эквивалентная схема (б).
Схема на рис. 1.4,б аналогична схеме на рис. 1.1, поэтому

$$f_B = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{ЭКВ}}}, \tau_{\text{ЭКВ}} = R_{\text{ЭКВ}}C_{\text{ЭКВ}}.$$

Полагая $f_B = 16$ кГц, получаем

$$\tau_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{2\pi \cdot 16 \cdot 10^3} = 0.995 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-5} \text{ с}. \quad (1.4)$$

Очевидно, что обеспечить необходимое значение $\tau_{\text{ЭКВ}}$ можно при разных $R_{\text{ЭКВ}}$ и $C_{\text{ЭКВ}}$. Например, при $R_{\text{ЭКВ}} = 1$ кОм и $C_{\text{ЭКВ}} = 10$ нФ или $R_{\text{ЭКВ}} = 100$ кОм и $C_{\text{ЭКВ}} = 100$ пФ: $\tau_{\text{ЭКВ}} = 10^{-5}$ с.

При $R_{\text{ЭКВ}} = 1$ кОм изменение R_{Γ} может привести к сравнительно большому изменению $\tau_{\text{ЭКВ}}$, а при $C_{\text{ЭКВ}} = 100$ пФ изменение C_{Π} может привести к большому изменению $\tau_{\text{ЭКВ}}$.

2. Найдем оптимальное значение R и C . Для этого найдем производную $\frac{d\tau_{\text{ЭКВ}}}{dR}$. Выразим $\tau_{\text{ЭКВ}}$ через R и C :

$$\tau_{\text{ЭКВ}} = R(1 + \delta_R)C(1 + \delta_C) = \tau(1 + \delta_R + \delta_C + \delta_R\delta_C), \quad (1.5)$$

$$\text{где } \delta_R = \frac{R_{\Gamma}}{R}, \delta_C = \frac{C_{\Pi}}{C}, \tau = RC.$$

$$\text{Отсюда } \tau_{\text{ЭКВ}} = \tau + R_{\Gamma}C_{\Pi} + \tau \frac{R_{\Gamma}}{R} + RC_{\Pi}.$$

Пусть $\tau = \text{const}$, тогда

$$\frac{d\tau_{\text{ЭКВ}}}{dR} = -\frac{\tau R_{\Gamma}}{R^2} + C_{\Pi}.$$

Приравниваем производную нулю, получаем

$$-\frac{\tau R_{\Gamma}}{R^2} + C_{\Pi} = 0.$$

Отсюда

$$RC_{\Pi} = R_{\Gamma}C \text{ или } \delta_R = \delta_C = \delta. \quad (1.6)$$

3. Найдем R и C из условия, что величины сопротивлений генератора и емкости нагрузки максимальны. Положим, что $\delta \ll 1$. Отсюда $\tau_{\text{ЭКВ}} \approx RC$ и

$$R = \frac{10^{-5}}{C}. \text{ Из (1.6) получаем } C^2 = \frac{C_{\Pi} \cdot 10^{-5}}{R_{\Gamma}} \text{ Ф}^2 \text{ или } C = 1 \text{ нФ, а } R = 10 \text{ кОм.}$$

В этом случае максимальные значения δ_R и δ_C будут равны 1%, а изменение верхней граничной частоты по сравнению со случаем, когда $R_{\Gamma} = 0$ и $C_{\Pi} = 0$, будет минимальным и составит 2%.

Задача 1.3. Рассчитать и нарисовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики дифференцирующей RC - цепи, приведенной на рис. 1.5.

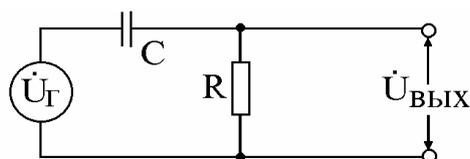


Рис. 1.5. Схема дифференцирующей RC - цепи.

Решение. Задача решается аналогично задаче 1.1. Результаты решения приведены ниже. Передаточная функция цепи:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{Г}}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \text{ где } \tau = RC;$$

$$|K(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{1}{\omega\tau}.$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики цепи приведены на рис. 1.6,а и 1.6,б. При этом f_n - нижняя граничная частота цепи.

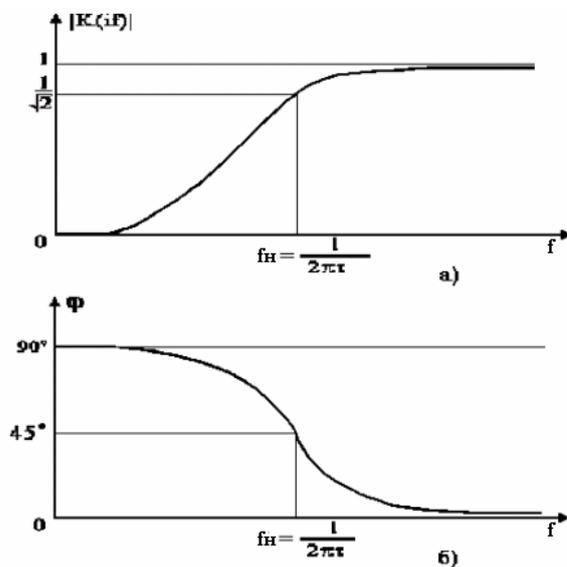


Рис. 1.6. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики дифференцирующей RC - цепи.

Задача 1.4. Рассчитать передаточную функцию дифференцирующей RC - цепи, учитывая влияние сопротивления генератора R_{Γ} и паразитной емкости нагрузки C_{Π} . Нарисовать АЧХ схемы.

Решение. 1. Передаточную функцию дифференцирующей RC - цепи с учетом R_{Γ} и C_{Π} можно рассчитать из схемы, представленной на рис. 1.7.

Учитывая, что параллельное сопротивление резистора R и емкости C_{Π} равно $\frac{R}{1+j\omega RC_{\Pi}}$, получаем:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC_{\Pi}}}{R_{\Gamma} + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1+j\omega RC_{\Pi}}} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC \left(1 + \frac{R_{\Gamma}}{R} + \frac{C_{\Pi}}{C}\right) - \omega^2 R C R_{\Gamma} C_{\Pi}} \quad (1.7)$$

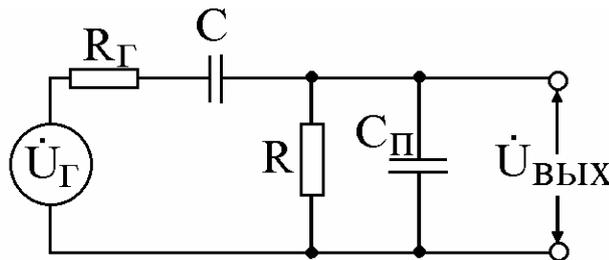


Рис. 1.7. Схема дифференцирующей RC - цепи с учетом сопротивления генератора R_{Γ} и паразитной емкости нагрузки C_{Π} .

2. Анализ (1.7) показывает, что $|K(j\omega)|$ имеет максимум при выполнении условия

$$\omega_0^2 R C R_{\Gamma} C_{\Pi} = 1. \quad (1.8)$$

Отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R C R_{\Gamma} C_{\Pi}}}. \quad (1.9)$$

При $\omega = \omega_0$ получаем

$$|K(j\omega_0)| = \frac{1}{1 + \frac{R_{\Gamma}}{R} + \frac{C_{\Pi}}{C}}. \quad (1.10)$$

Вид АЧХ представлен на рис. 1.8.

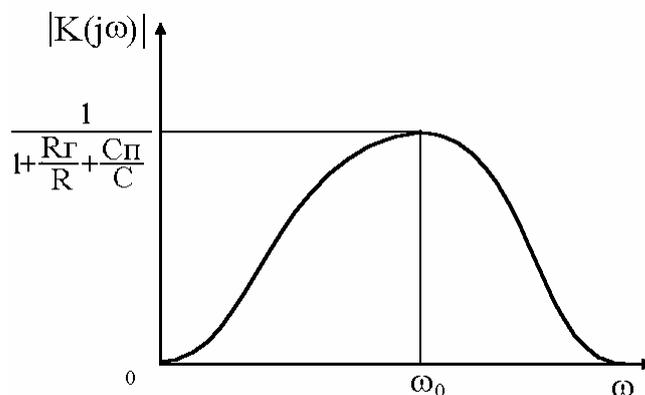


Рис. 1.8. АЧХ дифференцирующей цепочки с учетом R_{Γ} и C_{Π} .

Задача 1.5. Определить верхнюю и нижнюю граничные частоты в схеме, приведенной на рис. 1.7, при условии, что $R=100$ кОм, $C=0.1$ мкФ, $R_{\Gamma}=50$ Ом, $C_{\Pi}=50$ пФ.

Решение. 1. Из (1.10) определим модуль коэффициента передачи цепи на частоте ω_0 :

$$|K(j\omega_0)| = \frac{1}{1 + 0.0005 + 0.0005} = 0.999 \approx 1 .$$

С учетом полученного результата представим передаточную функцию (1.7) в следующем виде:

$$K(j\omega) \approx \frac{j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 + j\omega R_{\Gamma} C_{\Pi})} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \times \frac{1}{1 + j\omega R_{\Gamma} C_{\Pi}} . \quad (1.11)$$

2. Из (1.11) можно сделать вывод, что передаточная функция цепи на низких частотах определяется передаточной функцией дифференцирующей RC – цепи с постоянной времени RC , а на высоких частотах – передаточной функцией интегрирующей RC – цепи с постоянной времени $R_{\Gamma}C_{\Pi}$.

Отсюда получаем: $f_{\text{Н}} = \frac{1}{2\pi RC} \approx 16$ Гц, а $f_{\text{В}} = \frac{1}{2\pi R_{\Gamma} C_{\Pi}} \approx 63$ МГц.

Задача 1.6. При замыкании ключа рассчитать переходной процесс в интегрирующей RC – цепи, схема которой приведена на рис. 1.9, и нарисовать график изменения выходного напряжения.

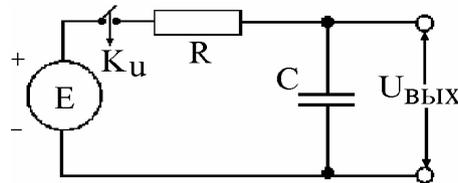


Рис. 1.9. Схема интегрирующей RC – цепи с источником постоянного напряжения и ключом.

Решение. 1. Заменяя $j\omega$ на оператор p в формуле (1.1) получаем передаточную функцию цепи в операторной форме:

$$K(p) = \frac{1}{1 + pCR} \quad (1.12)$$

Оригиналом данной передаточной функции является выражение

$$K(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ где } \tau = RC. \quad (1.13)$$

График зависимости $K=f(t)$ приведен на рис 1.10.

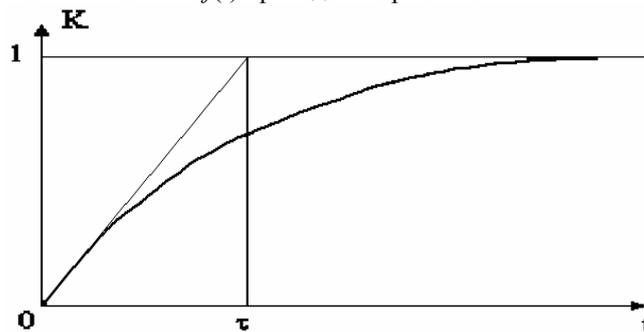


Рис. 1.10. Переходная характеристика интегрирующей RC – цепи.

2. Зная, что зависимость $K(t)$ представляет собой экспоненту, можно построить переходную характеристику без нахождения передаточной функции. Для этого нужно определить напряжение на выходе интегрирующей RC - цепи при $t=0$ и при $t=\infty$.

2.1. Полагая, что напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, получаем:

$$U_C(0) = U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0, \text{ а } I(0) = \frac{E}{R}, \text{ где } I(0) \text{ ток в цепи при } t=0.$$

2.2. При $t=\infty$ ток через резистор R протекать не должен $I(\infty)=0$, следовательно $U_{\text{ВЫХ}}(\infty) = U_C(\infty) = E - I(\infty)R = E$.

Задача 1.7. Нарисовать график изменения выходного напряжения при замыкании ключа в цепочке дифференцирующего типа, приведенной на рис 1.11.

Решение. 1. Полагая, что напряжение на емкости в первый момент должно равняться нулю, получаем $E=I(0)(R_{\Gamma}+R)$, $U_{\text{ВЫХ}}(0)=I(0)R$.

$$\text{Отсюда } U_{\text{ВЫХ}}(0) = E \frac{R}{R_{\Gamma} + R}.$$

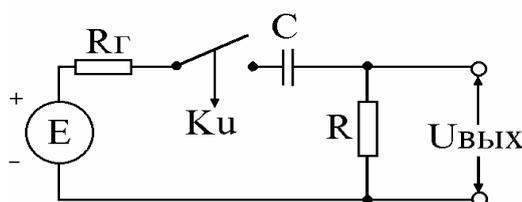


Рис. 1.11. Схема RC -цепи дифференцирующего типа с источником постоянного напряжения и ключом.

2. При $t=\infty$ ток в цепи будет равен нулю, поэтому $U_{\text{ВЫХ}}(\infty)=I(\infty)R=0$.

Постоянная времени заряда конденсатора равна $\tau=C(R_{\Gamma}+R)$.

Следовательно, график зависимости $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ будет иметь вид, представленный на рис 1.12.

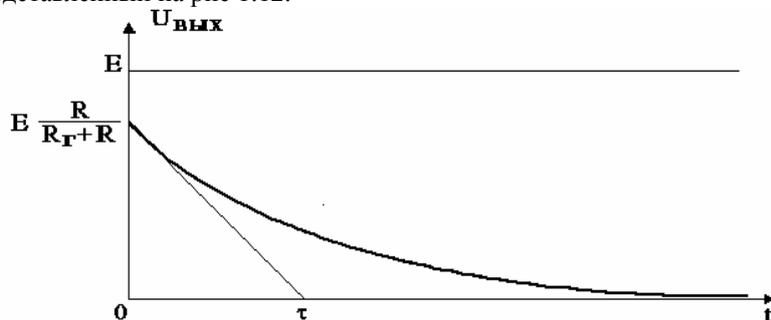


Рис. 1.12. Переходная характеристика цепи, приведённой на рис.1.11.

Задача 1.8. Нарисовать импульс напряжения на выходе RC -цепи при подаче на вход схемы, приведенной на рис. 1.13, прямоугольного импульса длительностью $T_{\text{и}}$.

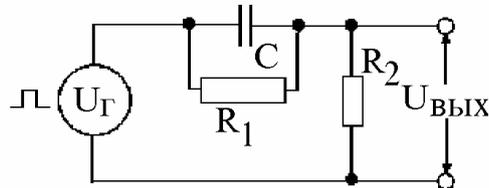


Рис. 1.13. Схема RC - цепи дифференцирующего типа с источником импульсного напряжения.

Решение. 1. Прямоугольный импульс напряжения можно рассматривать как две ступеньки напряжения, смещенные во времени на время $T_{и}$ (рис. 1.14).

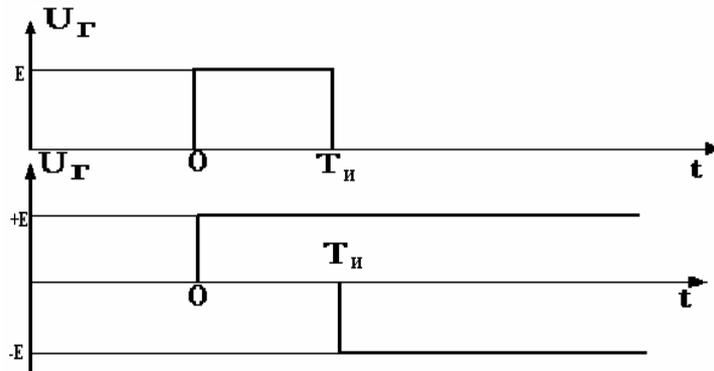


Рис. 1.14. Представление прямоугольного импульса как суммы двух ступенек напряжения.

Таким образом, задача сводится к нахождению реакции RC - цепи на каждую ступеньку напряжения.

2. Аналогично предыдущим задачам получаем:

$$U_{\text{ВЫХ1}}(0)=E, U_{\text{ВЫХ1}}(\infty)=E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, U_{\text{ВЫХ2}}(T_{и})=-E, U_{\text{ВЫХ2}}(\infty)=-E \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$\tau = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, где $U_{\text{ВЫХ1}}$ - выходное напряжение от воздействия первой

ступеньки напряжения, а $U_{\text{ВЫХ2}}$ - выходное напряжение от воздействия второй ступеньки.

3. Используя метод наложений (принцип суперпозиций), находим результирующее напряжение: $U_{\text{ВЫХ}}(0)=E, \Delta U_{\text{ВЫХ}}(T_{и})=-E, U_{\text{ВЫХ}}(\infty)=0$.

График выходного напряжения представлен на рис. 1.15.

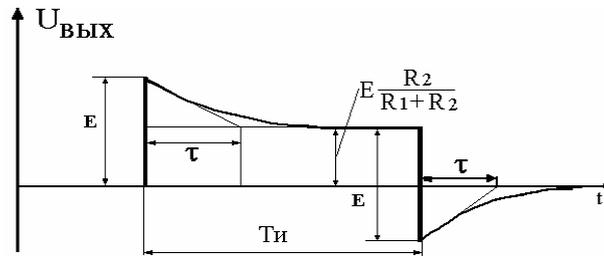


Рис. 1.15. График зависимости $U_{\text{вых}}=f(t)$ для RC -цепи дифференцирующего типа (рис. 1.13) при подаче на ее вход прямоугольного импульса

Задача 1.9. Нарисовать как изменится напряжение на выходе цепи, приведённой на рис.1.16, при замыкании ключа, если считать, что источник напряжения E – идеальный, т.е. его внутреннее сопротивление R_{Γ} равно нулю.

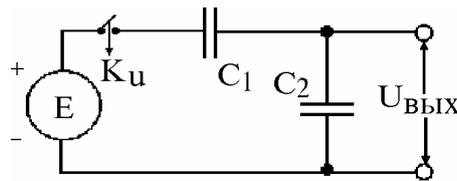


Рис.1.16. Цепь состоящая из двух конденсаторов с ключом и источником напряжения E .

До замыкания ключа напряжение на выходе равно 0. После замыкания ключа в момент t_0 , поскольку источник E идеальный, произойдёт мгновенный заряд конденсаторов C_1 и C_2 . При этом нужно учесть, что заряды на конденсаторах будут равны: $Q_1=Q_2=Q$. Учитывая, что $Q_1=C_1U_1$, $Q_2=C_2U_2$, а $E=U_1+U_2$ и $U_{\text{вых}}=U_2$, получаем $U_{\text{вых}} = \frac{EC_1}{C_1 + C_2}$. На рис.1.17 приведена зависимость $U_{\text{вых}}=f(t)$.

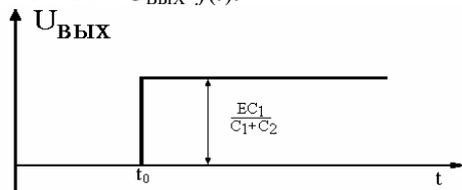
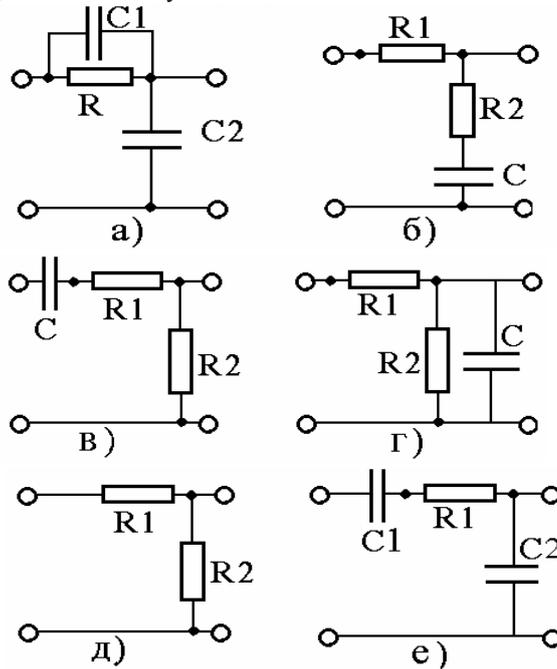


Рис. 1.17. Зависимость $U_{\text{вых}}=f(t)$ для схемы на рис. 1.16.

Контрольные вопросы

1. Как определить ток, протекающий через конденсатор, если известно приложенное к нему синусоидальное напряжение?
2. Как определить ток, протекающий через конденсатор, если приложенное к нему напряжение переменное, но не синусоидальное?
3. Как определяются верхняя и нижняя граничные частоты в RC - цепях?
4. Чему может быть равен максимальный фазовый сдвиг между входным и выходным напряжениями в интегрирующих и дифференцирующих цепях?
5. Как влияют на АЧХ интегрирующей RC - цепи сопротивление генератора и паразитная емкость нагрузки?
6. Может ли протекать постоянный ток через конденсатор?
7. Как изменится АЧХ дифференцирующей цепочки из-за влияния сопротивления генератора?
8. Как изменится АЧХ дифференцирующей цепочки из-за влияния паразитной емкости нагрузки?
9. Нарисуйте АЧХ следующих цепочек:



10. Рассчитайте постоянные времени дифференцирующей и интегрирующей цепей, соединённых последовательно и пропускающих сигналы звукового диапазона частот 20Гц-20кГц, полагая при этом, что $f_H=20$ Гц, а $f_B=20$ кГц. Как выбрать значение сопротивлений резисторов и емкости конденсаторов?

11. Рассчитайте постоянную времени интегрирующей RC-цепи, чтобы амплитуда сетевого синусоидального сигнала с частотой 50Гц уменьшилась в 100 раз.

12. Сформулируйте закон коммутации для конденсатора.

13. По какому закону происходит заряд конденсатора, осуществляемый от источника постоянного напряжения через резистор?

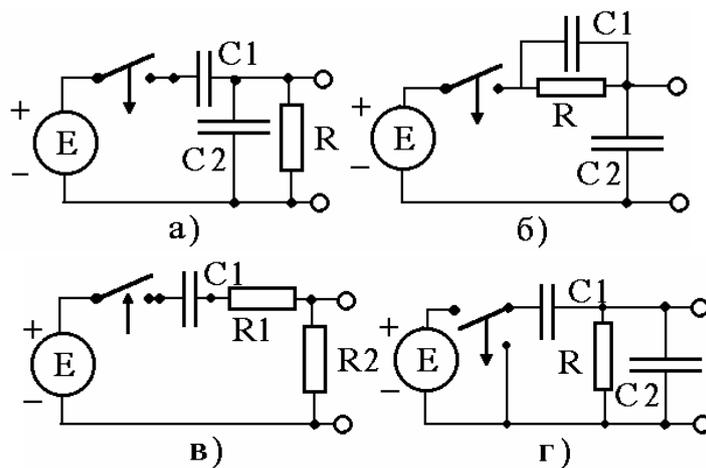
14. Может ли напряжение на конденсаторе измениться мгновенно? Почему?

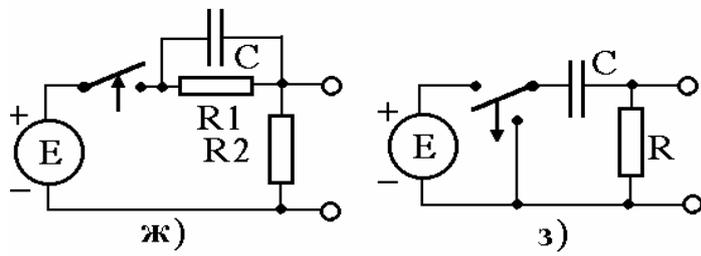
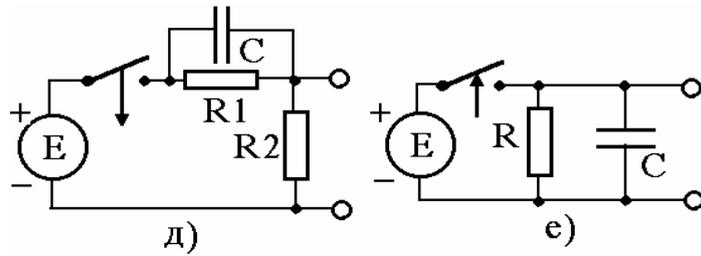
15. Как рассчитываются переходные процессы в RC - цепях при воздействии прямоугольного импульса?

16. Как зарядятся два последовательно соединенных конденсатора, присоединенных к источнику постоянного напряжения?

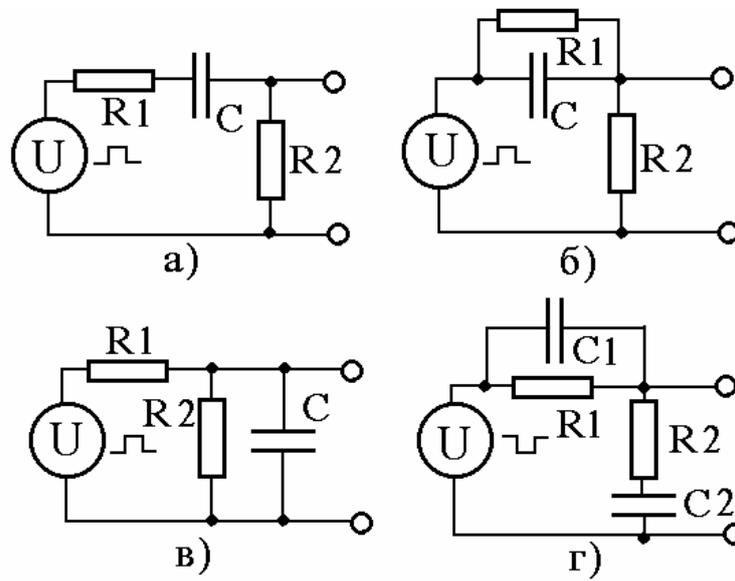
17. Может ли какое-либо напряжение в цепи, содержащей конденсатор, измениться мгновенно?

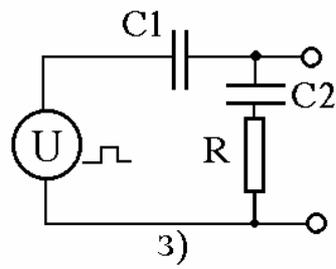
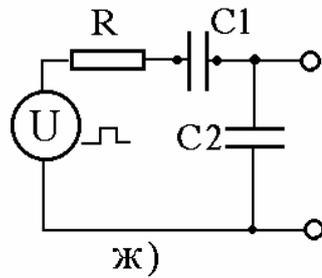
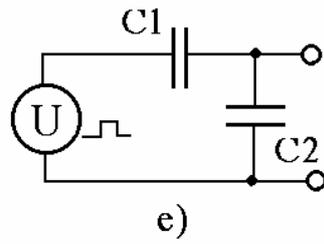
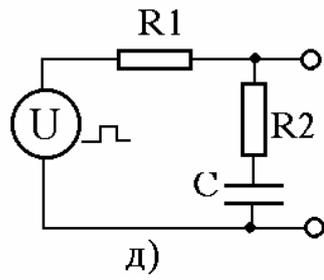
18. Нарисуйте зависимость напряжения $U_{\text{вых}}$ после замыкания и размыкания ключей в следующих схемах (считать, что ключи в исходном состоянии были бесконечно долго):





19. Нарисуйте выходные импульсы, которые получатся при подаче на вход следующих RC - цепочек прямоугольных импульсов.





При ответе на вопросы, воспользуйтесь литературой, рекомендованной в конце учебного пособия [1,2,9,12,13].