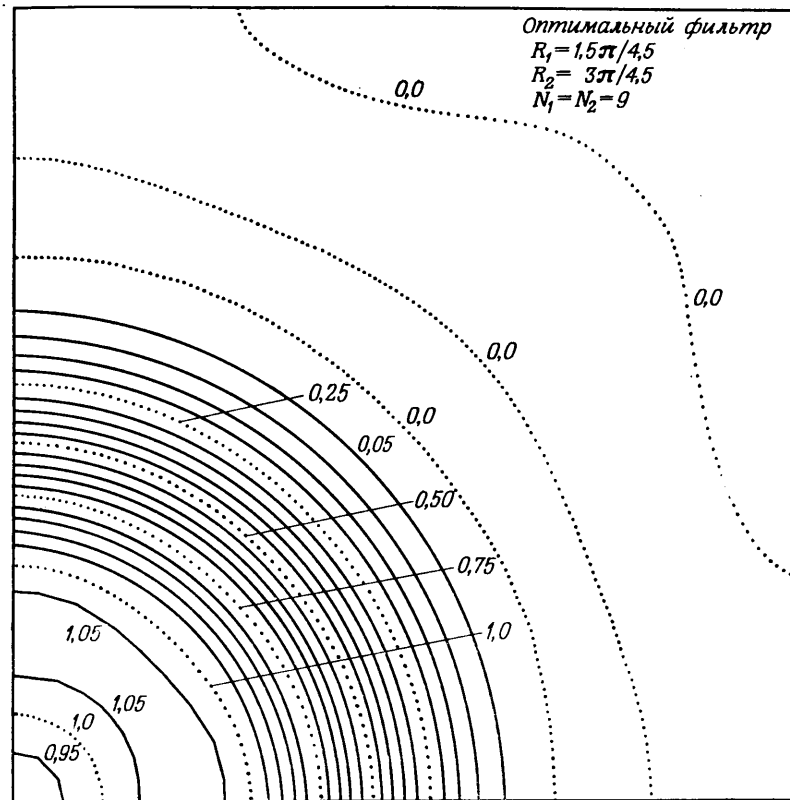


Фиг. 7.23. Амплитудная характеристика в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабе оптимального (в минимаксном смысле) двумерного фильтра нижних частот.

а: $R = 1,5\pi/4,5$; $R_2 = 3\pi/4,5$; $N_1 = N_2 = 9$. б: пульсация в полосе пропускания 0,08; минимальное ослабление 32,5 дБ.

то же самое, все коэффициенты ее ДПФ, считаются неизвестными и рассчитываются с использованием методики оптимизации. Для вычисления коэффициентов фильтра можно использовать методы линейного программирования. Другие методы, также обеспечивавшие чебышевскую аппроксимацию при расчете одномерных фильтров, здесь непригодны, так как обобщенную теорему Чебышева (см. разд. 3.26) непосредственно использовать для двумерного случая нельзя. (В разд. 7.20 будет рассмотрена методика



Фиг. 7.24. Контуры равных уровней амплитудной характеристики, изображенной на фиг. 7.23.

преобразования оптимальных одномерных фильтров в двумерные, которые часто также оказываются оптимальными.)

Прямой расчет оптимальных двумерных фильтров осложняется тем, что число переменных и количество ограничений, на них накладываемых, весьма велико. Так, для расчета фильтра с импульсной характеристикой размером (9×9) отсчетов могут потребоваться тысячи ограничений и до 21 переменной, так что время решения задачи оптимизации на ЦВМ с достаточно высоким быстродействием составит около часа. В связи с этим наибольший размер импульсной характеристики оптимального двумерного фильтра, рассчитанного прямым методом, составляет (9×9) отсчетов. На фиг. 7.23 представлена в линейном и логарифмическом масштабе амплитудная характеристика такого оптимального фильтра, а на фиг. 7.24

изображены контуры равных уровней этой характеристики. Из приведенных кривых видно, что пульсации ошибки аппроксимации амплитудной характеристики, как и для одномерных фильтров, являются равновеликими. В то же время из фиг. 7.24 видно, что в области пропускания и в переходной области характеристика, как это и требуется, имеет приблизительно круговую симметрию. В области непропускания линии постоянного уровня уже не являются окружностями. Это объясняется тем, что отсчеты импульсной характеристики образуют прямоугольную сетку.

7.20. Частотное преобразование одномерных фильтров в двумерные

Как упоминалось выше, сложность расчета двумерных фильтров затрудняет проектирование фильтров с характеристиками, хорошо аппроксимирующими заданные, особенно если речь идет о фильтрах достаточно высокого порядка. В данном разделе описана такая методика отображения оптимальных одномерных КИХ-фильтров в двумерные КИХ-фильтры, при которой во многих случаях критерий оптимальности будет удовлетворяться и для двумерного фильтра.

Если записать частотную характеристику двумерного КИХ-фильтра с линейной фазовой характеристикой в виде $H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = e^{-j2\pi[(N_1-1)/2]f_1 + [(N_2-1)/2]f_2} \times$

$$\times \sum_{n_1=0}^{(N_1-1)/2} \sum_{n_2=0}^{(N_2-1)/2} a(n_1, n_2) \cos(2\pi f_1 n_1) \cos(2\pi f_2 n_2) \quad (7.102)$$

(здесь предполагается, что N_1 и N_2 нечетные), то действительную функцию $\hat{H}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$ можно выразить как

$$\hat{H}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) e^{j2\pi[(N_1-1)/2]f_1 + [(N_2-1)/2]f_2} = \quad (7.103)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{(N_1-1)/2} \sum_{n_2=0}^{(N_2-1)/2} a(n_1, n_2) \cos(2\pi f_1 n_1) \cos(2\pi f_2 n_2), \quad (7.104)$$

где коэффициенты $\{a(n_1, n_2)\}$ связаны с импульсной характеристикой фильтра $\{h(n_1, n_2)\}$ соотношениями

$$a(0, 0) = h\left(\frac{N_1-1}{2}, \frac{N_2-1}{2}\right),$$

$$a(0, n_2) = 2h\left(\frac{N_1-1}{2}, \frac{N_2-1}{2} + n_2\right), \quad 1 \leq n_2 \leq \frac{N_2-1}{2},$$

$$a(n_1, 0) = 2h\left(\frac{N_1-1}{2} + n_1, \frac{N_2-1}{2}\right), \quad 1 \leq n_1 \leq \frac{N_1-1}{2},$$

$$a(n_1, n_2) = 4h\left(\frac{N_1-1}{2} + n_1, \frac{N_2-1}{2} + n_2\right), \quad \begin{cases} 1 \leq n_1 \leq \frac{N_1-1}{2}, \\ 1 \leq n_2 \leq \frac{N_2-1}{2}. \end{cases}$$

В гл. 3 было показано, что КИХ-фильтр с линейной фазовой характеристикой и импульсной характеристикой длиной в N отсчетов имеет частотную характеристику

$$G(e^{j2\pi f}) = e^{-j2\pi(N-1)/2f} \hat{G}(e^{j2\pi f}), \quad (7.105)$$

$$\hat{G}(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} b(n) \cos(2\pi f n) = \quad (7.106)$$

$$= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \hat{b}(n) [\cos(2\pi f)]^n. \quad (7.107)$$

В формуле (7.106) частотная характеристика представлена в виде тригонометрического полинома от f , а в формуле (7.107) — в виде алгебраического полинома от $\cos(2\pi f)$. Введя (по Макклеллану) подстановку

$$\cos(2\pi f) = A \cos(2\pi f_1) + B \cos(2\pi f_2) + C \cos(2\pi f_1) \cos(2\pi f_2) + D, \quad (7.108)$$

выражение (7.107) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \hat{b}(n) [\cos(2\pi f)]^n \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{n_1=0}^{(N_1-1)/2} \sum_{n_2=0}^{(N_2-1)/2} \hat{a}(n_1, n_2) [\cos(2\pi f_1)]^{n_1} [\cos(2\pi f_2)]^{n_2} \rightarrow \quad (7.109) \end{aligned}$$

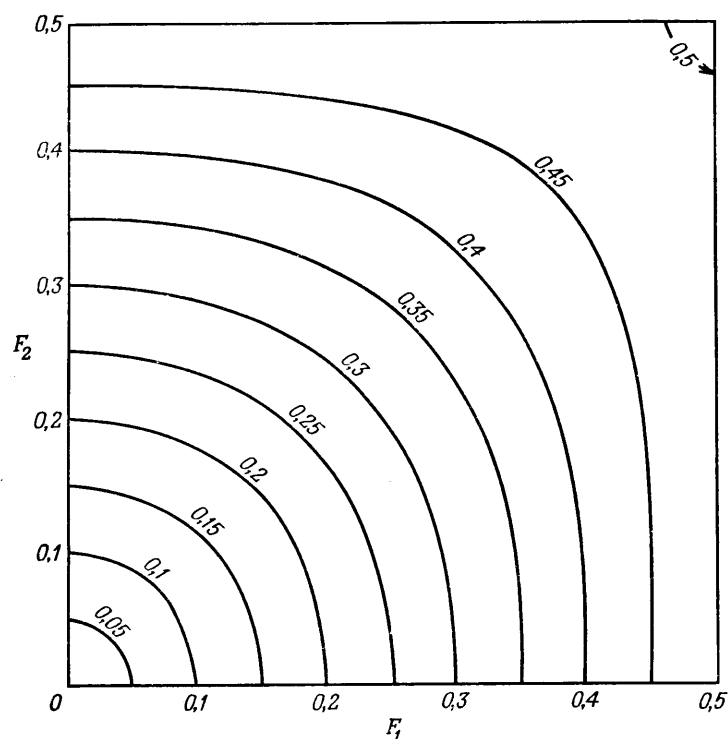
$$\rightarrow \sum_{n_1=0}^{(N_1-1)/2} \sum_{n_2=0}^{(N_2-1)/2} a(n_1, n_2) \cos(2\pi f_1 n_1) \cos(2\pi f_2 n_2). \quad (7.110)$$

Сумма (7.110) является искомым выражением для частотной характеристики КИХ-фильтров с линейной фазой [см. (7.103)]. Положив

$$A = B = C = -D = 0,5 \quad (7.111)$$

и решив уравнение (7.108) относительно f_2 , получим следующее отображающее соотношение:

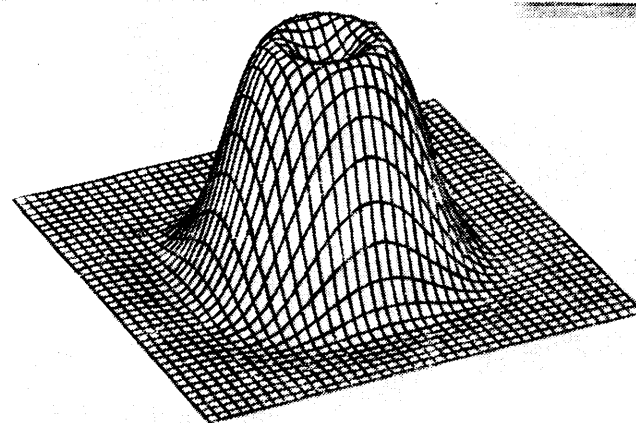
$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \arccos \left[\frac{\cos(2\pi f) + 0,5 - 0,5 \cos(2\pi f_1)}{0,5 + 0,5 \cos(2\pi f_1)} \right]. \quad (7.112)$$



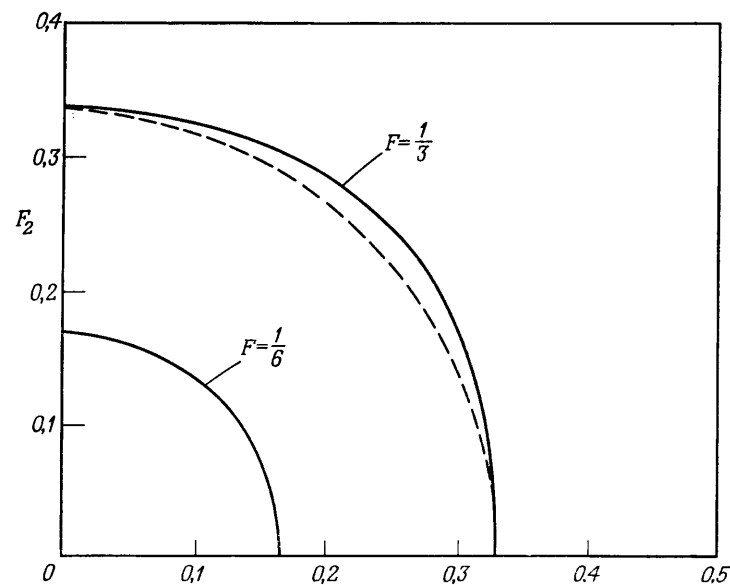
Фиг. 7.25. Частотное преобразование одномерных фильтров в двумерные (по Макклеллану).

На фиг. 7.25 показано, каким образом диапазон $0 \leq f \leq 0,5$ с помощью соотношения (7.112) отображается на плоскость (f_1, f_2) . Для каждого значения f на плоскости (f_1, f_2) проведена линия, вдоль которой значения получаемой в результате преобразования двумерной частотной характеристики постоянны и равны величине одномерной частотной характеристики на той же частоте f . При изменении f получается семейство кривых (см. фиг. 7.25), полностью описывающих частотную характеристику двумерного фильтра, рассчитываемого методом частотного преобразования. Из фиг. 7.25 следует, что линии равных уровней близки к окружностям, т. е. данный метод пригоден для расчета фильтров с круговой симметрией.

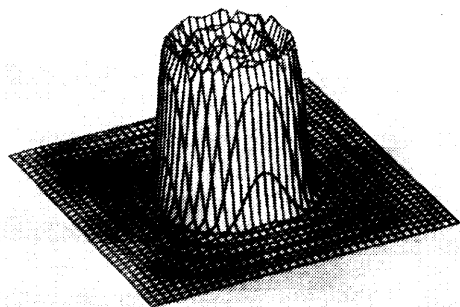
Для иллюстрации описанного метода на фиг. 7.26—7.28 приведены амплитудные характеристики и контуры равных уровней для фильтра нижних частот и полосового фильтра с круговой симметрией. Амплитудная характеристика, приведенная на фиг. 7.26,



Фиг. 7.26. Частотная характеристика фильтра нижних частот с импульсной характеристикой размером (9×9) (по Макклеллану).



Фиг. 7.27. Сопоставление контуров равных уровней амплитудных характеристик двух фильтров нижних частот, рассчитанных различными методами (по Макклеллану).



Фиг. 7.28. Частотная характеристика полосового фильтра с импульсной характеристикой размером (31×31) (по Маккеллану).

относится к фильтру нижних частот с круговой симметрией, граничными частотами областей пропускания и непропускания, соответственно равными 0,1666 и 0,3333, и импульсной характеристикой размером (9×9) . На фиг. 7.27 для сравнения показано расположение границ областей пропускания и непропускания для фильтра фиг. 7.26 и для фильтра, рассчитанного методами линейного программирования. Видно, что эти границы несколько отличаются друг от друга. Однако со всех других точек зрения (т. е. по уровню пульсаций в полосах непропускания и пропускания) эти фильтры оказываются эквивалентными.

На фиг. 7.28 изображена амплитудная характеристика полосового фильтра с импульсной характеристикой размером (31×31) и с круговой симметрией. Важным преимуществом метода частотного преобразования по сравнению со стандартными методами проектирования двумерных фильтров является то, что они позволяют сравнительно просто рассчитывать фильтры с длинными импульсными характеристиками, так как задачу аппроксимации достаточно решить для одномерной характеристики. Более того, можно показать, что при использовании преобразования (7.108), где переменные удовлетворяют условию (7.111), получаемый двумерный фильтр будет оптимальным в минимаксном смысле. Таким образом, метод частотного преобразования является, по-видимому, наиболее полезным методом расчета двумерных фильтров и может быть использован для широкого круга задач.

Фиг. 7.29. Исходная фотография.



Фиг. 7.30. Та же фотография после фильтрации нижних частот.



Фиг. 7.31. Та же фотография после фильтрации верхних частот.

