

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

6.1. Введение

При обработке сигналов во многих случаях приходится измерять спектры. Так, в задачах распознавания речи спектральный анализ, как правило, предшествует дальнейшей специальной обработке. В системах сжатия полосы речевых сигналов спектральный анализ является обычно основной операцией. В гидроакустических системах для обнаружения надводных кораблей и подводных лодок требуется проводить сложный спектральный анализ. В радиолокационных системах для получения информации о скорости цели также приходится измерять спектр.

Следует иметь в виду, что понятие «спектральный анализ» включает в себя большое число различных измерений. В широком смысле его можно определить как «измерение, которое дает точные или приближенные значения z -преобразования дискретного сигнала для заданных значений z ». Создание адекватной теории спектрального анализа затруднено тем обстоятельством, что на практике все спектральные измерения проводятся на конечных временных интервалах, длина которых обычно определяется чисто интуитивно или на основе накопленного опыта. Например, «спектр» речевого сигнала очень сильно зависит от времени, изменяясь приблизительно со скоростью изменения параметров речевого тракта (около 10 раз за секунду). Несмотря на это, во многих прикладных задачах кратковременный спектр речевого сигнала является одной из наиболее важных характеристик.

Набор алгоритмов, называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), включает разнообразные методы уменьшения времени вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поскольку вычисление ДПФ является основной операцией в большинстве задач спектрального анализа, то использование БПФ в некоторых встречающихся на практике случаях, позволяющее ускорить вычисление ДПФ в 100 и более раз по сравнению с методом прямого вычисления ДПФ, имеет чрезвычайно важное значение и должно рассматриваться как неотъемлемая часть применения методов цифровой обработки сигналов для спектрального анализа. Поэтому данная глава начинается с теории БПФ, вклю-

чающей хорошо известные алгоритмы с основанием 2 и прореживанием по времени и по частоте. Далее будет показано, каким образом можно представить БПФ в виде единого алгоритма, имеющего много различных вариантов. Тот факт, что одномерный массив чисел можно выразить через двумерный массив более чем одним способом, объясняет многообразие алгоритмов БПФ. Отсюда следует, что математическая операция перехода из одномерного пространства в двумерное является основой всех алгоритмов БПФ. При таком едином подходе к алгоритму БПФ его различные варианты могут быть получены сравнительно простым способом. Многие из этих вариантов рассматриваются в гл. 10, посвященной аппаратурной реализации БПФ.

После рассмотрения основ БПФ обсуждается взаимосвязь между различными методами спектральных измерений: какая часть z -плоскости представляет интерес для различных частных случаев и как при этом следует проводить анализ; каково соотношение между спектральным анализом на основе ДПФ и с использованием гребенки цифровых фильтров; как можно «улучшить» качество спектрального анализа и какова взаимосвязь между спектральным анализом и ЛЧМ-фильтрацией.

6.2. Введение в алгоритмы БПФ с основанием 2

Несмотря на то что алгоритмы БПФ хорошо известны и широко используются, при первом знакомлении с ними они по ряду причин достаточно трудны для понимания. Прежде всего читателю нужно усвоить много новых терминов. К тому же в литературе встречается несколько различных подходов к описанию алгоритмов БПФ, которых появилось очень много. Наконец, ввиду сложности операции перестановки данных ее проще всего понять на конкретных примерах.

ДПФ конечной последовательности $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$, было определено в гл. 2 как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

или в более удобной форме как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}, \quad (6.2)$$

где $W = e^{-j(2\pi)/N}$. Легко показать, что W^{nk} является периодической последовательностью с периодом N , т. е.

$$W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk}, \quad m, l=0, \pm 1, \dots \quad (6.3)$$

Ниже будет показано, что периодичность W^{nh} является одним из ключевых моментов БПФ. Часто периодичность W^{nh} подчеркивают тем, что вместо W записывают W_N .

Из соотношения (6.1) следует, что в случае, когда последовательность $x(n)$ является комплексной, при прямом вычислении N -точечного ДПФ нужно выполнить $(N-1)^2$ комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. Таким образом, для достаточно больших N (порядка 1000) прямое вычисление ДПФ требует выполнения чрезмерного количества вычислительных операций. Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную N -точечную последовательность на две более короткие последовательности, ДПФ которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы получилось ДПФ исходной N -точечной последовательности. Так, например, если N четное, а исходная N -точечная последовательность разбита на две $(N/2)$ -точечные последовательности, то для вычисления искомого N -точечного ДПФ потребуется порядка $(N/2)^2 \cdot 2 = N^2/2$ комплексных умножений, т. е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Здесь множитель $(N/2)^2$ дает число умножений, необходимое для прямого вычисления $(N/2)$ -точечного ДПФ, а множитель 2 соответствует двум ДПФ, которые должны быть вычислены. Эту операцию можно повторить, вычисляя вместо $(N/2)$ -точечного ДПФ два $(N/4)$ -точечных ДПФ (предполагая, что $N/2$ четное) и сокращая тем самым объем вычислений еще в два раза. Выигрыш в два раза является приближенным, поскольку не учитывается, каким образом из ДПФ меньшего размера образуется искомое N -точечное ДПФ.

Проиллюстрируем описанную методику для N -точечной последовательности $\{x(n)\}$, считая, что N равно степени 2. Введем две $(N/2)$ -точечные последовательности $\{x_1(n)\}$ и $\{x_2(n)\}$ из четных и нечетных членов $x(n)$ соответственно, т. е.

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (6.4)$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

N -точечное ДПФ последовательности $\{x(n)\}$ можно записать как

$$X(k) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ четные}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ нечетные}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \quad (6.5)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nh} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)h}. \quad (6.6)$$

С учетом того, что

$$W_N^2 = [e^{j(2\pi/N)}]^2 = e^{j[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2}, \quad (6.7)$$

перепишем выражение (6.6) в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nh} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nh}, \quad (6.8)$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad (6.9)$$

где $X_1(k)$ и $X_2(k)$ равны $(N/2)$ -точечным ДПФ последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$. Из формулы (6.9) следует, что N -точечное ДПФ $X(k)$ может быть разложено на два $(N/2)$ -точечных ДПФ, результаты которых объединяются согласно (6.9). Если бы $(N/2)$ -точечные ДПФ вычислялись обычным способом, то для вычисления N -точечного ДПФ потребовалось бы, очевидно, $(N^2/2 + N)$ комплексных умножений. При больших N (когда $N^2/2 \gg N$) это позволяет сократить время вычисления на 50%.

Поскольку $X(k)$ определено при $0 \leq k \leq N-1$, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ определены при $0 \leq k \leq N/2-1$, необходимо доопределить формулу (6.9) для $k \geq N/2$. Это определение достаточно очевидно и может быть записано следующим образом¹⁾:

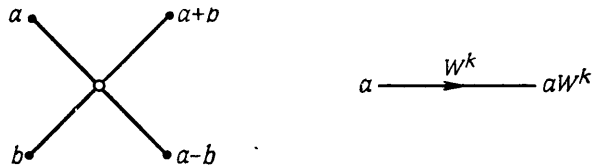
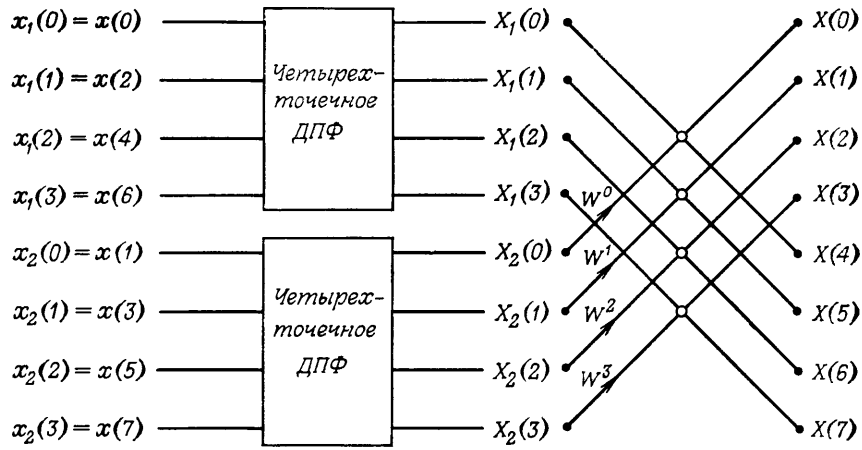
$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \\ X_1(k - \frac{N}{2}) + W_N^k X_2(k - \frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

На фиг. 6.1 с помощью направленного графа²⁾ представлена последовательность операций при выполнении восьмиточечного ДПФ с использованием двух четырехточечных преобразований. Входная последовательность $x(n)$ сначала разбивается на две последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ из четных и нечетных членов $x(n)$, после чего рассчитываются их преобразования $X_1(k)$ и $X_2(k)$. Затем в соответствии с формулой (6.10) (см. сноску 1) получают $X(k)$.

¹⁾ Соотношение (6.10) является прямым следствием периодичности ДПФ. Заметим также, что $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, так что формулу (6.10) можно переписать в виде

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \\ X_1(k - \frac{N}{2}) - W_N^k X_2(k - \frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1. \end{cases}$$

²⁾ Незачерненные кружки в правой части фиг. 6.1 обозначают операцию сложения/вычитания, причем верхний выход соответствует сумме, а нижний — разности. Стрелка \rightarrow обозначает операцию умножения на значение множителя a , указанного над стрелкой. В общем случае переменные являются комплексными числами. Заметим, что кружок можно интерпретировать как двухточечное ДПФ. Узлы обозначают регистры, содержащие входные и выходные массивы отдельных ДПФ. Все эти обозначения согласуются с правилами изображения направленных графов в теории линейных систем.



Фиг. 6.1. Вычисление восьмиточечного ДПФ через два четырехточечных ДПФ.

Рассмотренная схема вычислений может быть использована для расчета $N/2$ -точечных ДПФ в соответствии с формулами (6.9) и (6.10). Каждая из последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ разбивается на две последовательности, состоящие из четных и нечетных членов. Аналогично $N/2$ -точечные ДПФ могут быть записаны как комбинации двух $N/4$ -точечных ДПФ, т. е.

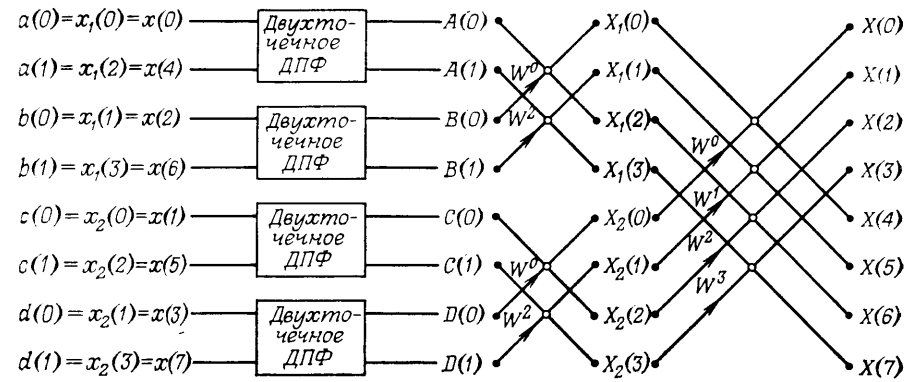
$$X_1(k) = A(k) + W_{N/2}^k B(k) \quad (6.11)$$

или

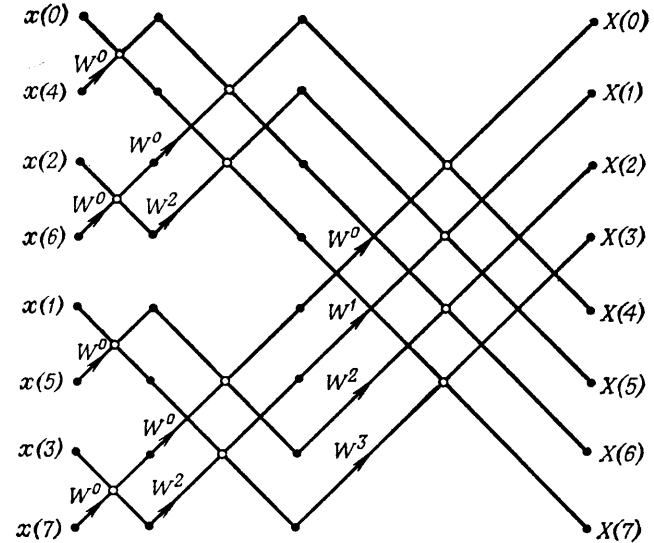
$$X_1(k) = A(k) + W_N^{2k} B(k), \quad (6.12)$$

где $0 \leq k \leq N/2 - 1$, $A(k)$ и $B(k)$ — $N/4$ -точечные ДПФ соответственно четных и нечетных членов $x_1(n)$. На фиг. 6.2 показан результирующий направленный граф, в котором четырехточечные ДПФ из фиг. 6.1 рассчитываются согласно (6.12).

Процесс уменьшения размера ДПФ от L до $L/2$, где L равно степени 2, может быть продолжен до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Двухточечное ДПФ $F(k)$, $k = 0, 1$,



Фиг. 6.2. Вычисление восьмиточечного ДПФ через два четырехточечных ДПФ, которые в свою очередь вычисляются через четыре двухточечных ДПФ.



Фиг. 6.3. Восьмиточечное ДПФ, полученное последовательным прореживанием в 2 раза.

может быть рассчитано без использования умножений по формулам

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1) W_2^0, \\ F(1) &= f(0) + f(1) W_2^1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь $f(n)$, $n = 0, 1, \dots$ — преобразуемая двухточечная последовательность. Поскольку $W_8^0 = 1$ и $W_8^4 = -1$, для вычислений по формулам (6.13) действительно не нужны операции умножения. Таким образом, восьмиточечное ДПФ (фиг. 6.1 и 6.2) в итоге сводится к алгоритму, описываемому направленным графом, представленным на фиг. 6.3.

6.3. Некоторые свойства алгоритма БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени

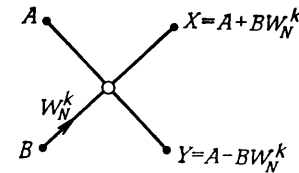
Анализ графа на фиг. 6.3 и процедуры последовательного сокращения вдвое размеров преобразований показывает, что на каждом этапе БПФ (т. е. при каждом сокращении размеров ДПФ) необходимо выполнить $N/2$ комплексных умножений. Поскольку общее количество этапов равно $\log_2 N$, то число комплексных умножений, необходимое для нахождения N -точечного ДПФ, приблизительно равно $N/2 \log_2 N$. Слово *приблизительно* использовано по той причине, что умножения на W_N^0 , $W_N^{N/2}$, $W_N^{N/4}$ и $W_N^{3N/4}$ в действительности сводятся просто к сложениям и вычитаниям комплексных чисел. Так, например, на фиг. 6.3 первый этап БПФ содержит только сложения и вычитания комплексных чисел. Даже на втором этапе используются только сложения и вычитания комплексных чисел. Фактически, как следует из направленного графа на фиг. 6.3, вместо ожидаемых 12 (т. е. $4 \log_2 8$) достаточно выполнить всего два нетривиальных умножения. Однако для больших значений N фактическое число нетривиальных умножений хорошо аппроксимируется выражением $N/2 \log_2 N$.

Описанный выше алгоритм был назван алгоритмом с прореживанием по времени, поскольку на каждом этапе входная (т. е. временная) последовательность разделяется на две обрабатываемые последовательности меньшей длины, т. е. входная последовательность прореживается на каждом этапе. Другая форма алгоритма БПФ (с прореживанием по частоте) будет описана ниже, а сейчас целесообразно обсудить некоторые общие свойства алгоритмов БПФ.

Базовая операция алгоритма с прореживанием по времени (так называемая „бабочка“) состоит в том, что два входных числа A и B объединяются для получения двух выходных чисел X и Y следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= A + W_N^k B, \\ Y &= A - W_N^k B. \end{aligned} \quad (6.14)$$

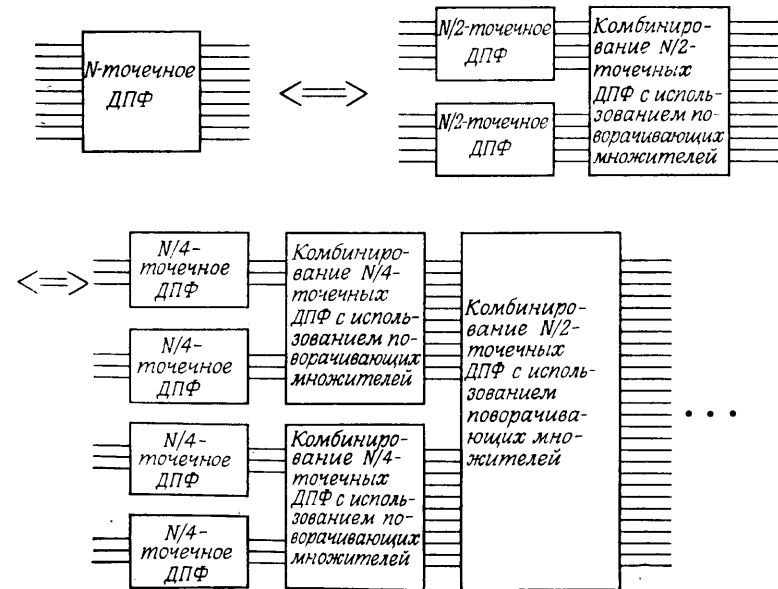
На фиг. 6.4 изображен направленный граф базовой операции (6.14). Внимательное рассмотрение направленного графа на фиг. 6.3 показывает, что каждый из этапов содержит $N/2$ базовых



Фиг. 6.4. Базовая операция алгоритма БПФ.

операций. В случае когда множитель W_N^k — нетривиальный, для каждой базовой операции необходимо выполнить только одно умножение, поскольку величину BW_N^k можно вычислить и запомнить. Таким образом, структура базовых операций такова, что для выполнения БПФ N -точечной последовательности, размещенной в памяти, достаточно иметь лишь одну дополнительную ячейку памяти. Результаты всех промежуточных этапов БПФ можно размещать в те же ячейки памяти, где находились исходные данные. Поэтому для хранения и входной, и выходной последовательностей можно использовать один и тот же массив ячеек памяти. Алгоритм, в котором для размещения входной и выходной последовательностей используются одни и те же ячейки памяти, называется алгоритмом БПФ с замещением.

На фиг. 6.5 алгоритм БПФ с основанием 2 иллюстрируется несколько иначе. Все ДПФ являются двухточечными и не требуют



Фиг. 6.5. Типичное разложение для алгоритмов БПФ с основанием 2.

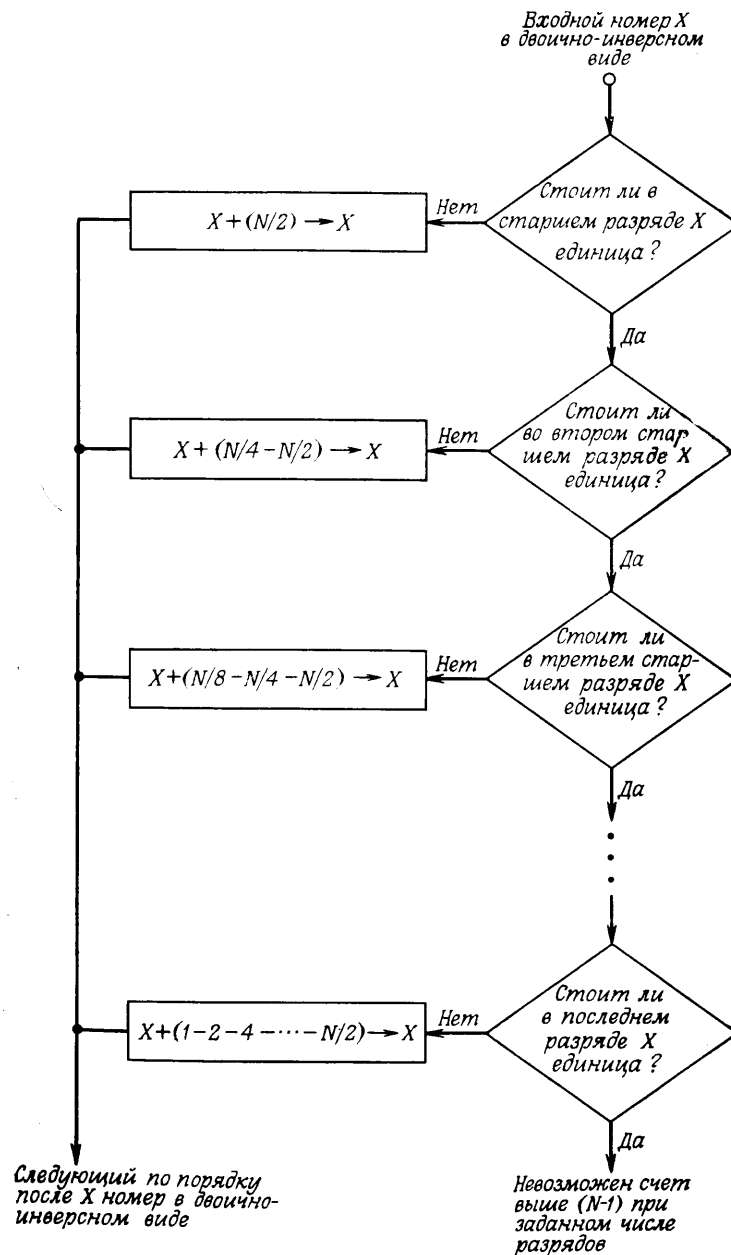
операций умножения. Однако при объединении двух $(N/2)$ -точечных ДПФ в одно N -точечное ДПФ приходится выполнять около $N/2$ умножений. Из примера на фиг. 6.3 видно, что N -точечное БПФ состоит из $\log_2 N$ этапов, причем все операции умножения используются только при объединении результатов ДПФ. Поскольку эти умножения используются во всех алгоритмах БПФ, соответствующие множители получили специальное название *поворачивающих множителей* (иногда их называют фазовыми множителями или множителями вращения).

6.4. Перестановка данных и двоичная инверсия

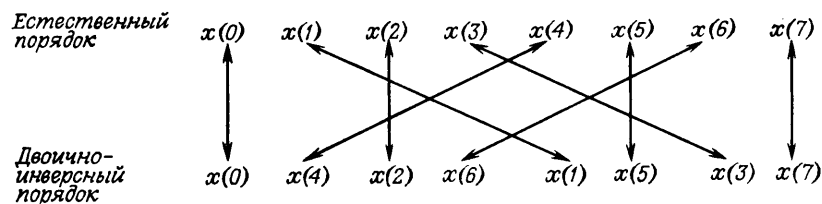
Еще одной особенностью алгоритма с прореживанием по времени (как, впрочем, и большинства других алгоритмов БПФ) является необходимость такой перестановки элементов входной последовательности, чтобы выходная последовательность $X(k)$ имела естественный (прямой) порядок расположения, т. е. $k = 0, 1, \dots, N - 1$. В примере на фиг. 6.3 для этого требовался следующий порядок размещения входной последовательности: $x(0)$, $x(4)$, $x(2)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(5)$, $x(3)$ и $x(7)$. Характер перестановки элементов входной последовательности может быть описан сравнительно просто. Ниже будет показано, что в случае, когда N является степенью 2, входная последовательность должна быть расположена в памяти в двоично-инверсном порядке для того, чтобы выходная последовательность получалась в прямом порядке. Двоично-инверсный порядок определяется следующим образом. Если записать порядковые номера элементов входной последовательности в двоичном коде, используя L двоичных разрядов, причем $N = 2^L$, а затем инвертировать порядок следования разрядов, то получаемые при этом числа и будут номерами элементов входной последовательности после их перестановки. Так, для случая $N = 8 = 2^3$ прямой порядок номеров приведен в табл. 6.1 слева,

Таблица 6.1

Номер	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7



Фиг. 6.6. Блок-схема программы двоично-инверсного счетчика (предложено Рэйдером).



Фиг. 6.7. Перестановка данных с замещением.

а двоично-инверсный порядок — справа. Таким образом, для двоичной инверсии входной последовательности необходим соответствующий алгоритм. На фиг. 6.6 показан легко реализуемый двоично-инверсный счетчик, предложенный Рейдером. Начиная с первого двоично-инвертируемого числа X (с прямым номером 000 в табл. 6.1), алгоритм позволяет формировать последовательно все остальные двоично-инверсные номера. Половина из общего количества двоично-инверсных номеров формируется с использованием лишь двух операций, поскольку только в половине случаев старший значащий разряд X будет равен 1. Аналогично четверть всех двоично-инверсных номеров формируется с помощью трех операций и т. д. Таким образом, этот алгоритм является весьма эффективным.

Из сказанного выше ясно, что перестановку входной последовательности можно произвести с замещением, меняя в парах местами числа с прямыми и двоично-инверсными номерами и используя для этого лишь одну вспомогательную ячейку памяти. На фиг. 6.7 показана схема перестановки данных, представленных в табл. 6.1.

Отметим еще одну особенность алгоритма БПФ, заключающуюся в том, что на всех этапах преобразования используются коэффициенты W_N^k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Существует несколько способов получения этих коэффициентов. Простейший способ — составление таблицы, к которой можно обращаться в процессе счета. Единственный недостаток этого способа состоит в том, что для хранения этих коэффициентов необходима дополнительная память примерно из N ячеек, так что при больших значениях N имеющийся объем памяти ЦВМ может оказаться недостаточным. Второй способ заключается в непосредственном вычислении коэффициентов $W_N^k = \cos [(2\pi/N)k] - j \sin [(2\pi/N)k]$ с использованием каждый раз стандартных подпрограмм расчета синуса и косинуса. Этот способ связан с большими затратами времени, поскольку вычисление синуса и косинуса, как правило, достаточно продолжительно. Третий способ основан на применении простой рекуррентной формулы

$$W_N^k = (W_N^{k-L}) W_N^L \quad (6.15)$$

с начальным условием $W_N^0 = 1$, так как степени W на каждом этапе БПФ меняются с постоянным шагом. Так, в примере на фиг. 6.3 на первом этапе используются коэффициенты W^0 и W^4 , на втором — W^0 , W^2 , W^4 и W^6 , а на третьем — W^k , $k = 0, 1, \dots, 7$. Поэтому, чтобы иметь возможность на каждом из этапов использовать формулу (6.15), достаточно запомнить или вычислить только множители W^4 , W^2 и W .

6.5. Программа расчета БПФ на ФОРТРАНе

Чтобы лучше усвоить основные идеи БПФ, полезно рассмотреть простую, составленную на ФОРТРАНе программу расчета БПФ с прореживанием по времени. Текст этой программы, заимствованный у Кули, Льюиса и Уэлча, приведен на фиг. 6.8. Входная

```

SUBROUTINE FFT (A,M,N)
COMPLEX A(N),U,W,T
N = 2**M
NV2 = N/2
NM1 = N - 1
J = 1
DO 7 I = 1,NM1
IF (I .GE. J) GO TO 5
T = A (J)
A (J) = A (I)
A (I) = T
5 K = NV2
6 IF (K .GE. J) GO TO 7
J = J - K
K = K/2
GO TO 6
7 J = J + K
PI = 3.141592653589793
DO 20 L = 1,M
LE = 2**L
LE1 = LE/2
U = (1.0,0.)
W = CMPLX (COS (PI/LE1), SIN (PI/LE1))
DO 20 J = 1,LE1
DO 10 I = J,N,LE
IP = I + LE1
T = A (IP) * U
A (IP) = A (I) - T
10 A (I) = A (I) + T
20 U = U * W
RETURN
END

```

Фиг. 6.8. Составленная на ФОРТРАНе программа БПФ с основанием 2 при прореживании по времени, выполняемого с замещением (взята у Кули, Льюиса и Уэлча).

последовательность представляет собой массив A , размером до 1024 комплексных чисел. Фактический размер БПФ равен $N = 2^M$, причем M указывается в операторе обращения к подпрограмме. Все операторы от DO 7 I = 1, NM1 до оператора с меткой 7 предназначены для выполнения двоично-инверсной перестановки элементов входного массива. Остальные операторы используются для вычисления непосредственно БПФ и образуют три вложенных цикла. С помощью первого (внешнего) цикла выполняется M этапов, другой цикл предназначен для выполнения базовых операций в пределах каждого этапа, а третий цикл (внутренний) необходим для вычисления степеней W , используемых при выполнении базовых операций в пределах одного этапа. Для вычисления степеней W используется рекуррентное соотношение (6.15), причем синусы и косинусы непосредственно вычисляются лишь для нахождения W по приращениям. По утверждению Кули, Льюиса и Уэлча, при таком подходе (в случае, когда $N = 1024$) требуется всего на 15% больше операций (типа комплексных сложений или умножений), чем при использовании таблицы, содержащей все коэффициенты W^k . Из фиг. 6.8 видно, насколько просто может быть запрограммирован алгоритм БПФ.

Прежде чем перейти к рассмотрению второго алгоритма БПФ, целесообразно еще раз отметить, что при использовании алгоритма БПФ требуется меньшее число операций, чем при прямом вычислении ДПФ (при условии, что N равно степени 2). При прямом вычислении число операций (комплексных умножений и сложений) примерно равно N^2 , тогда как при использовании БПФ оно близко к $N \log_2 N$. Обе эти величины сравниваются при значениях N от 2 до 2048 в табл. 6.2. При $N \geq 1024$ объем вычислений сокращает-

Таблица 6.2

N	N^2	$N \log_2 N$	$N^2/(N \log_2 N)$
2	4	2	2,0
4	16	8	2,0
8	64	24	2,7
16	256	64	4,0
32	1 024	160	6,4
64	4 096	384	10,7
128	16 384	896	18,3
256	65 536	1 024	32,0
512	262 144	4 608	56,9
1024	1 048 576	10 240	102,4
2048	4 194 304	22 528	186,2

ся приблизительно на два порядка, что позволяет выполнять обработку сигналов, включающую вычисление ДПФ, в тех случаях, когда до появления БПФ она считалась неосуществимой.

6.6. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Другая распространенная форма алгоритма БПФ (при условии, что N равно степени 2) — так называемый алгоритм БПФ с прореживанием по частоте. В этом варианте алгоритма БПФ входная последовательность $\{x(n)\}$ разбивается на две последовательности, содержащие по $N/2$ отсчетов каждая следующим образом: первая последовательность $\{x_1(n)\}$ состоит из первых $(N/2)$ отсчетов $\{x(n)\}$, а вторая $\{x_2(n)\}$ — из остальных $(N/2)$ отсчетов $\{x(n)\}$, т. е.

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), & n &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ x_2(n) &= x\left(n + \frac{N}{2}\right), & n &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (6.16)$$

При таком разбиении N -точечное ДПФ последовательности $x(n)$ можно записать в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nh} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nh} = \quad (6.17)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_N^{nh} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_N^{(n+N/2)h}. \quad (6.18)$$

Учитывая, что $W_N^{N/2} = e^{-j\pi}$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + e^{-j\pi kh} x_2(n)] W_N^{nh}. \quad (6.19)$$

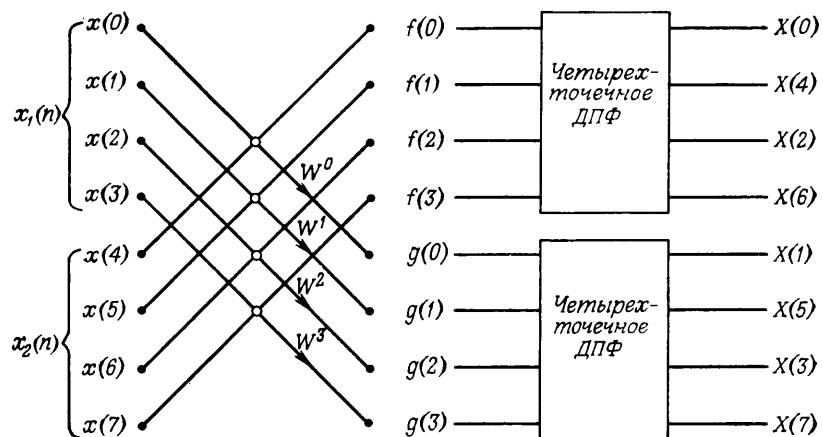
Запишем выражения отдельно для четных и нечетных отсчетов ДПФ:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] (W_N^2)^{nh} = \quad (6.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{nh}, \quad (6.21)$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_N^{n(2k+1)h} = \quad (6.22)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \{[x_1(n) - x_2(n)] W_N^n\} W_{N/2}^{nh}. \quad (6.23)$$



Фиг. 6.9. Переход от восьмиточечного ДПФ к двум четырехточечным ДПФ при прореживании по частоте.

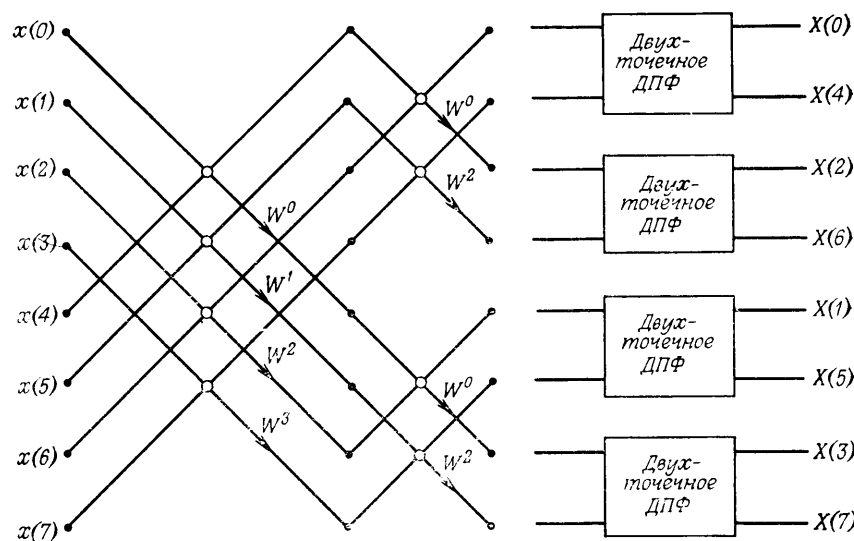
Из выражений (6.21) и (6.23) видно, что четные и нечетные отсчеты ДПФ можно получить из $(N/2)$ -точечных ДПФ последовательностей $f(n)$ и $g(n)$, равных

$$\begin{aligned} f(n) &= x_1(n) + x_2(n), & n &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ g(n) &= [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n, & n &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (6.24)$$

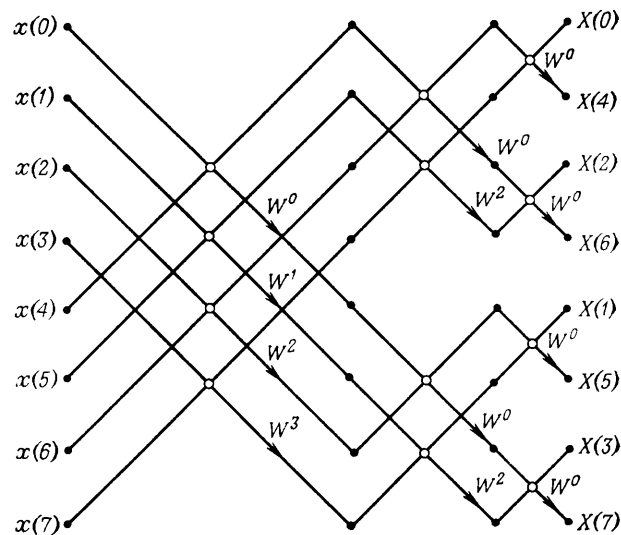
Таким образом, снова вычисление N -точечного ДПФ удалось свести к вычислению двух $(N/2)$ -точечных ДПФ. На фиг. 6.9 эта методика иллюстрируется для случая $N = 8$.

Описанную методику можно применить повторно и представить каждое из $(N/2)$ -точечных ДПФ в виде комбинации двух $(N/4)$ -точечных ДПФ. На фиг. 6.10 и 6.11 показан переход от четырехточечных ДПФ (фиг. 6.9) к двухточечным ДПФ с последующим прямым вычислением двухточечных ДПФ.

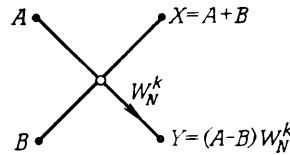
Сравнение алгоритмов, иллюстрированных на фиг. 6.3 и 6.11, позволяет выявить два очевидных различия между ними. Во-первых, при прореживании по времени порядок следования входных отсчетов двоично-инверсный, а выходных — прямой и наоборот при прореживании по частоте (фиг. 6.11). Однако это отличие кажущееся, поскольку в обоих алгоритмах порядок следования входных отсчетов может быть прямым, а выходных — двоично-инверсным и наоборот. Второе отличие заключается в несколько ином выполнении базовой операции (см. фиг. 6.12 и 6.4): при прореживании по частоте комплексное умножение выполняется *после* сложения — вычитания.



Фиг. 6.10. Переход от четырехточечных ДПФ на фиг. 6.9 к двухточечным ДПФ.



Фиг. 6.11. Полный направленный граф восьмиточечного ДПФ с замещением и прореживанием по частоте.



Фиг. 6.12. Базовая операция алгоритма БПФ с прореживанием по частоте.

Легко заметить сходство между алгоритмами с прореживанием по времени и по частоте. В обоих случаях при вычислении ДПФ требуется около $N \log_2 N$ операций, вычисления могут быть проведены с замещением и должно быть предусмотрено выполнение двоичной инверсии. В разд. 6.8 будет строго показано, почему эти, казалось бы, различные алгоритмы имеют такое сходство. Будет рассмотрен единый подход к БПФ, для которого алгоритмы с прореживанием по времени и по частоте оказываются частными случаями. С помощью такого подхода проанализирован также случай, когда N является составным целым числом, но не обязательно равным степени 2.

6.7. Вычисление обратного ДПФ с помощью алгоритма прямого ДПФ

Прежде чем перейти к следующему разделу, покажем, как для вычисления обратного ДПФ можно без каких-либо изменений использовать алгоритм БПФ. Обратное ДПФ N -точечной последовательности $\{X(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, определяется следующим образом:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk}. \quad (6.25)$$

Взяв выражение, комплексно сопряженное с (6.25), и умножив его на N , получим

$$Nx^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W^{nk}. \quad (6.26)$$

Правая часть формулы (6.26) представляет собой ДПФ последовательности $\{X^*(k)\}$ и может быть вычислена с использованием одного из описанных выше алгоритмов БПФ. Искомую последовательность $\{x(n)\}$ можно получить, взяв комплексно-сопряженное с (6.26) выражение и разделив его на N , т. е.

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W^{nk} \right]^*. \quad (6.27)$$

Таким образом, алгоритм БПФ обеспечивает вычисление и прямого, и обратного ДПФ.

6.8. Единый подход к алгоритмам БПФ

Существует много различных алгоритмов БПФ, однако оказывается, что все они могут быть получены с помощью последовательного применения единственной операции, а именно представления одномерного массива чисел двумерным. Этот единый подход и будет описан в настоящем разделе, но сначала рассмотрим некоторые вопросы терминологического характера.

При вычислении N -точечного ДПФ N -точечной последовательности целое N может быть либо простым, либо составным числом (до сих пор считалось, что N состоит из большого числа сомножителей и равно степени 2). Если N простое, его нельзя разложить на произведение меньших целых чисел. В этом случае одномерный сигнал $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ невозможно представить в виде двумерного массива, поэтому для такого сигнала не существует алгоритма БПФ. В большинстве практических задач вполне допустимо искусственное удлинение обрабатываемой последовательности путем добавления нулей, приводящее к тому, что результирующий спектр представляет собой некоторую интерполяцию спектра неудлиненной последовательности.

Пусть, например, $N = 60$. Это число можно представить как произведение меньших чисел различным образом: $60 = 3 \times 4 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 5 \times 4 \times 3 = 12 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$ и т. д. В зависимости от порядка следования сомножителей и их общего количества могут быть получены различные формы алгоритма БПФ. Для характеристики разложения обычно используется понятие «основание». Понятие «смешанное основание» означает, что не все сомножители N одинаковы. Для $N = 60$ все формы алгоритма БПФ имеют смешанные основания. Если N можно представить в виде произведения одинаковых сомножителей r , то соответствующий алгоритм называют алгоритмом БПФ с основанием r . Например, если $N = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, то получают рассмотренные в предыдущих разделах главы алгоритмы БПФ с основанием 2. Если же N записать как $64 = 8 \times 8$, то получится алгоритм БПФ с основанием 8.

Очень важно отметить, что разложение числа на множители можно выполнить различными способами. Так, $N = 60$ можно представить как 12×5 , а затем 12 — как 4×3 . С другой стороны, можно было бы записать $60 = 3 \times 20$, далее $20 = 5 \times 4$ и $4 = 2 \times 2$. Таким образом, для выявления общих закономерностей следует провести тщательный анализ свойств разложения очередного числа на два сомножителя. Возьмем в качестве примера снова $N = 60$ и запишем одно из возможных разложений обрабатываемой

мого массива в виде матрицы из (5×12) номеров отсчетов сигнала:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

Далее, поскольку столбцы содержат по 5 (т. е. простое число) отсчетов, они больше не могут быть разложены. Однако строки, состоящие из 12 отсчетов, можно представить в виде матриц размером (3×4) . Например, первая строка будет иметь вид

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11.

Остальные строки можно представить аналогично. Итак, теперь нужно установить, каким образом, оперируя с двумерным массивом, можно получить ДПФ исходного одномерного массива.

Для получения основного результата будем считать, что входные отсчеты пронумерованы по строкам и по столбцам, поэтому их номера могут быть представлены следующими парами чисел:

0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10	0,11
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,10	1,11
2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,10	2,11
3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,10	3,11
4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	4,10	4,11

Далее, пусть текущий номер столбца равен m ($m = 0, 1, \dots, 11$), а l ($l = 0, 1, \dots, 4$) — текущий номер строки. Если исходный номер отсчета обозначить через n ($n = 0, 1, \dots, 59$), то

$$n = Ml + m, \quad (6.28)$$

где M — число столбцов. L — число строк (в данном примере $M = 12$, $L = 5$).

Допустим, что мы можем найти ДПФ двумерного массива с двойными номерами, тогда результат должен иметь вид двумерного массива с двойными номерами. Пусть m и l — переменные исходного сигнала, а r и s — переменные двумерного ДПФ по столбцам и строкам, которые преобразуются в одну переменную следующим образом:

$$k = Lr + s. \quad (6.29)$$

Теперь коэффициенты одномерного ДПФ $X(k) = X(s, r)$ можно выразить через преобразование массива $x(n) = x(l, m)$, используя простую подстановку формул (6.28) и (6.29) в выражение для ДПФ (6.2), что дает

$$X(k) = X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W^{(Ml+m)(Lr+s)}. \quad (6.30)$$

Разлагая $W^{(Ml+m)(Lr+s)}$ с учетом того, что $W^{MLLr} = W^{Nlr} = 1$, и располагая соответствующие переменные под знаками суммирования, преобразуем формулу (6.30) к следующему виду:

$$X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} W^{Lmr} W^{ms} \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W^{Msl}}_{q(s, m)}. \quad (6.31)$$

Эта формула при правильной интерпретации содержит все необходимые сведения, позволяющие связать преобразование одномерного массива с преобразованием того же массива, представленного в виде двумерной матрицы. Заметим прежде всего, что внутренняя сумма представляет собой ДПФ m -го столбца исходного массива с ядром преобразования W^M . Таким образом, можно сформулировать первый шаг последовательности расчета $X(k)$:

1. Вычислить L -точечные ДПФ всех столбцов. Результат является функцией s и m , причем m меняется от 0 до $M-1$. Обозначим его через $q(s, m)$ и перепишем формулу (6.31):

$$X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} W^{Lmr} W^{ms} q(s, m). \quad (6.32)$$

Отсюда следует, что второй шаг вычисления $X(k)$ сводится к следующему:

2. Найти новый массив $h(s, m)$, умножая каждый элемент $q(s, m)$ на поворачивающий множитель W^{ms} .

Теперь формула (6.32) принимает вид

$$X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} h(s, m) W^{Lmr}. \quad (6.33)$$

Она представляет M -точечные ДПФ каждой из строк с номерами s . Поэтому последний шаг алгоритма заключается в следующем:

3. Вычислить M -точечные ДПФ всех строк матрицы $h(s, m)$ с ядром преобразования W^L .

Описанная методика напоминает вычисление двумерного ДПФ, когда сначала вычисляются ДПФ строк, а затем столбцов, но шаг 2 отсутствует. Разделительность ядра преобразования с более высокой размерностью и является причиной того, что при расчете ДПФ с более высокой размерностью требуется меньше операций, чем при расчете одномерного ДПФ при одинаковом общем числе отсчетов.

Здесь важно отметить, что после введения поворачивающих множителей, т. е. после второго шага описанной выше методики, способы расчета двумерного ДПФ и одномерного ДПФ массива, представленного в виде двумерной матрицы, становятся эквивалентными, причем при каждом таком представлении для выполнения шага 2 требуется дополнительно до N умножений. Более подробно вопрос о времени вычисления будет рассмотрен ниже в этом разделе.

Следует отметить, что изменение порядка суммирования в формуле (6.30) на обратный дает

$$X(s, r) = \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} W^{Mls}}_{\text{шаг 3}} \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{x(l, m) W^{ms} W^{Lrm}}_{\text{шаг 1}}}_{\text{шаг 2}}$$

так что порядок вычисления $X(k)$ становится следующим:

1. Умножить отсчеты сигнала $x(l, m)$ на поворачивающие множители W^{ms} .

2. Вычислить M -точечные ДПФ всех строк.

3. Вычислить L -точечные ДПФ всех столбцов.

В целом методика вычисления преобразования идентична рассмотренной ранее, но отдельные операции выполняются в другом порядке: умножения на поворачивающие множители здесь предшествуют вычислению ДПФ строк, тогда как раньше они выполнялись после вычисления ДПФ столбцов. Эти отличия не только напоминают, но и действительно связаны с обсуждавшимся выше различием между алгоритмами БПФ с основанием 2 при прореживании по времени и по частоте.

Отметим еще одно важное свойство методики преобразования, вытекающее из формулы (6.30), в которой переменные m и r являются номерами столбцов, а l и s — номерами строк. При увеличении m на единицу номер отсчета исходного массива ($Ml + m$) также возрастает на 1, тогда как при увеличении на 1 номера столбца преобразованного массива r аргумент $X(s, r)$ возрастает на L . Это означает, что в результате преобразования номера строк и столбцов меняются местами. Последнее обстоятельство настолько важно, что для его иллюстрации приведем пример вычисления 15-точечного ДПФ с использованием разложения (3×5) . Исходную матрицу сигнала можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{lll} x(0) = x(0, 0) & x(1) = x(0, 1) & x(2) = x(0, 2) \\ x(3) = x(0, 3) & x(4) = x(0, 4) & x(5) = x(1, 0) \\ x(6) = x(1, 1) & x(7) = x(1, 2) & x(8) = x(1, 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x(9) = x(1, 4) & x(10) = x(2, 0) & x(11) = x(2, 1) \\ x(12) = x(2, 2) & x(13) = x(2, 3) & x(14) = x(2, 4) \end{array}$$

Результирующая матрица гармоник ДПФ будет иметь вид

Таблица 6.3

$$\begin{array}{llllll} X(0) = X(0, 0) & X(3) = X(0, 1) & X(6) = X(0, 2) & X(9) = X(0, 3) & X(12) = X(0, 4) \\ X(1) = X(1, 0) & X(4) = X(1, 1) & X(7) = X(1, 2) & X(10) = X(1, 3) & X(13) = X(1, 4) \\ X(2) = X(2, 0) & X(5) = X(2, 1) & X(8) = X(2, 2) & X(11) = X(2, 3) & X(14) = X(2, 4) \end{array}$$

Если $N = 30 = 5 \times 6 = 5 \times 2 \times 3$, то основную теорему разложения можно использовать дважды, начав с разложения (5×6) , а затем выполнить шеститочечные ДПФ, используя для этого разложение (2×3) . Этот случай целесообразно рассмотреть на конкретном примере. Другие N читатель может проанализировать самостоятельно. Начнем с нумерации 30 отсчетов исходной матрицы сигнала:

Матрица $x(l, m)$

$$\begin{array}{llllll} 0 = (0, 0) & 1 = (0, 1) & 2 = (0, 2) & 3 = (0, 3) & 4 = (0, 4) & 5 = (0, 5) \\ 6 = (1, 0) & 7 = (1, 1) & 8 = (1, 2) & 9 = (1, 3) & 10 = (1, 4) & 11 = (1, 5) \\ 12 = (2, 0) & 13 = (2, 1) & 14 = (2, 2) & 15 = (2, 3) & 16 = (2, 4) & 17 = (2, 5) \\ 18 = (3, 0) & 19 = (3, 1) & 20 = (3, 2) & 21 = (3, 3) & 22 = (3, 4) & 23 = (3, 5) \\ 24 = (4, 0) & 25 = (4, 1) & 26 = (4, 2) & 27 = (4, 3) & 28 = (4, 4) & 29 = (4, 5) \end{array}$$

Теперь рассчитаем шесть пятиточечных ДПФ всех столбцов; умножив элементы полученной матрицы на поворачивающие множители, получим новую матрицу $h(s, m)$:

Матрица $h(s, m)$

$$\begin{array}{llllll} h(0, 0) & h(0, 1) & h(0, 2) & h(0, 3) & h(0, 4) & h(0, 5) \\ h(1, 0) & h(1, 1) & h(1, 2) & h(1, 3) & h(1, 4) & h(1, 5) \\ h(2, 0) & h(2, 1) & h(2, 2) & h(2, 3) & h(2, 4) & h(2, 5) \\ h(3, 0) & h(3, 1) & h(3, 2) & h(3, 3) & h(3, 4) & h(3, 5) \\ h(4, 0) & h(4, 1) & h(4, 2) & h(4, 3) & h(4, 4) & h(4, 5) \end{array}$$

Далее, вместо того чтобы непосредственно вычислять пять шеститочечных ДПФ, представим каждую строку, содержащую шесть элементов, в виде матрицы размером (2×3) . Так, первые две строки матрицы $h(s, m)$ переписываются следующим образом:

Строка 1

$$\begin{array}{lll} h(0, 0) & h(0, 1) & h(0, 2) \\ h(0, 3) & h(0, 4) & h(0, 5) \end{array}$$

Строка 2

$$\begin{array}{ccc} h(1, 0) & h(1, 1) & h(1, 2) \\ h(1, 3) & h(1, 4) & h(1, 5) \end{array}$$

Таким образом, искомые шеститочечные ДПФ можно найти, вычисляя ДПФ столбцов, содержащих по два элемента, умножая результаты ДПФ на поворачивающие множители и затем рассчитывая ДПФ строк, содержащих по три элемента. Вычисление заканчивается, когда таким образом будут преобразованы все пять матриц размера (2×3) .

Перечислим все операции, требуемые для выполнения 30-точечного ДПФ с использованием разложения $(5 \times 2 \times 3)$:

- 1) 6 пятиточечных преобразований;
- 2) 30 умножений на поворачивающие множители;
- 3) 15 двухточечных преобразований;
- 4) 30 умножений на поворачивающие множители;
- 5) 10 трехточечных преобразований.

Используя этот пример, можно рассчитать, сколько операций необходимо для общего случая $N = PLM$:

- 1) LM P -точечных преобразований;
- 2) LMP умножений на поворачивающие множители;
- 3) MP L -точечных преобразований;
- 4) LMP умножений на поворачивающие множители;
- 5) LP M -точечных преобразований.

Чтобы оценить уменьшение объема вычислений за счет использования алгоритма БПФ, рассмотрим несколько частных случаев. Прежде всего положим $N = LM$, где L и M — простые числа, большие 2. Из формулы (6.2) следует, что M -точечное ДПФ требует M^2 «операций», состоящих из умножения и сложения в комплексной форме. Учитывая это, получим следующее общее число операций для разложения вида $N = LM$:

$$C_2 = ML^2 + LM^2 + LM = LM(L + M + L) = N(M + L + 1). \quad (6.34)$$

Член LM учитывает количество умножений на поворачивающие множители, выполняемых между преобразованиями строк и столбцов (строго говоря, эти LM действий состоят только из комплексного умножения и поэтому требуют несколько *меньше* времени, чем вся «операция»). Ясно, что при выполнении N -точечного ДПФ самым громоздким прямым методом потребовалось бы N^2 операций. Таким образом, с помощью формулы (6.34) можно оценить выигрыш во времени вычислений, характерный для преобразования с использованием разложения. Если, например, $N = 55$ ($L = 11$, $M = 5$), то C_2 относится к числу операций при прямом расчете ДПФ как 17:55. Очевидно, что с ростом N выигрыш увеличивается. Например, если $N = 15$, $L = 5$, $M = 3$, то C_2 будет относиться к числу операций при прямом расчете ДПФ как 9:15.

Рассмотрим теперь случай, когда N можно разложить на три простых целых сомножителя, т. е. $N = PML$. Нетрудно показать, что в этом случае число операций равно

$$C_3 = P^2LM + PML^2 + PLM^2 + 2PLM = N(P + L + M + 2). \quad (6.35)$$

Например, при $P = 3$, $L = 5$, $M = 7$ C_3 относится к числу операций при прямом расчете ДПФ как 17:105, т. е. достигнуто уменьшение числа операций почти на порядок. Чтобы оценить выигрыш в общем случае, изменим обозначения и положим $N = N_1N_2N_3, \dots, N_J$. Тогда

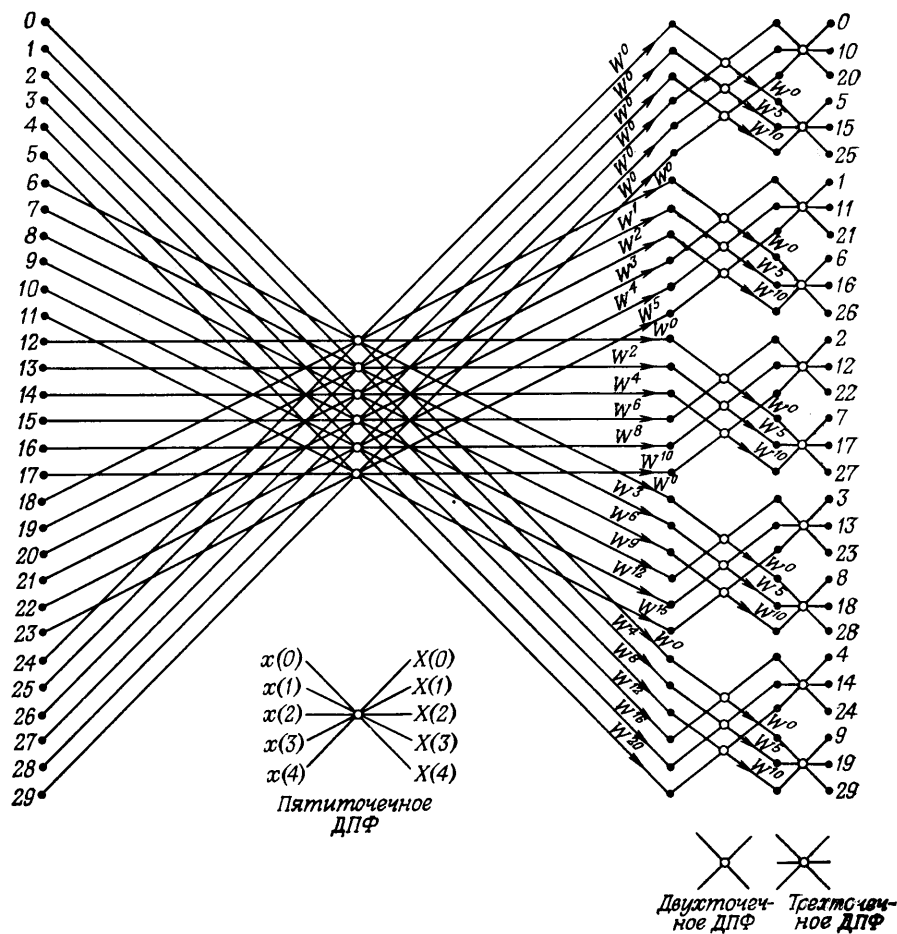
$$C_J = N \left(\sum_{i=1}^J N_i + J - 1 \right). \quad (6.36)$$

С помощью полученных формул можно достаточно точно определить величину выигрыша при условии, что все числа N_i простые (и не равные 2), так как только в этом случае общее число операций при N_i -точечном преобразовании равно N_i^2 . Если же числа N_i не являются простыми или $N_i = 2$, необходимо быть очень осторожными в оценках. Например, как было показано выше, при двухточечном ДПФ (т. е. $N_i = 2$) умножения вообще не используются. Это же справедливо и для $N_i = 4$. При $N_i = 8$ число умножений существенно меньше 64. В связи с этим при разложении N на такие сомножители, как 2, 4 или 8, полученные выше формулы непригодны. Рассмотрим, например, N , равное степени 2, скажем $N = 2^J$. Тогда член формулы (6.36), учитывающий двухточечные ДПФ, включает только комплексные сложения и вычитания, тогда как член $(J - 1)$ учитывает умножения на поворачивающие множители. В этом случае формула (6.36) становится весьма неудобной для оценок, поскольку приходится сопоставлять затраты времени на умножение и на сложение.

Чтобы получить направленный граф (подобный графам на фиг. 6.3 и 6.11) для самого общего случая разложения, необходимо расширить круг обозначений, введенных на фиг. 6.3 и 6.11. Это сделано на фиг. 6.13, где 30-точечный массив представлен в виде двумерного массива, содержащего 5 строк и 6 столбцов, со следующими элементами (числа обозначают номера элементов исходного массива):

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29

На первом этапе БПФ выполняются 6 пятиточечных ДПФ, так что незачерненные кружки на фиг. 6.13 обозначают полные ДПФ,



Фиг. 6.13. Направленный граф 30-точечного БПФ, основанного на последовательных прореживаниях за счет представления одномерных массивов двумерными.

размер которых равен числу линий, входящих в кружок и выходящих из него. Узлы направленного графа обозначают регистры, содержащие входные и выходные отсчеты ДПФ. Все выходные отсчеты ДПФ умножаются на поворачивающие множители; для обозначения этой операции введено 30 стрелок, около которых записаны значения коэффициентов W . Следующий этап состоит в вычислении ДПФ всех строк. Поскольку строки содержат по 6 элементов, каждая из них может быть представлена в виде матрицы с 2 строками и 3 столбцами. В примере, приведенном на фиг. 6.13, каж-

дая шеститочечная строка преобразуется с помощью: 1) трех двухточечных ДПФ; 2) умножений на поворачивающие множители; 3) двух трехточечных ДПФ.

Отметим также следующую особенность обозначения. Строго говоря, каждая линия, выходящая из незачерненного кружка, должна иметь свою стрелку с коэффициентом W . Если, однако, учесть, что $W^0 = 1$, то такой поворачивающий множитель можно опустить. Во всех приводимых направленных графах (в том числе и на фиг. 6.3 и 6.11) авторы по своему усмотрению решали, ввести или опустить W^0 . При нахождении поворачивающих множителей для второго этапа графа на фиг. 6.13 необходимо помнить, что для него коэффициент W равен W_{30}^5 , поэтому матрица поворачивающих множителей для каждой из прореживаемых строк исходной матрицы, содержащей 5 строк и 6 столбцов, имеет вид

$$\begin{matrix} W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^5 & W^{10} \end{matrix}$$

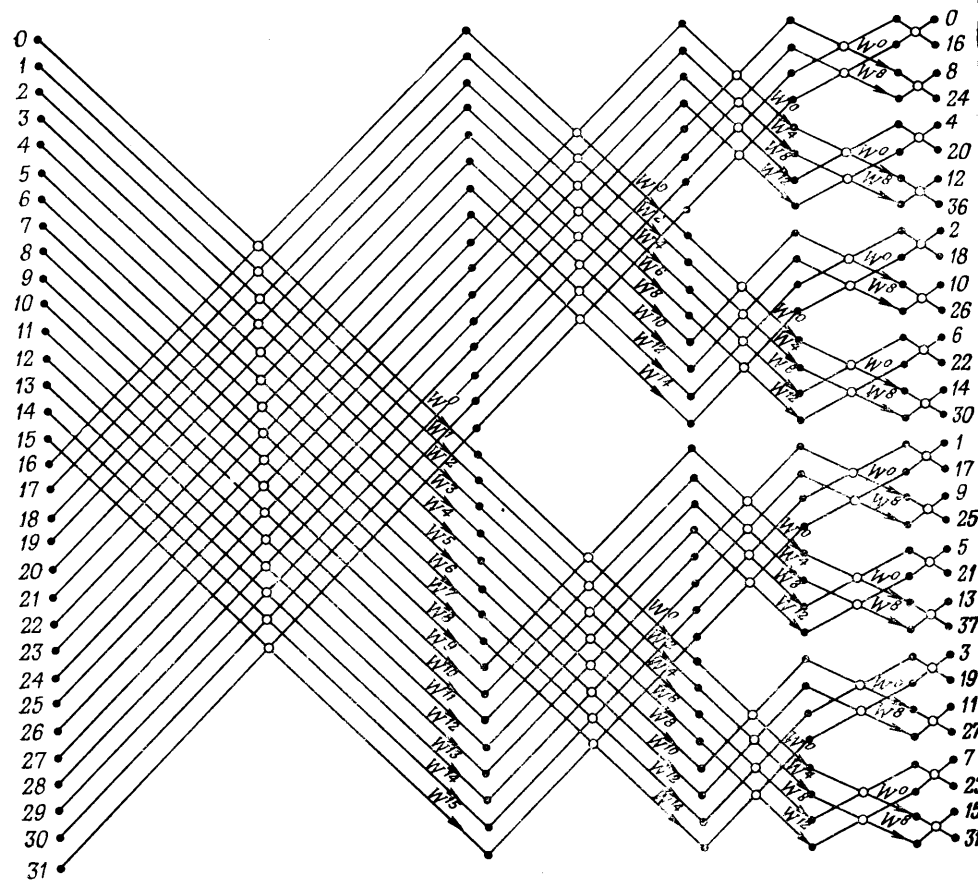
В заключение осталось рассмотреть характер перестановки данных на фиг. 6.13. Если бы весь массив из 30 отсчетов был преобразован в матрицу размером (5×6) (и никак иначе), то строки и столбцы матрицы результатов оказались бы просто переставленными относительно исходной матрицы. Так как в действительности каждая строка также прореживалась, то это привело к дополнительной перестановке результатов. Окончательный порядок следования результатов ДПФ показан на фиг. 6.13.

6.9. Алгоритмы БПФ с основанием 2

В настоящее время значительно чаще используются алгоритмы БПФ не со смешанным, а с фиксированным основанием. В последнем случае значительно проще проводить анализ, программировать и разрабатывать специализированные устройства. В принципе разницы между алгоритмами со смешанным и фиксированным основаниями нет. Действительно, если $N = r^m$, где m — целое, то сначала N представляется в виде произведения $r \times N/r$, затем N/r представляется как $r \times N/r^2$ и т. д. Например, если $N = 32$ и $r = 2$, то можно поступить следующим образом:

1. Пусть отсчеты 0 — 15 составляют первую строку матрицы размером (2×16) , а отсчеты 16 — 31 составляют ее вторую строку. Начнем с выполнения двухточечных ДПФ всех 16 столбцов, как показано на фиг. 6.14, а результаты затем умножим на матрицу поворачивающих множителей, также содержащую 2 строки и 16 столбцов.

2. Пусть каждая строка, подлежащая преобразованию, представляется в виде матрицы, составленной из 2 строк и 8 столбцов. Вычислим по восемь ДПФ столбцов каждой из обеих матриц раз-



Фиг. 6.14. Направленный граф 32-точечного БПФ с замещением по основанию 2.

мером (2×8) и умножим их элементы на поворачивающие множители, рассчитываемые с помощью множителя W^2 , матрица которых имеет размер (2×8). Полученный результат будет соответствовать второму этапу алгоритма, граф которого показан на фиг. 6.14.

3. Аналогично каждую из строк, содержащих по восемь элементов, представим в виде матрицы размером (2×4), а затем каждую из строк, содержащих по четыре элемента, — в виде матрицы (2×2), которая в данном случае является конечной целью.

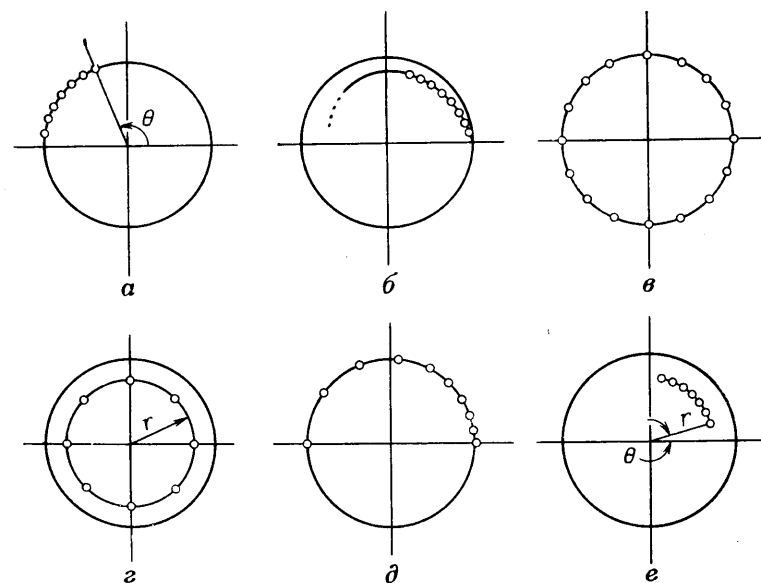
В качестве упражнения читателю предлагается выполнить 32-точечное ДПФ с прореживанием по времени, используя двумерный подход (или какой-либо другой).

На этом заканчивается рассмотрение алгоритмов БПФ, проведенное с целью дальнейшего их использования главным образом

в задачах спектрального анализа. Поскольку применение ДПФ в последующих разделах этой главы было бы не совсем обосновано без хорошего понимания алгоритмов БПФ, последние изложены достаточно подробно, хотя, конечно, и не исчерпывающе. Дальнейшее изложение идей БПФ содержится в гл. 10, где будет описана аппаратная реализация алгоритмов БПФ.

6.10. Спектральный анализ в одной точке z -плоскости

Прежде чем приступить к измерению спектра сигнала, необходимо выяснить, что представляет собой анализируемый сигнал и что именно нужно узнать о сигнале. В общем случае задачу спектрального анализа можно рассматривать как задачу вычисления z -преобразования модифицированного сигнала в некоторой области на z -плоскости. На фиг. 6.15 показаны шесть возможных областей на z -плоскости, которые с точки зрения спектрального анализа сигнала могут представлять интерес. На фиг. 6.15, *a*, *b* и *d* эти области представляют собой совокупности точек на единичной окружности в z -плоскости. В трех остальных случаях измерения также проводятся в отдельных точках, которые, однако,



Фиг. 6.15. Несколько различных вариантов расположения спектральных отсчетов в z -плоскости.

не лежат на единичной окружности. Следует помнить, что теоретически спектр можно измерять в любой точке z_1 на z -плоскости. Однако практически при таких измерениях нужно учитывать время вычисления и эффекты, обусловленные конечной длиной регистров памяти. С учетом сказанного обобщенный спектр сигнала $x(n)$ можно определить как

$$S_n(z_1) = x(n) + x(n-1)z_1^{-1} + x(n-2)z_1^{-2} + \dots + x(n-N+1)z_1^{-(N-1)} \quad (6.37)$$

или

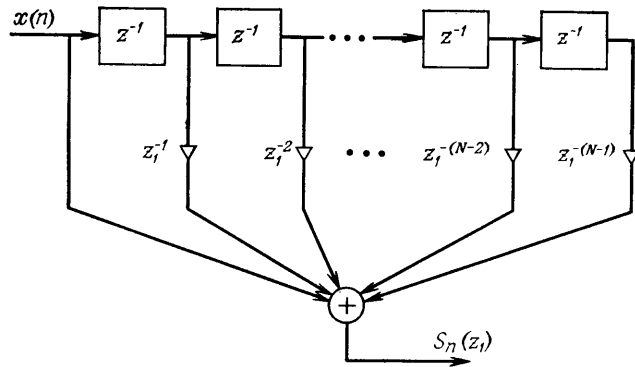
$$S_n(z_1) = \sum_{m=n-N+1}^n x(m)z_1^{-(n-m)}, \quad (6.38)$$

где N — число отсчетов, по которым находится оценка спектра.

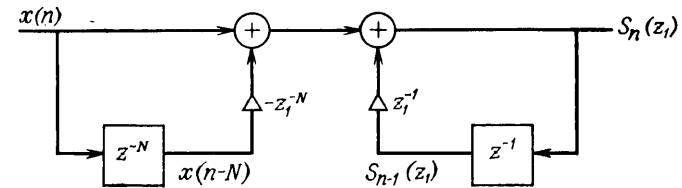
Во многих приложениях, в частности когда спектр сигнала меняется во времени, приходится измерять $S_n(z_1)$ для последовательных значений n , т. е. значения $S_0(z_1)$, $S_1(z_1)$, $S_2(z_1)$ и т. д. Такой способ измерений называют *скользящим* спектральным измерением; оно обеспечивается за счет смещения на один отсчет вперед временного окна (содержащего N отсчетов) и повторения измерения. Анализ формул (6.37) и (6.38) показывает, что скользящее спектральное измерение в одной точке $z = z_1$ эквивалентно фильтрации КИХ-фильтром с импульсной характеристикой вида

$$h(n) = z_1^{-n}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (6.39)$$

На фиг. 6.16 изображена схема фильтра для вычисления прямой свертки, обеспечивающая спектральные измерения согласно формуле (6.37).



Фиг. 6.16. КИХ-фильтр для скользящего спектрального анализа в одной точке z_1 .



Фиг. 6.17. Рекуррентный метод скользящего спектрального анализа.

Проанализировав выражения для двух последовательных спектральных измерений $S_{n-1}(z_1)$ и $S_n(z_1)$, можно получить следующую рекуррентную формулу:

$$S_n(z_1) = z_1^{-1}S_{n-1}(z_1) + x(n) - z_1^{-N}x(n-N). \quad (6.40)$$

Схема вычислений по формуле (6.40) изображена на фиг. 6.17. Отметим, что блоки, для обозначения которых на фиг. 6.16 и 6.17 использована буква z , представляют собой элементы задержки, тогда как величины, равные степеням z_1 , представляют коэффициенты умножителей (в общем случае они являются комплексными). Входные сигналы и промежуточные результаты фильтра также могут быть комплексными. Из фиг. 6.17 следует, что для обеспечения скользящих спектральных измерений сигнала в одной точке $z = z_1$ достаточно выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет.

6.11. Спектральный анализ с применением БПФ

До сих пор рассматривалось спектральное измерение в одной точке на z -плоскости. Чтобы найти спектр сразу во многих точках, например z_1 , z_2 , z_3 и т. д., нужно повторять описанные выше вычисления для каждого нового значения z . На практике чаще всего представляет интерес поведение спектра в некоторой заданной довольно большой совокупности точек на z -плоскости. И в этом случае главная задача состоит в том, чтобы выполнить измерение спектра, используя минимальное количество операций. Поэтому метод, описанный в предыдущем разделе, в практических задачах спектрального анализа обычно не применяется, хотя его и можно использовать для иллюстрации основных свойств спектрального анализа.

В подавляющем большинстве приложений задача измерения спектра сводится к нахождению значений z -преобразования конечной реализации сигнала для большого числа точек, равномерно распределенных по окружности единичного радиуса. Измерения такого типа соответствуют вычислению ДПФ конечной последовательности и обычно наиболее эффективно выполняются с приме-

нением описанных выше алгоритмов БПФ. Иногда желательно проводить измерения спектра, вычисляя значения z -преобразования последовательности в равноотстоящих точках, расположенных *внутри* единичной окружности. Так, на фиг. 6.15, *г* представлен случай, когда все точки равномерно распределены по окружности радиуса r . Такое преобразование также можно получить с помощью ДПФ. Выполняемое при этом измерение равно

$$S [re^{j(2\pi/N)k}] = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{[x(n)r^{-n}]}_{\hat{x}(n)} e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (6.41)$$

Оно соответствует ДПФ последовательности

$$\hat{x}(n) = x(n)r^{-n}, \quad (6.42)$$

поэтому в данном случае спектральный анализ сводится к предварительному умножению массива сигнала на r^{-n} и последующему выполнению БПФ.

6.12. Некоторые характеристики спектрального анализа

Двумя наиболее важными характеристиками спектрального анализа являются:

- 1) количество частот, на которых желательно измерить спектр;
- 2) «равнорешающая способность» измерения спектра.

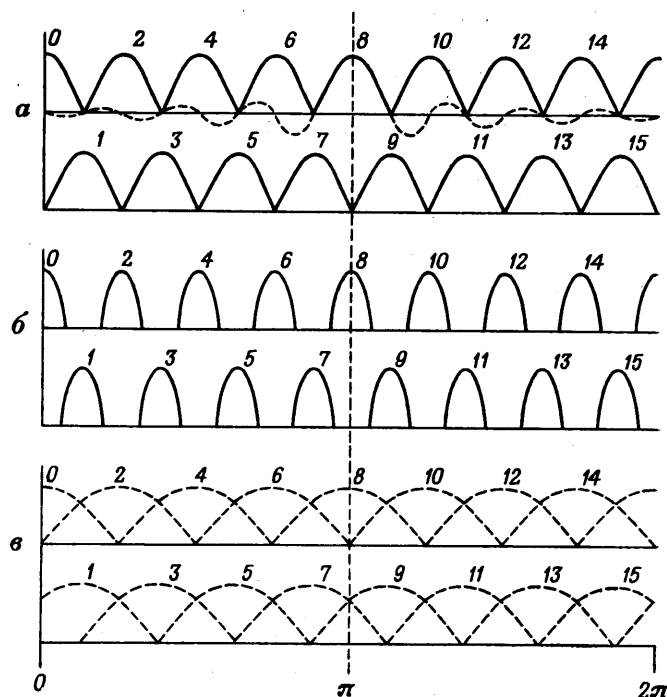
Для анализа обеих характеристик лучше всего использовать отмеченную выше эквивалентность между спектральным измерением и фильтрацией.

Чтобы показать, какие факторы влияют на параметры спектрального анализа, рассмотрим пример, представленный на фиг. 6.15, *г*, когда необходимо найти спектр сигнала в 16 точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Пусть число N отсчетов сигнала, используемых при измерении спектра, равно 16. Спектральный анализ, удовлетворяющий этим условиям, может быть выполнен двумя эквивалентными способами: либо с помощью 16-точечного БПФ, либо с помощью гребенки из 16 фильтров. Импульсная характеристика k -го фильтра, обеспечивающего измерение спектра в точке $z_k = e^{j(2\pi k/N)}$, равна

$$h(n) = e^{-j(2\pi kn/N)}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (6.43)$$

так что ее z -преобразование имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi kn/N)} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}e^{-j(2\pi k/N)}}. \quad (6.44)$$



Фиг. 6.18. Гребенка фильтров, эквивалентная скользящему БПФ с размером, равным (а), б) и меньшим (в) требуемого числа спектральных отсчетов.

Вычислив значения $H(z)$ на единичной окружности, получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega[(N-1)N/2]} e^{j(\pi k/N)} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} = \quad (6.45)$$

$$= e^{-j\omega[(N-1)/2]} e^{j(\pi k/N)} f_N(\omega, k). \quad (6.46)$$

На фиг. 6.18, *а* изображены графики функций $f_N(\omega, k)$ для случая, соответствующего фиг. 6.15, *г*, т. е. для 16 точек, равномерно распределенных на единичной окружности. Частотные характеристики фильтров с четными номерами k показаны на фиг. 6.18, *а* вверху, а с нечетными значениями k — на фиг. 6.18, *а* внизу. Чтобы избежать путаницы, для всех фильтров, за исключением 8-го, изображены лишь главные лепестки. Видно, что скользящее БПФ эквивалентно довольно грубому набору фильтров с относительно большими боковыми лепестками и существенным перекрытием между соседними фильтрами.

Предположим теперь, что число отсчетов сигнала L больше числа спектральных отсчетов N . Пусть, например, $L = 32$ и

$N = 16$. Самый простой способ выполнения таких спектральных измерений состоит в том, что вычисляется 32-точечное скользящее БПФ и просто отбрасываются измерения, соответствующие фильтрам, следующим через один. В результате получится набор фильтров с характеристиками, изображенными на фиг. 6.18, б.

Пусть $N = 16$, но имеется только $L = 8$ отсчетов сигнала. В этом случае спектр можно найти, добавив к L отсчетам сигнала $N - L$ нулевых отсчетов, так чтобы общее число преобразуемых отсчетов равнялось количеству спектральных отсчетов, и затем вычислив L -точечное БПФ. Результирующие частотные характеристики фильтров для случая $L = 8$, $N = 16$ приведены на фиг. 6.18, в. Число каналов эквивалентной гребенки фильтров осталось прежним, но каждый фильтр стал шире. Таким образом, главное изменение частотной характеристики состоит в ухудшении разрешающей способности по частоте.

Метод выполнения анализа при $L = 2N$ становится очевидным, если обратиться к направленному графу БПФ (см., например, фиг. 6.14). Видно, что выходные отсчеты с четными номерами располагаются в верхней половине графа. Это означает, что в алгоритме БПФ, предназначенном для получения только четных отсчетов спектра, достаточно лишь частично обработать все L отсчетов, чтобы получить верхнюю половину выходных отсчетов первого этапа БПФ. Как видно из фиг. 6.14, только эта половина отсчетов дает все четные коэффициенты ДПФ. Этот подход можно развивать дальше, отметив, например, что восемь верхних выходных коэффициентов дают каждый четвертый коэффициент ДПФ, причем их можно определить, выполнив половину операций на первом этапе, половину — на втором, а также восьмиточечное БПФ полученных на втором этапе восемь отсчетов. Пусть в общем случае число отсчетов сигнала L равно

$$L = NM, \quad (6.47)$$

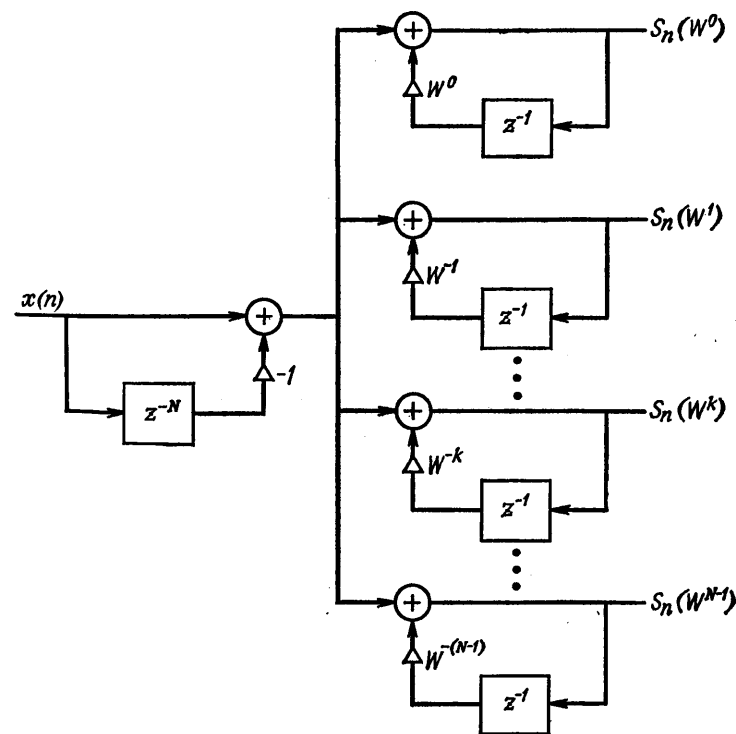
где N — требуемое число спектральных отсчетов, а M — целое число, большее единицы. Искомое преобразование равно

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(n+mN) \right] e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (6.48)$$

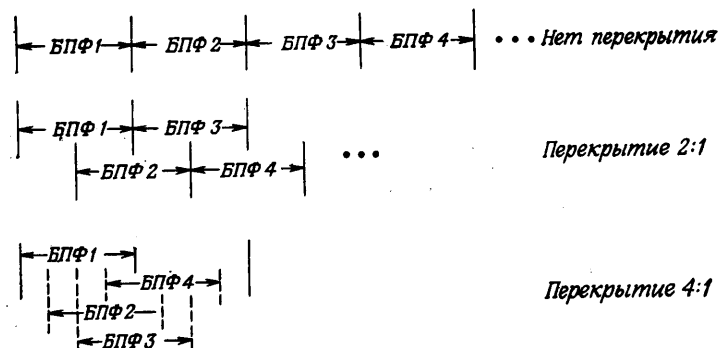
Из этой формулы следует, что фактически при вычислении спектра производится предварительное суммирование входных отсчетов, равноотстоящих друг от друга на N точек, после чего вычисляется ДПФ образованной новой последовательности. Смысл этой операции становится понятным, если вспомнить, что дискретизация в частотной области (ее и нужно было получить в данном случае) соответствует наложению во временной области, которое описывается формулой (6.48).

6.13. Соотношение между «скачущим» БПФ и гребенкой фильтров

Выше было показано, что скользящее БПФ в точности эквивалентно анализу с использованием гребенки фильтров; поэтому возникает вопрос, какой из этих двух методов эффективнее с точки зрения объема вычислений. Не вдаваясь в детали, отметим, что при скользящем БПФ для каждого входного отсчета приходится вычислять полное БПФ, т. е. $(N/2)\log_2 N$ базовых операций на отсчет. При анализе с помощью гребенки фильтров, состоящей из гребенчатого фильтра, к выходу которого подключена группа цифровых резонаторов (фиг. 6.19), число комплексных умножений на отсчет равно N . Таким образом, в большинстве случаев, представляющих интерес, гребенка фильтров оказывается эффективнее скользящего БПФ, поскольку в последнем случае не используются возможности итеративного расчета ДПФ. Однако ниже будет показано, что при определенных условиях алгоритм БПФ может



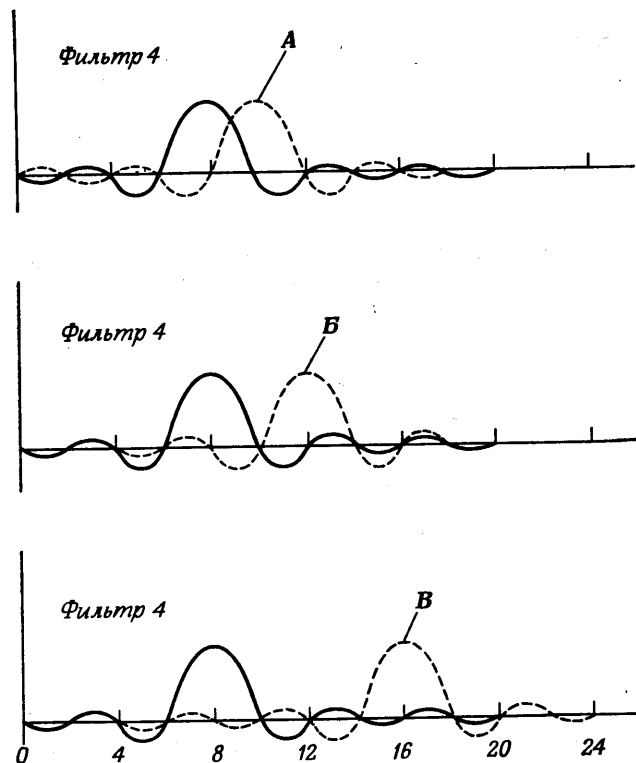
Фиг. 6.19. Анализатор спектра в виде гребенки фильтров.



Фиг. 6.20. Три примера «скачущих» БПФ.

оказаться эффективнее эквивалентной ему гребенки фильтров. Для стандартного метода, позволяющего использовать БПФ для приближенного вычисления текущего спектра, характерно то, что интервал вычисления БПФ не скользит, а «скачет». Несколько вариантов скачущего БПФ приведено на фиг. 6.20, где представлены три возможных способа размещения интервалов вычисления БПФ: с шагом, равным размеру БПФ, половине и четверти размера БПФ.

Ясно, что эффективность скачущего БПФ растет пропорционально величине «скачка», однако важно представить, как такой подход влияет на характер спектральных измерений. Отметим прежде всего, что скачущие измерения являются всего лишь отсчетами скользящих измерений. Следовательно, эквивалентный результат можно было бы получить, отбрасывая часть отсчетов на выходах гребенки фильтров. Эффекты такого прореживания можно проанализировать, используя стандартную трактовку наложения частот. На фиг. 6.21 приближенно представлены эффекты наложения частотных характеристик эквивалентных фильтров для трех случаев скачущего БПФ, приведенных на фиг. 6.20. Отметим, что при отсутствии перекрытия интервалов вычисления БПФ наблюдается значительное наложение частотных характеристик фильтров, что может привести к серьезным искажениям спектральных измерений. При перекрытии 2:1 и особенно 4:1 эффект наложения значительно ослабляется, хотя и остается довольно заметным. На практике для борьбы с наложениями используется метод взвешивания (он будет рассмотрен в следующем разделе), который позволяет уменьшить уровень боковых лепестков и тем самым ослабить эффекты наложения. В качестве приближенной оценки этого эффекта можно использовать уровень наложенного спектра (он изображен пунктирной линией) в пределах главного лепестка фильтра.

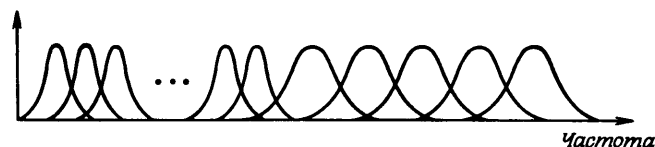


Фиг. 6.21. Эффекты наложения при спектральных измерениях с использованием скачущего БПФ или при прореживании выходных отсчетов гребенки фильтров.

— наложение на частотную характеристику 4-го фильтра при отсутствии перекрытия; B — наложение на частотную характеристику при перекрытии 2:1; B — наложение на частотную характеристику при перекрытии 4:1.

6.14. Использование окон при спектральном анализе

В разд. 6.10, а затем и в разд. 6.13 было показано, что измерение спектра (определяемое через z -преобразование) эквивалентно величине, получаемой на выходе одного фильтра (при спектральных измерениях в одной точке) или гребенки фильтров (при равномерном распределении спектральных отсчетов по единичной окружности). Согласно введенному определению, речь идет о вполне конкретном фильтре с заданным спектральным разрешением. Меняя число отводов фильтра (которое эквивалентно числу членов, используемых при расчете z -преобразования), можно изменять эф-



Фиг. 6.22. Анализатор спектра с двумя различными частотными разрешениями.

эффективную полосу фильтра; однако до сих пор ничего не говорилось о том, каким образом можно изменить форму частотной характеристики фильтра, чтобы, например, подавить нежелательный шум и сигналы вне его полосы пропускания. Этот пробел восполняется путем введения весовой последовательности (окна) $w(n)$, на которую почленно умножается заданная последовательность, так что спектр становится равным

$$\hat{S}_n(z_1) = x(n)w(0) + x(n-1)w(1)z_1^{-1} + \dots + x(n-N+1)w(N-1)z_1^{-(N-1)} \quad (6.49)$$

или

$$\hat{S}_n(z_1) = \sum_{m=n-N+1}^n x(m)w(n-m)z_1^{-(n-m)}. \quad (6.50)$$

Формула (6.49) аналогична формуле (6.37), но входная последовательность взвешена. Чтобы получить эквивалентный фильтр, следует z_1^{-j} на фиг. 6.16 заменить на $w(j)z_1^{-j}$. Поскольку выбор окна $w(n)$ произволен, результаты модифицированного спектрального измерения, согласно формуле (6.49) и обобщенной фильтрации, полностью эквивалентны.

С точки зрения вычислений использование окна наиболее удобно, когда выполняется полный спектральный анализ с применением БПФ. Если, как это практически часто бывает, все фильтры гребенки идентичны (только смещены по частоте), умножение отрезка сигнала на весовую функцию (всего требуется N умножений) позволяет сформировать нужную частотную характеристику фильтров. Обработка полученного произведения с помощью БПФ завершает спектральный анализ.

Если фильтры анализатора спектра должны обеспечить сразу два различных спектральных разрешения (фиг. 6.22), то, вероятно, проще всего дважды находить БПФ, используя различные окна. Существуют, однако, и другие приемы. Особенно интересен метод, основанный на эквивалентности между умножением во временной области и сверткой в частотной области. Так, например, умножение на весовую функцию можно заменить взвешенным суммированием нескольких соседних (по частоте) значений $\hat{S}_n(z)$.

Анализ окон был проведен в гл. 3. Там же были рассмотрены другие методы расчета фильтров, часто оказывающиеся более эффективными. Здесь важно отметить, что значение того или иного метода расчета фильтра определяется в значительной степени тем, как этот фильтр конкретно реализуется. Например, если нужно построить анализатор спектра, используя для этой цели гребенку КИХ-фильтров, реализуемых нерекурсивно, то можно рассчитать каждый из фильтров гребенки с применением любого критерия, и эффективность спектральных измерений с точки зрения объема вычислений при этом не ухудшится. Так, может оказаться, что лучше всего найти коэффициенты фильтра, используя аппроксимацию с равновеликими пульсациями. В случае применения КИХ-фильтров с рекурсивной схемой (такая гребенка фильтров показана на фиг. 6.19) наиболее подходящим оказывается метод частотной выборки, который сводится ко взвешенному суммированию выходных отсчетов нескольких соседних фильтров с тем, чтобы частотная характеристика имела достаточно хорошую форму. Но наибольший интерес с точки зрения реализации представляет схема спектральных измерений со скачущим БПФ. В этом случае наиболее эффективный метод формирования частотных характеристик эквивалентных фильтров состоит во взвешивании массива сигнала и последующем выполнении БПФ. Необходимо также отметить, что при разработке анализатора спектра на базе БПФ можно использовать суммирование взвешенных выходных отсчетов БПФ, что эквивалентно весовой обработке на входе, или же можно использовать и взвешивание во временной области, и сглаживание в частотной области, чтобы получить анализатор спектра с переменным разрешением.

Как будет показано в разд. 5 гл. 12, алгоритм БПФ может быть использован для приближенного построения гребенки БИХ-фильтров (типа фильтров Баттерворта, Бесселя или эллиптических). Трудность расчета такой гребенки состоит в том, что в качестве фильтра-прототипа всех фильтров гребенки, имеющих одинаковую полосу, должен быть использован один и тот же БИХ-фильтр нижних частот. В этом случае достаточно использовать идеи, изложенные в разд. 6.12 в сочетании с методом взвешивания, описанным в данном разделе. Предположим, например, что требуется по $L = MN$ отсчетам сигнала найти N спектральных отсчетов. Если величина L настолько велика, что импульсная характеристика БИХ-фильтра, которая имеет бесконечную длину, может быть аппроксимирована конечной импульсной характеристикой длины L , то выполнение спектральных измерений сведется к взвешиванию входной последовательности с использованием этой аппроксимирующей L -точечной характеристики и расчету части коэффициентов БПФ по методике, описанной в разд. 6.12.

6.15. Измерение спектра в ограниченном секторе z-плоскости с использованием БПФ

Пусть заданы L отсчетов сигнала, и необходимо найти z -преобразование в точках, расположенных на дуге окружности в z -плоскости. Положим для определенности, что $N = 64$, а количество искомым спектральных отсчетов, положение которых показано на фиг 6.23, равно 16. В данном случае выражение для z -преобразования имеет следующий вид:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \quad k=0, 1, \dots, 15, \quad (6.51)$$

где

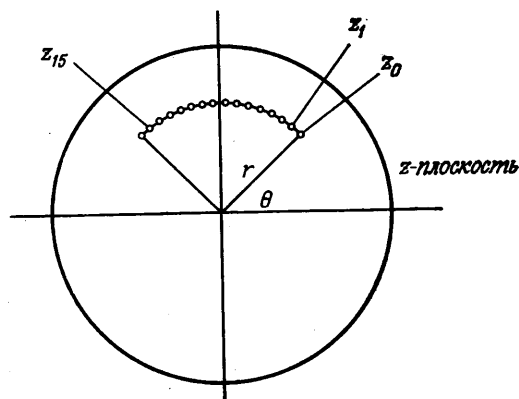
$$z_k = r e^{j[\theta + (2\pi k/N)]}, \quad (6.52)$$

так что

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) r^{-n} e^{-jn\theta}] e^{-j(2\pi nk/N)}, \quad k=0, 1, \dots, 15. \quad (6.53)$$

Из формулы (6.53) следует, что после предварительного умножения $x(n)$ на $r^{-n} e^{-jn\theta}$ задача расчета z -преобразования сводится к задаче спектральных измерений на дуге единичной окружности, которая изображена на фиг. 6.24.

Для эффективности расчета спектра методом БПФ точки z_k следует перераспределить таким образом, чтобы они равномерно располагались на единичной окружности. Этого можно достичь, прореживая отсчеты сигнала и комбинируя затем получающиеся спектры. Перечислим последовательность выполняемых при этом операций:



Фиг. 6.23. Круговой сектор в z -плоскости.

1. Вычислить 16-точечное БПФ отсчетов сигнала с номерами 0, 4, 8, ..., 60, что дает $X_0(k)$.

2. Вычислить 16-точечное БПФ отсчетов с номерами 1, 5, 9, ..., 61, что дает $X_1(k)$.

3. Повторить то же для отсчетов 2, 6, 10, ..., 62 и 3, 7, 11, ..., 63, что дает $X_2(k)$ и $X_3(k)$ соответственно.

4. Сложить коэффициенты БПФ по формуле

$$X(k) = X_0(k) + W_N^k X_1(k) + W_N^{2k} X_2(k) + W_N^{3k} X_3(k), \quad k=0, 1, \dots, 15,$$

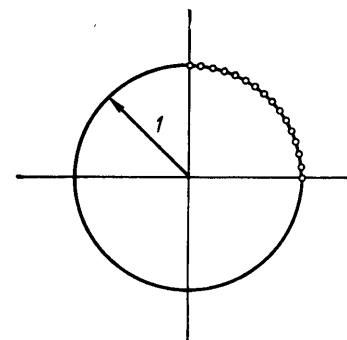
где $N = 64$, $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$.

Отметим, что этот же результат можно получить иначе, вычислив 64-точечное БПФ и взяв первые 16 коэффициентов БПФ. В этом случае потребовалось бы выполнить $(N/2)\log_2 N = 192$ базовые операции, тогда как при использовании четырех 16-точечных преобразований их нужно было бы 128. Таким образом, в зависимости от параметров системы можно использовать по крайней мере два различных метода вычисления спектра вдоль дуги в z -плоскости, изображенной на фиг. 6.23.

В последующих разделах будут описаны два алгоритма расчета z -преобразования конечной последовательности вдоль определенного контура на z -плоскости. Один из них, называемый алгоритмом Блюстейна, дает способ вычисления ДПФ N -точечной последовательности с помощью весовой обработки выходных отсчетов на выходе ЛЧМ-фильтра (его импульсная характеристика имеет вид колебания с линейной частотной модуляцией). Второй алгоритм, называемый z -преобразованием с использованием ЛЧМ-фильтрации, показывает, как z -преобразование конечной последовательности вдоль определенного контура на z -плоскости может быть выражено через свертку; следовательно, оно может быть получено методом быстрой свертки.

6.16. Алгоритм Блюстейна

Алгоритм БПФ позволяет существенно уменьшить время вычисления N -точечного ДПФ лишь при условии, что число N имеет много сомножителей. Однако существуют и другие эффективные алгоритмы расчета ДПФ последовательностей, также требующие выполнения порядка $N \log N$ операций. К ним относится и алго-



Фиг. 6.24. Преобразование контура, изображенного на фиг. 6.23, в дугу окружности с помощью предварительного умножения массива сигнала.

ритм Блустейна, применимый при любых N и основанный на цифровой фильтрации, эквивалентной вычислению ДПФ.

Рассмотрим цифровой фильтр с импульсной характеристикой $h(n)$ вида

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ e^{j\pi n^2/N}, & 0 \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & n \geq 2N. \end{cases} \quad (6.54)$$

Фильтр с такой импульсной характеристикой обычно называют ЛЧМ-фильтром из-за его сходства с аналоговым фильтром, согласованным с ЛЧМ-сигналом. При подаче на его вход N -точечной последовательности $x(n)$ [отсчеты $x(n)$ отличны от нуля только на интервале $0 \leq n \leq N-1$] выходная последовательность $y(n)$ на интервале $N \leq n \leq 2N-1$ будет равна

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) h(n-r), \quad N \leq n \leq 2N-1. \quad (6.55)$$

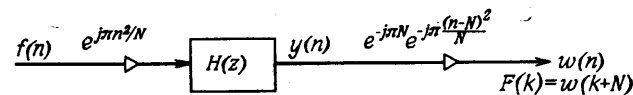
Введя в эту формулу новую переменную $k = n - N$, получим

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{r=0}^{N-1} x(r) h(k+N-r) = \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x(r) e^{j\pi(N)(k+N-r)^2}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \end{aligned} \quad (6.56)$$

откуда

$$y(k) = e^{j\pi(k^2/N)} e^{j\pi N} \sum_{r=0}^{N-1} \underbrace{[x(r) e^{j\pi(r^2/N)}]}_{w(r)} e^{-j(2\pi/N)rk}. \quad (6.57)$$

Из формулы (6.57) следует, что выходная последовательность $y(k)$ равна взвешенным (весовые коэффициенты равны $e^{j\pi k^2/N} e^{j\pi N}$) отсчетам ДПФ N -точечной последовательности вида $x(r) e^{j\pi r^2/N}$. Следовательно, чтобы получить N -точечное ДПФ последовательности $f(n)$, необходимо в соответствии с (6.57) подать на вход фильтра последовательность $x(n) = f(n) e^{-j\pi n^2/N}$, а отсчеты выходной последовательности $y(n)$ с номерами $N \leq n \leq 2N-1$ умножить на весовые коэффициенты $e^{-j\pi(n-N)^2/N} e^{-j\pi N}$. Все эти операции, необходимые для вычисления N -точечного ДПФ последовательности $f(n)$, представлены на фиг. 6.25. Для некото-



Фиг. 6.25. Вычисление N -точечного БПФ с помощью линейной фильтрации.

рых значений N (а именно если N равно квадрату целого числа) количество операций, используемых в цифровом фильтре, может быть пропорционально $N^{1.5}$.

Основной смысл алгоритма Блустейна состоит в том, что с его помощью показана возможность получения ДПФ последовательности посредством ее линейной фильтрации ЛЧМ-фильтром.

6.17. Алгоритм z -преобразования с использованием ЛЧМ-фильтрации

Алгоритм z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией является эффективным алгоритмом вычисления z -преобразования конечной последовательности вдоль определенного контура на z -плоскости. Поскольку и единичная окружность является одним из возможных контуров, этот алгоритм может быть также использован для эффективного вычисления ДПФ последовательности, хотя в этом случае эффективность не будет столь же высокой, как для алгоритма БПФ. В то же время многие ограничения, характерные для БПФ, в том числе требование, чтобы число отсчетов последовательности N раскладывалось на множители, при использовании алгоритма z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией устраняются. Таким образом, этот алгоритм можно использовать для эффективного вычисления ДПФ последовательности и при простых N .

Пусть заданная N -точечная последовательность $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$, имеет z -преобразование

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}. \quad (6.58)$$

ДПФ заданной последовательности $X(k)$ по определению равно

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (6.59)$$

Используя алгоритм z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией, можно найти z -преобразование в соответствии с формулой (6.58) вдоль контура более общего вида:

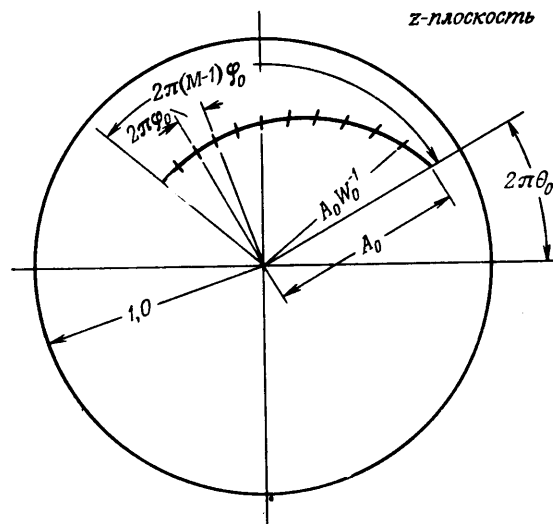
$$z_k = AW^{-k}, \quad k=0, 1, \dots, M-1. \quad (6.60)$$

Здесь M — произвольное целое число (не обязательно равное N), а A и W — произвольные комплексные числа, равные

$$A = A_0 e^{j2\pi\theta_0}, \quad (6.61)$$

$$W = W_0 e^{j2\pi\varphi_0}. \quad (6.62)$$

На фиг. 6.26 изображен контур в z -плоскости, удовлетворяющий формуле (6.60), и графически представлены величины A_0 , W_0 , θ_0 и φ_0 .



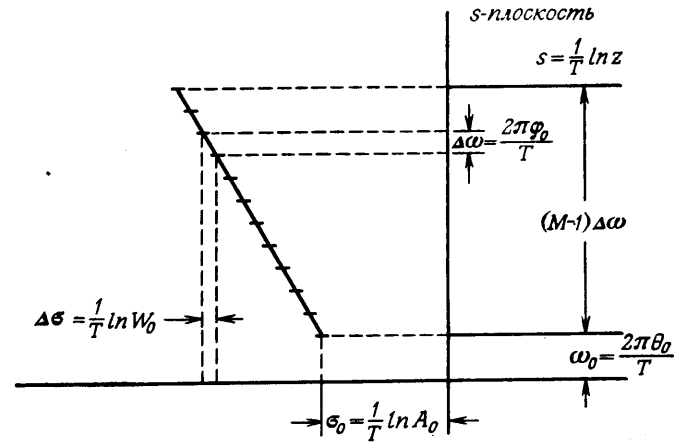
Фиг. 6.26. Контур расчета z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией в z -плоскости.

Как следует из фиг. 6.26 и формул (6.60)–(6.62), при $A = 1$, $M = N$ и $W = e^{-j2\pi/N}$ имеем $z_k = e^{-j2\pi k/N}$, т. е. точки вдоль контура будут соответствовать положениям спектральных отсчетов при вычислении N -точечного ДПФ последовательности.

Постоянная W_0 определяет скорость ухода контура внутрь окружности радиуса A_0 или наружу от нее. При $W_0 > 1$ контур будет скручиваться, а при $W_0 < 1$ — раскручиваться. Несколько проще интерпретировать скручивание контура в z -плоскости, рассматривая эквивалентный контур в s -плоскости. Действительно, введя подстановку $z = e^{sT}$, получим $z_0 = A = e^{s_0 T}$ или $s_0 = \ln A/T = \sigma_0 + j\omega_0 = \ln A_0/T + j2\pi\theta_0/T$. Далее, поскольку $z_k = e^{s_k T} = A W^{-k}$, то $s_k = \ln(A W^{-k})/T = \ln A/T + \ln(W^{-k})/T = s_0 - k \ln(W)/T$. На фиг. 6.27 в s -плоскости изображен контур, эквивалентный контуру, показанному на фиг. 6.26. Таким образом, спиралеобразные контуры в z -плоскости соответствуют прямым линиям в s -плоскости, причем скорость закручивания определяет угол наклона прямой в s -плоскости.

Покажем теперь, как эффективно рассчитывать z -преобразование последовательности, согласно формуле (6.58), вдоль контура (6.60). Обозначив через X_k искомые значения z -преобразования при $z = z_k$, т. е.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \quad (6.63)$$



Фиг. 6.27. Контур расчета z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией в s -плоскости.

и, учитывая формулу (6.60), находим

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (6.64)$$

Подстановка в формулу (6.64) выражения

$$nk = \frac{n^2 + k^2 - (k-n)^2}{2} \quad (6.65)$$

дает

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{[n^2 + k^2 - (k-n)^2]/2} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) A^{-n} W^{n^2/2}] (W^{k^2/2}) W^{-(k-n)^2/2} \quad (6.66)$$

или

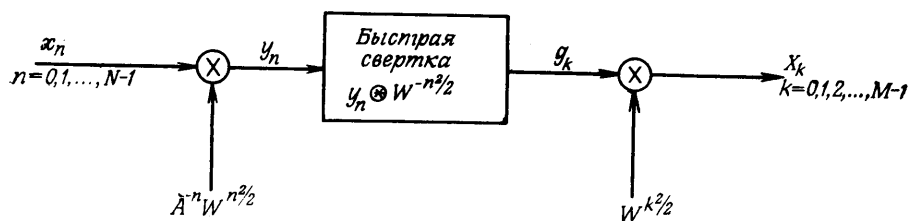
$$X_k = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) v(k-n), \quad (6.67)$$

где

$$y(n) = x(n) A^{-n} W^{n^2/2}, \quad (6.68)$$

$$v(n) = W^{n^2/2}. \quad (6.69)$$

Из формулы (6.67) видно, что значения X_k можно найти, рассчитав взвешенную сумму последовательностей $y(n)$ и $v(n)$; последнее можно эффективно провести, используя алгоритм быстрой свертки на основе БПФ. На фиг. 6.28 приведены все основные операции алгоритма z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией.



Фиг. 6.28. Операции при выполнении z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией.

Прежде чем перейти к детальному описанию алгоритма z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией, полезно перечислить преимущества этого алгоритма по сравнению со стандартным алгоритмом БПФ:

1. N , число отсчетов входной последовательности, не обязательно должно быть равно M , числу точек, в которых рассчитывается преобразование.

2. Ни N , ни M могут не быть составными числами; фактически оба они могут быть простыми.

3. Угловое смещение точек z_k может быть произвольным, так что и частотное разрешение может быть любым.

4. Контур не обязательно должен быть окружностью в z -плоскости. В гл. 12 будет показано, что использование спиралевидного контура в анализаторе речи дает некоторые преимущества.

5. Начальная точка контура в z -плоскости произвольна. Это свойство особенно полезно при анализе в узкой полосе частот, когда высокое частотное разрешение (п.3) сочетается с произвольной начальной частотой.

6. При $A = 1$, $M = N$, $W = e^{-j(2\pi/N)}$ z -преобразование с ЛЧМ-фильтрацией можно использовать для вычисления ДПФ даже при простых N .

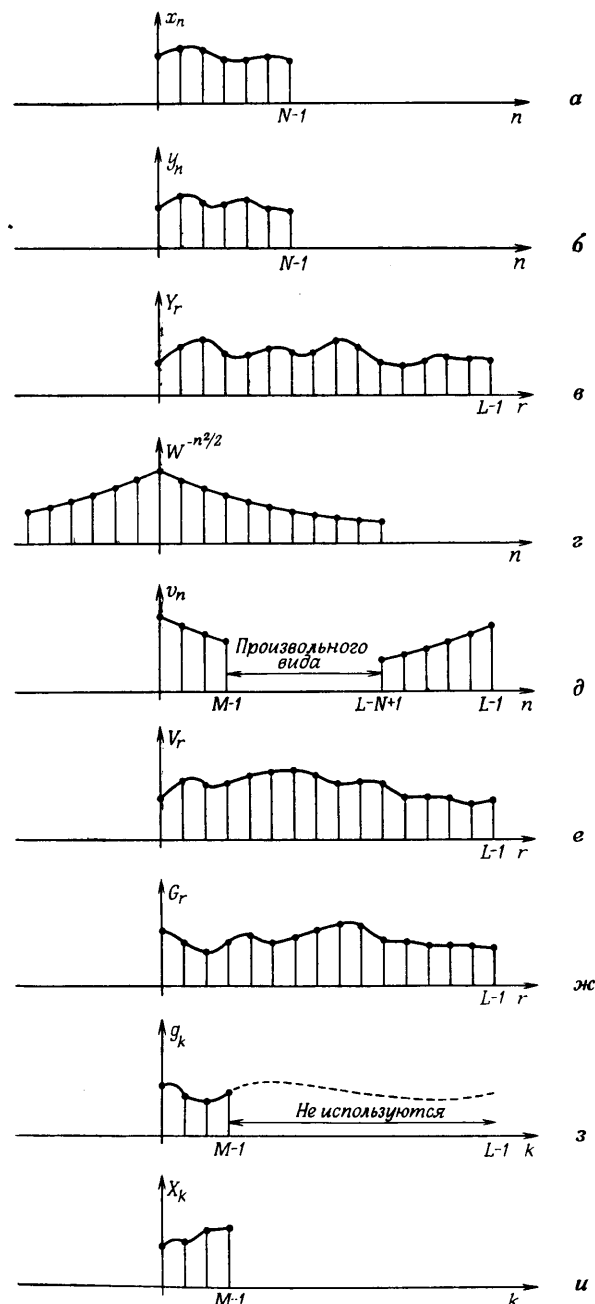
Все операции алгоритма z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией выполняются в несколько следующих этапов, иллюстрируемых с помощью ряда простых графиков на фиг. 6.29:

1. Выбор L , наименьшего целого числа, большего или равного $(N + M - 1)$, которое можно было бы использовать в обычном алгоритме БПФ. Величина L определяет размер преобразований, которые выполняются при расчете быстрой свертки в системе, показанной на фиг. 6.28.

2. Формирование L -точечной последовательности $y(n)$ вида

$$y(n) = \begin{cases} A^{-n} W^{n^2/2} x(n), & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & n = N, N+1, \dots, L-1. \end{cases}$$

Типичные последовательности $x(n)$ и $y(n)$ изображены на фиг. 6.29, а и б.



Фиг. 6.29. Последовательность выполнения алгоритма z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией.

3. Расчет L -точечного ДПФ последовательности $y(n)$ с помощью обычного алгоритма БПФ; результаты расчета обозначаются через Y_r . На фиг. 6.29, в изображена типичная последовательность Y_r .

4. Формирование L -точечной последовательности $v(n)$ по формуле

$$v(n) = \begin{cases} W^{-n^2/2}, & 0 \leq n \leq M-1, \\ W^{-(L-n)^2/2}, & L-N+1 \leq n < L, \\ \text{произвольно при других } n. \end{cases}$$

На фиг. 6.29, г и д изображены последовательности $W^{-n^2/2}$ и $v(n)$.

5. Расчет L -точечного ДПФ последовательности $v(n)$, результаты которого обозначаются через V_r (фиг. 6.29, е).

6. Почленное умножение последовательностей V_r и Y_r , что дает $G_r = V_r Y_r$ (фиг. 6.29, ж).

7. Расчет обратного ДПФ последовательности G_r , результаты которого обозначаются через g_k (фиг. 6.29, з).

8. Умножение g_k на $W^{k^2/2}$, что дает X_k , т. е.

$$X_k = g_k W^{k^2/2}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Значения g_k при $k \geq M$ не имеют смысла и отбрасываются. Последовательность X_k изображена на фиг. 6.29, и.

Остается показать, что алгоритм z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией эффективнее прямого вычисления z -преобразования заданной последовательности. Для этого достаточно подсчитать число комплексных умножений, используемых при выполнении z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией. Подсчет дает следующие результаты:

1. Для формирования $y(n)$ из $x(n)$ (2-й этап) требуется N комплексных умножений. Последовательность $A^{-n} W^{n^2/2}$ можно заранее записать в память либо генерировать в процессе счета, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$A^{-(n+1)} W^{(n+1)^2/2} = (A^{-n} W^{n^2/2}) W^n W^{1/2} A^{-1}. \quad (6.70)$$

Действительно, если ввести

$$C_n = A^{-n} W^{n^2/2}, \quad (6.71)$$

$$D_n = W^n W^{1/2} A^{-1}, \quad (6.72)$$

то с учетом выражений (6.70) — (6.72) получим рекуррентные соотношения

$$D_{n+1} = D_n W, \quad (6.73)$$

$$C_{n+1} = C_n D_n \quad (6.74)$$

с начальными условиями $C_0 = 1, D_0 = W^{1/2} A^{-1}$. Таким образом, если $A^{-n} W^{n^2/2}$ генерируется с помощью рекуррентной формулы, то потребуется дополнительно $2N$ комплексных умножений.

2. Для L -точечного БПФ на этапе 3 требуется порядка $L \log_2 L$ комплексных умножений.

3. Последовательность $v(n)$ обычно заранее записывается в память, хотя может и генерироваться рекуррентно [аналогично (6.70)], для чего потребуется $2M$ комплексных умножений.

4. При L -точечном ДПФ (этап 5) для вычисления V_r опять требуется порядка $L \log_2 L$ комплексных умножений (впрочем, если z -преобразование с ЛЧМ-фильтрацией выполняется неоднократно с одними и теми же значениями M и N , эта последовательность может быть вычислена только один раз и затем храниться в памяти).

5. Для перемножения последовательностей V_r и Y_r (этап 6), необходимо L комплексных умножений.

6. В L -точечном БПФ для получения g_k опять требуется порядка $L \log_2 L$ комплексных умножений.

7. Чтобы получить M отсчетов X_k на выходе системы, требуется M комплексных умножений.

Из вышеизложенного видно, что основными операциями при вычислении z -преобразования с ЛЧМ-фильтрацией являются три (или иногда два) L -точечных БПФ, поэтому снова время вычисления будет пропорционально $L \log_2 L$ (напомним, что $L \geq N + M - 1$), но только коэффициент пропорциональности будет в два-три раза больше, чем при БПФ. Таким образом, z -преобразование с ЛЧМ-фильтрацией оказывается эффективным алгоритмом расчета z -преобразования последовательности вдоль контура определенной формы в z -плоскости. Применения этого алгоритма рассмотрены Рабинером, Шафером и Рэйдером. (Недавно из частного сообщения Харпера Уайтсайда стало известно, что этот алгоритм был также использован для выполнения ДПФ в системе, построенной на базе акустической линии задержки с поверхностной волной.)

6.18. Энергетический спектр случайных сигналов

При спектральных измерениях случайных последовательностей встречается ряд трудностей. Во-первых, обычно интерес представляет энергетический спектр (определение энергетического спектра еще не было дано). Во-вторых, измерения должны быть статистически устойчивыми в том смысле, что, какая бы оценка ни рассматривалась, при увеличении интервала измерения она должна сходиться к вполне конкретной величине. Простое и удобное усло-

вие сходимости сводится к тому, чтобы дисперсия оценки стремилась к нулю при увеличении интервала измерения. Известно, что при работе с энергетическим спектром весьма удобно пользоваться корреляционной функцией сигнала. В связи с этим в данном разделе будут кратко рассмотрены понятия корреляционной функции и энергетического спектра и связывающие их соотношения. Затем будут проанализированы с точки зрения эффективности вычислений два хорошо известных метода расчета энергетического спектра случайных сигналов.

До сих пор использовалось довольно общее определение спектра. Он определялся как значение z -преобразования в одной или ряде точек в z -плоскости. В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли энергетический спектр сигнала определить в таком же общем виде? По-видимому, разумным подходом является следующий: если задана спектральная плотность мощности на некоторой кривой в z -плоскости (не обязательно на единичной окружности), то, интегрируя эту плотность вдоль кривой, можно получить общую мощность сигнала. Используя теорему Парсеваля, можно убедиться в том, что такой подход возможен. Так, для ограниченной случайной последовательности $x(n)$, состоящей из N отсчетов, теорема Парсеваля записывается следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) X\left(\frac{1}{z}\right) z^{-1} dz. \quad (6.75)$$

Соотношение (6.75) является упрощенным вариантом теоремы о комплексной свертке. Если последовательность имеет конечную длину, то интегрирование может проводиться по любому контуру, охватывающему начало координат, поэтому спектральную плотность мощности $S_N(z)$ можно определить как величину, пропорциональную произведению $X(z)X(1/z)$ на этом произвольном контуре, т. е.

$$S_N(z) \sim X(z) X(z^{-1}). \quad (6.76)$$

Из этого соотношения следует, что для определения спектральной плотности мощности в точке $z = z_1$ плоскости z необходимо вычислять значения z -преобразования заданного сигнала и при $z = z_1$, и при $z = 1/z_1$. Например, если требуется измерить спектральную плотность на окружности радиуса r , необходимо вычислить значения z -преобразования последовательности и на этой окружности, и на окружности радиуса $1/r$. При $r = 1$ оба эти значения z -преобразования становятся комплексно сопряженными, так что по существу в качестве спектральной плотности мощности измеряется величина $|X(e^{j\omega})|^2$.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности в соотношении (6.76), воспользуемся статистическим методом. Запишем

$$X(z) X\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n) x(m) z^{-(n-m)}. \quad (6.77)$$

Найдем среднее значение от этого выражения

$$E\left[X(z) X\left(\frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E[x(n) x(m)] z^{-(n-m)}. \quad (6.78)$$

Рассмотрим простейший пример анализа «белого» шума, для которого среднее значение произведения $x(n)x(m)$ равно нулю всегда, за исключением случая $n = m$, когда оно равно, предположим, K . Таким образом,

$$E\left[X(z) X\left(\frac{1}{z}\right)\right] = KN. \quad (6.79)$$

Поскольку желательно, чтобы среднее значение сходилось к постоянной величине при увеличении N , спектральную плотность следует определить следующим образом:

$$S_N(z) = \frac{1}{N} X_N(z) X_N\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n) x(m) z^{-(n-m)}. \quad (6.80)$$

Например, при $N = 5$, согласно формуле (6.80), имеем

$$\begin{aligned} S_5(z) = & \frac{1}{5} [x(0)x(0)z^0 + x(0)x(1)z^{-1} + x(0)x(2)z^{-2} + x(0)x(3)z^{-3} + \\ & + x(0)x(4)z^{-4} + x(1)x(0)z^1 + x(1)x(1)z^0 + x(1)x(2)z^{-1} + \\ & + x(1)x(3)z^{-2} + x(1)x(4)z^{-3} + x(2)x(0)z^2 + x(2)x(1)z^1 + \\ & + x(2)x(2)z^0 + x(2)x(3)z^{-1} + x(2)x(4)z^{-2} + x(3)x(0)z^3 + \\ & + x(3)x(1)z^2 + x(3)x(2)z^1 + x(3)x(3)z^0 + x(3)x(4)z^{-1} + \\ & + x(4)x(0)z^4 + x(4)x(1)z^3 + x(4)x(2)z^2 + x(4)x(3)z^1 + \\ & + x(4)x(4)z^0]. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Объединяя члены с одинаковыми степенями z , получаем

$$\begin{aligned} S_5(z) = & \frac{1}{5} \{z^0 [x(0)x(0) + x(1)x(1) + x(2)x(2) + x(3)x(3) + x(4)x(4)] + \\ & + (z^1 + z^{-1}) [x(0)x(1) + x(1)x(2) + x(2)x(3) + x(3)x(4)] + \\ & + (z^2 + z^{-2}) [x(0)x(2) + x(1)x(3) + x(2)x(4)] + \\ & + (z^3 + z^{-3}) [x(0)x(3) + x(1)x(4)] + (z^4 + z^{-4}) [x(0)x(4)]\}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Из выражений (6.81) и (6.82) легко получить формулу для произвольного N :

$$S_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} R(m) (z^{-m} + z^m) - R(0) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_m z^{-m}, \quad (6.83)$$

где

$$R_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n) x(m+n), \quad 0 \leq m \leq N-1, \quad (6.84)$$

и $R(-m) \triangleq R(m)$. Выражение (6.84) определяет автокорреляционную функцию последовательности конечной длины $x(n)$.

Из формулы (6.83) следует, что спектральная плотность мощности равна z -преобразованию автокорреляционной функции сигнала $x(n)$. Хотя выше предполагалось, что случайный сигнал имеет конечную длительность, как правило, последовательность $x(n)$ не ограничена. В этих случаях основная формула для вычисления автокорреляционной функции имеет вид

$$R(m) = R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) x(n+m), \quad -\infty < m < \infty. \quad (6.85)$$

На практике спектральная плотность мощности чаще всего вычисляется на единичной окружности. В этом случае формула (6.83) принимает вид

$$S(z) |_{z=e^{j2\pi f}} = S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi m f}, \quad (6.86)$$

т. е. $S_x(f)$ равно преобразованию Фурье от $R_x(m)$. Соответственно $R_x(m)$ может быть получена обратным преобразованием Фурье от $S_x(f)$, т. е.

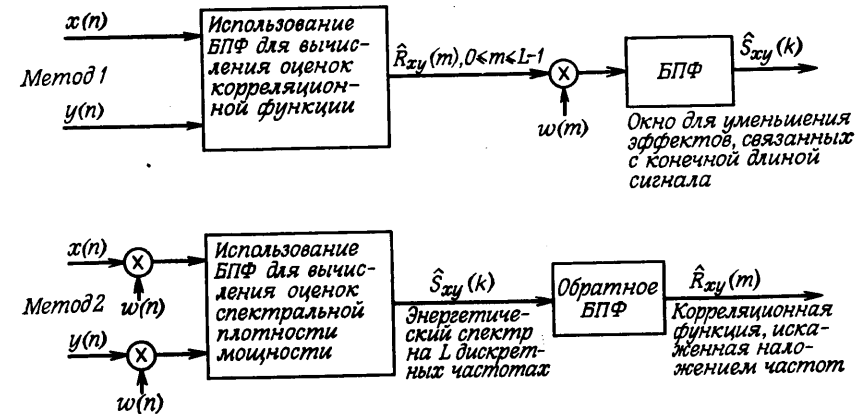
$$R_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(f) e^{j2\pi m f} df. \quad (6.87)$$

Соотношения (6.86) и (6.87) можно обобщить на случай, когда желательно измерить взаимный энергетический спектр или функцию взаимной корреляции двух случайных колебаний $x(n)$ и $y(n)$:

$$R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y(n+m), \quad -\infty < m < \infty, \quad (6.88)$$

$$S_{xy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xy}(m) e^{-j2\pi m f}, \quad (6.89)$$

$$R_{xy}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xy}(f) e^{j2\pi m f} df. \quad (6.90)$$



Фиг. 6.30. Два метода выполнения спектрального анализа.

Функцию взаимной корреляции измеряют в случаях, когда последовательности $y(n)$ и $x(n)$ связаны операциями фильтрации и задержки. Например, в радиолокационной системе $y(n)$ может представлять собой отфильтрованный, зашумленный и задержанный зондирующий сигнал $x(n)$. В таких случаях положение максимума взаимной корреляционной функции дает величину задержки входного сигнала.

Итак, выше было дано определение спектральной плотности мощности, установлена взаимосвязь между спектральной плотностью мощности и автокорреляционной функцией и показано, что средние значения этих оценок сходятся при больших N к некоторому определенному постоянному числу, но крайней мере в случае белого шума. Однако хорошо известно, что дисперсия оценки $S_N(z)$ будет сходиться к нулю лишь при выполнении дальнейшего усреднения. Существуют два хорошо известных метода измерения спектральной плотности шума с использованием БПФ, для которых удовлетворяются условия сходимости дисперсии к нулю. Первый метод основан на вычислении корреляционной функции с помощью алгоритма БПФ, а второй состоит в усреднении последовательности непосредственных измерений спектральной плотности. На фиг. 6.30 иллюстрируются все этапы выполнения спектрального анализа этими методами.

В методе 1 БПФ используется непосредственно для вычисления оценок взаимной корреляционной¹⁾ функции $\hat{R}_{xy}(m)$ при L за-

¹⁾ Приведенные выше выражения легко обобщить на случай измерения автокорреляционной функции и энергетического спектра, воспользовавшись подстановкой $y(n) = x(n)$.

держках, где $2L$ — размер БПФ. При вычислении по значениям $\hat{R}_{xy}(m)$ спектральной плотности мощности $\hat{S}_{xy}(k)$ для конечного числа частот необходимо применять сглаживающее окно $w(m)$, чтобы уменьшить нежелательные эффекты, связанные с конечной длиной выборки, поскольку вместо бесконечной корреляционной последовательности используются только L ее значений. С помощью L -точечного БПФ можно вычислить значения спектральной плотности мощности на L равноотстоящих частотах на единичной окружности.

В методе 2 алгоритм БПФ используется для непосредственного вычисления спектральной плотности мощности в отличие от первого метода, в котором сначала вычисляется корреляционная функция. Поэтому каждая из последовательностей $x(n)$ и $y(n)$ до выполнения преобразования сглаживается с помощью окна $w(n)$. Для последующего вычисления на основе спектральной плотности мощности корреляционной функции можно использовать алгоритм обратного БПФ. Так как спектральная плотность мощности была рассчитана только на L дискретных частотах (вместо бесконечного числа частот, что требуется при теоретическом рассмотрении), после обратного БПФ будет получена корреляционная функция, искаженная эффектом наложения.

Ниже будут рассмотрены вопросы практического применения методов 1 и 2, однако сначала покажем, как можно использовать ДПФ для выполнения корреляционного анализа. Рассмотрим периодические последовательности (с периодом в L отсчетов) $x_p(n)$ и $y_p(n)$, ДПФ которых $X(k)$ и $Y(k)$ соответственно равны

$$X(k) = \sum_{r=0}^{L-1} x_p(r) e^{-j(2\pi/L)rk} \quad (6.91)$$

и

$$Y(k) = \sum_{s=0}^{L-1} y_p(s) e^{-j(2\pi/L)sk}. \quad (6.92)$$

Выше было показано, что умножение $X(k)$ на $Y(k)$ соответствует свертке периодических последовательностей $x_p(n)$ и $y_p(n)$, т. е.

$$X(k) Y(k) \leftrightarrow \sum_{m=0}^{L-1} x_p(m) y_p(n-m). \quad (6.93)$$

Покажем теперь, что круговую свертку $x_p(n)$ и $y_p(n)$ можно элементарно найти следующим образом:

$$X(k) Y^*(k) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{L-1} y_p(n) x_p(m+n). \quad (6.94)$$

Для проверки соотношения (6.94) покажем, что обратное ДПФ произведения $X(k)Y^*(k)$ равно правой части (6.94). Используя

формулы (6.91) и (6.92), получим

$$\begin{aligned} \text{ДПФ}^{-1}[X(k)Y^*(k)] &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) Y^*(k) e^{j(2\pi/L)mk} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \left[\sum_{r=0}^{L-1} x_p(r) e^{-j(2\pi/L)rk} \right] \times \\ &\quad \times \left[\sum_{s=0}^{L-1} y_p(s) e^{j(2\pi/L)sk} \right] e^{j(2\pi/L)mk} = \\ &= \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{L-1} x_p(r) y_p(s) \underbrace{\left[\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{j(2\pi/L)k(m-r+s)} \right]}_{\delta(m-r+s)} = \\ &= \sum_{s=0}^{L-1} y_p(s) x_p(m+s), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. [Заметим, что во всех приведенных выкладках последовательности $x_p(n)$ и $y_p(n)$ считаются действительными.]

1. Метод 1 — корреляционный.

На фиг. 6.31 иллюстрируется один из способов вычисления первых пяти отсчетов автокорреляционной функции заданной N -точечной последовательности ($N=20$). Сама последовательность показана на фиг. 6.31 вверху. Первый блок чисел размером (9×5) соответствует круговой корреляции двух девятиточечных последовательностей, а именно $x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$ и $x_0x_1x_2x_3x_40000$. Пять из полученных отсчетов $R_0(0)$, $R_0(1)$, $R_0(2)$, $R_0(3)$, $R_0(4)$ являются правильными; они показаны справа. Второй блок начинается с x_5 ; аналогичная процедура вычисления дает отсчеты от $R_1(0)$ до $R_1(4)$. Чтобы найти результирующие значения первых пяти отсчетов автокорреляционной функции, необходимо просуммировать $R_i(m)$ по i следующим образом:

$$R(m) = \sum_{i=0}^3 R_i(m), \quad m=0, 1, 2, 3, 4. \quad (6.95)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, как выполнять вычисления с использованием алгоритма БПФ. Каждую из четырех круговых корреляционных функций девятиточечных последова-

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	
C_0	x_1	x_2	x_3	x_4	0	0	0	0												
C_1	0	x_2	x_3	x_4	0	0	0													
C_2	0	0	x_3	x_4	x_5	x_6	0													
C_3	0	0	0	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	0											
C_4	0	0	0	0	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	0										
C_5	0	0	0	0	0	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	0									
C_6	0	0	0	0	0	0	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	0								
C_7	0	0	0	0	0	0	0	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	0							
C_8	0	0	0	0	0	0	0	0	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0						
C_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	0					
C_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	0				
C_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	0			
C_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	0		
C_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	0	
C_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	0
C_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}

Фиг. 6.31. Иллюстрация вычисления круговой корреляции.

тельно можно вычислить с помощью ДПФ по следующей схеме:

1. Вычислить

$$U_0(k) = \text{ДПФ} \{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8\}$$

и

$$V_0(k) = \text{ДПФ} \{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 0000\},$$

$$U_1(k) = \text{ДПФ} \{x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13}\},$$

$$V_1(k) = \text{ДПФ} \{x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 0000\},$$

$$U_2(k) = \text{ДПФ} \{x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16} x_{17} x_{18}\},$$

$$V_2(k) = \text{ДПФ} \{x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} 0000\},$$

$$U_3(k) = \text{ДПФ} \{x_{15} x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} \dots\},$$

$$V_3(k) = \text{ДПФ} \{x_{15} x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} 0000\}.$$

2. Вычислить

$$X_i(k) = U_i(k) V_i^*(k), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

3. Вычислить

$$X(k) = \sum_{i=0}^3 X_i(k), \quad k = 0, 1, \dots, 8.$$

$R_0(0)$	$x_0 x_0 + x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 +$
$R_0(1)$	$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 +$
$R_0(2)$	$x_0 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 +$
$R_0(3)$	$x_0 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 +$
$R_0(4)$	$x_0 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_6 + x_3 x_7 +$
$R_1(0)$	$x_5 x_5 + x_6 x_6 + x_7 x_7 + x_8 x_8 +$
$R_1(1)$	$x_5 x_6 + x_6 x_7 + x_7 x_8 + x_8 x_9 +$
$R_1(2)$	$x_5 x_7 + x_6 x_8 + x_7 x_9 + x_8 x_{10} +$
$R_1(3)$	$x_5 x_8 + x_6 x_9 + x_7 x_{10} + x_8 x_{11} +$
$R_1(4)$	$x_5 x_9 + x_6 x_{10} + x_7 x_{11} + x_8 x_{12} +$
$R_2(0)$	$x_{10} x_{10} + x_{11} x_{11} + x_{12} x_{12} + x_{13} x_{13} +$
$R_2(1)$	$x_{10} x_{11} + x_{11} x_{12} + x_{12} x_{13} + x_{13} x_{14} +$
$R_2(2)$	$x_{10} x_{12} + x_{11} x_{13} + x_{12} x_{14} + x_{13} x_{15} +$
$R_2(3)$	$x_{10} x_{13} + x_{11} x_{14} + x_{12} x_{15} + x_{13} x_{16} +$
$R_2(4)$	$x_{10} x_{14} + x_{11} x_{15} + x_{12} x_{16} + x_{13} x_{17} +$
$R_3(0)$	$x_{15} x_{15} + x_{16} x_{16} + x_{17} x_{17} + x_{18} x_{18} +$
$R_3(1)$	$x_{15} x_{16} + x_{16} x_{17} + x_{17} x_{18} + x_{18} x_{19} +$
$R_3(2)$	$x_{15} x_{17} + x_{16} x_{18} + x_{17} x_{19} +$
$R_3(3)$	$x_{15} x_{18} + x_{16} x_{19} +$
$R_3(4)$	$x_{15} x_{19} +$

4. Вычислить

$$R(m) = \text{ОДПФ} \{X(k)\}.$$

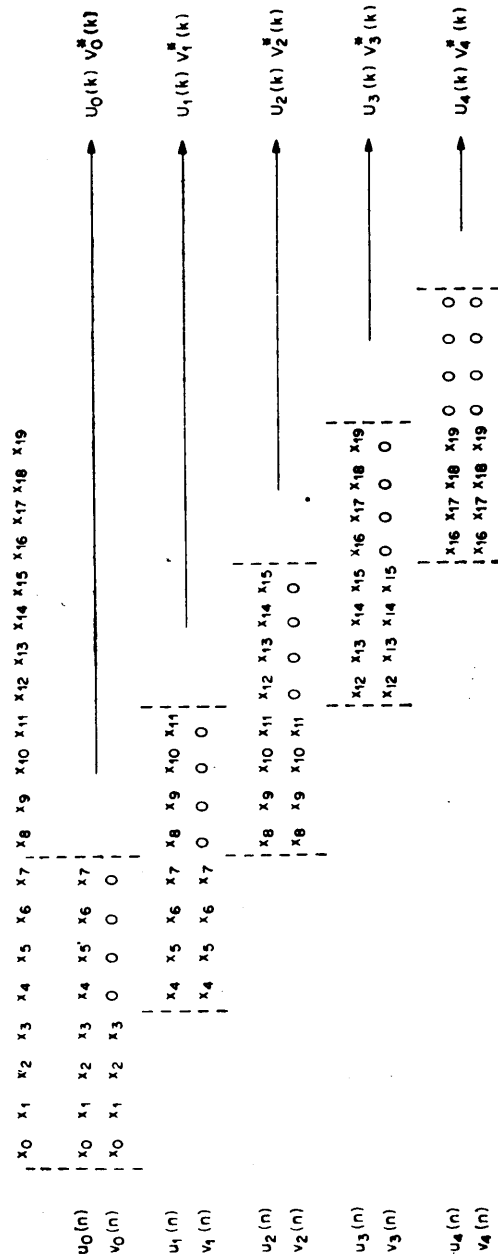
5. Первые пять отсчетов $R(m)$ являются искомым результатом и также удовлетворяют соотношению

$$R(m) = \sum_{i=0}^3 R_i(m).$$

Описанная процедура эффективнее, чем предварительный расчет каждой из частичных корреляционных функций $R_i(m)$ с помощью обратного ДПФ от $X_i(k)$ и последующее суммирование этих частичных корреляционных функций. В первом случае для каждого из показанных на фиг. 6.31 блоков чисел размером (9×5) рассчитываются два ДПФ, что дает $U_i(k)$ и $V_i(k)$, а одно «общее» ДПФ искомой корреляционной функции получается путем накопления частичных ДПФ. «Общая» корреляционная функция вычисляется посредством единственного обратного ДПФ от полученного путем накопления «полного» ДПФ. Следовательно, общее число выполняемых преобразований равно $2K + 1$, где K — количество обрабатываемых блоков данных. Во втором случае, когда накапливаются частичные корреляционные функции, преобразование приходится выполнять $3K$ раз.

Из описанной выше методики вычислений видно, что размер ДПФ должен приблизительно вдвое превышать требуемое число отсчетов корреляционной функции, а требуемое количество преобразований равно $2K + 1$ (здесь $K = N/M$, причем N — общее число отсчетов сигнала, а M — требуемое число отсчетов корреляционной функции). Затем, дополнив $R(m)$ нулями и выполнив единственное ДПФ, можно получить оценку энергетического спектра с произвольным частотным разрешением. Если $R(m)$ является хорошей оценкой корреляционной функции с малой дисперсией, то и преобразование от $R(m)$ также будет достаточно хорошей оценкой спектра.

Для дальнейшего повышения эффективности вычислений можно использовать прием, предложенный Рэйдером, который отметил, что вычисляемые на первом этапе значения $U_i(k)$ можно выразить через $V_i(k)$ и $V_{i+1}(k)$. Для этого следует прежде всего несколько изменить характер показанного на фиг. 6.31 секционирования последовательности, предусмотрев, чтобы секции содержали четное число отсчетов, желательно кратное 2, и перекрытие секций в точности было равно 2:1. Эти условия вполне выполнимы, потому что для большинства алгоритмов БПФ требуется или желательно иметь секции именно такой длины, а обеспечение перекрытия, в точности равного 2:1, означает, что в данном случае размер преобразования возрастает на один отсчет, что приводит конечно, к незначительному ухудшению эффективности вычисле-



Фиг. 6.32. Секционирование при вычислении оценок автокорреляционной функции.

ний. На фиг. 6.32 изображена 20-точечная последовательность с отсчетами от $x(0)$ до $x(19)$, разделенная на пять секций, и показано, для каких секций рассчитывается круговая автокорреляция. Справа показаны эквивалентные БПФ-операции. Идея излагаемого метода, как уже было отмечено, состоит в том, что любой коэффициент ДПФ $U_i(k)$ можно представить в функции от $V_i(k)$. Если, например,

$$V_3(k) = \text{ДПФ} \{x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}0000\},$$

то

$$(-1)^k V_3(k) = \text{ДПФ} \{0000x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}\},$$

так как круговой сдвиг на $N/2$ при ДПФ эквивалентен умножению самого ДПФ на $(-1)^k$. Следовательно,

$$U_2(k) = V_2(k) + (-1)^k V_3(k).$$

В более общем виде

$$U_i(k) = V_i(k) + (-1)^k V_{i+1}(k), \quad i=0, 1, 2, 3, \quad (6.96)$$

$$U_4(k) = V_4(k).$$

Теперь, используя пару преобразований (6.93), описанную выше процедуру спектральных измерений можно изменить следующим образом:

1. Вычислить все $V_i(k)$ от $V_0(k)$ до $V_4(k)$, где $V_i(k)$ — ДПФ последовательностей, показанных на фиг. 6.32.

2. Вычислить

$$X_i(k) = V_i^*(k) [V_i(k) + (-1)^k V_{i+1}(k)],$$

причем

$$X_4(k) = V_4(k) V_4^*(k).$$

3. Вычислить

$$X(k) = \sum_{i=0}^4 X_i(k), \quad k=0, 1, \dots, 7.$$

4. Вычислить

$$R(m) = \text{ОДПФ} \{X(k)\}.$$

После определения $R(m)$ можно вычислить спектральные оценки, рассчитав ДПФ от $R(m)$. Важно отметить, что количество преобразований, которые в рассматриваемом методе составляют основу всех вычислений, удалось уменьшить до K , где K — количество секций.

Для того чтобы дисперсия оценки сходилась к нулю, нужно, чтобы аргумент m функции корреляции $R(m)$ был значительно меньше интервала измерения. В результате оценка спектра вычисляется через преобразование усеченной последовательности $R(m)$, а, как известно, усечение во временной области может вызвать чрезмерные пульсации в частотной области; в связи с этим приходится ис-

пользовать окна. Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть интервал измерения содержит 1024 отсчета и известно, что отсчеты $R(m)$ малы при $m > 16$, причем требуется найти 64 спектральные оценки на 64 частотах. Процедура вычислений состоит в следующем:

1. Разделить секцию из 1024 отсчетов на подсекции длиной по 32 отсчета.
2. Рассчитать 32-точечные БПФ этих подсекций с перекрытием 2:1, т. е. сдвигаясь каждый раз на 16 отсчетов.
3. Используя описанный выше метод, найти $R(m)$ для m в пределах от 0 до 16.
4. Чтобы получить оценку спектра, умножить $R(m)$ на соответствующее окно $w(m)$. Затем дополнить $R(m)w(m)$ нулями на интервале от $m = 16$ до $m = 63$ и вычислить БПФ сформированного массива.

В общем случае, когда требуется вычислить L отсчетов корреляционной функции по N заданным отсчетам сигнала ($N \gg L$), рассматриваемый корреляционный метод спектральных измерений можно сформулировать следующим образом. Искомая функция взаимной корреляции имеет вид

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y(n+m), \quad m=0, 1, \dots, L-1. \quad (6.97)$$

Простая методика вычисления по формуле (6.97) с использованием P -точечного БПФ ($P = 2L$) представлена на фиг. 6.33. Из последовательности $x(n)$ образуются подпоследовательности $x_i(n)$ согласно правилу

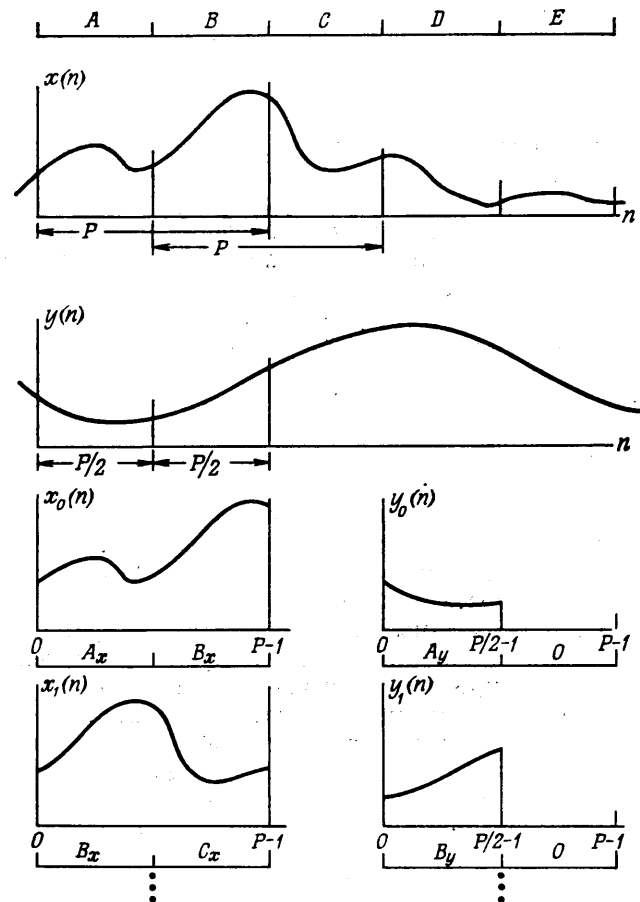
$$x_i(n) = x\left[n + \left(\frac{P}{2}\right) i\right], \quad n=0, 1, \dots, P-1, \quad i=0, 1, \dots, \quad (6.98)$$

а из последовательности $y(n)$ формируются подпоследовательности $y_i(n)$ по несколько иному правилу:

$$y_i(n) = \begin{cases} y\left[n + \left(\frac{P}{2}\right) i\right], & n=0, 1, \dots, \frac{P}{2}-1, \\ 0, & n=\frac{P}{2}, \dots, P-1. \end{cases} \quad (6.99)$$

Для каждой пары P -точечных подпоследовательностей $x_i(n)$ и $y_i(n)$ вычисляется последовательность $w_i(m)$, представляющая собой периодическую корреляцию $x_i(n)$ и $y_i(n)$. Она может быть записана в виде

$$w_i(m) = \sum_{n=0}^{P/2-1} x\left(n + \frac{iP}{2}\right) y\left(n + \frac{iP}{2} + m\right), \quad m=0, 1, \dots, \frac{P}{2}. \quad (6.100)$$



Фиг. 6.33. Секционирование при вычислении функции взаимной корреляции.

Следует отметить, что только $(P/2 + 1)$ отсчетов вычисленной корреляционной последовательности удовлетворяют формуле (6.100); остальные $(P/2 - 1)$ отсчетов соответствуют ненужной периодической корреляции. Суммируя отдельные корреляционные последовательности, находим

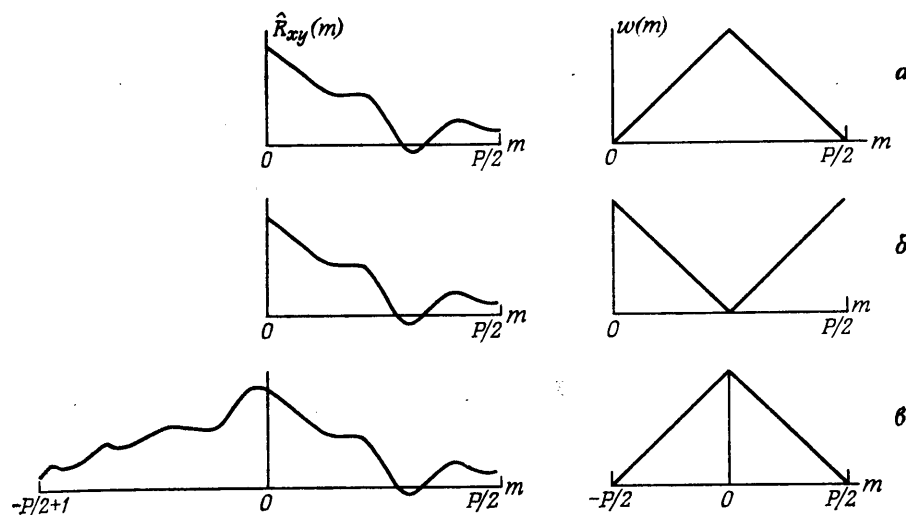
$$z_i(m) = \sum_{j=0}^i w_j(m) = \sum_{j=0}^i \sum_{n=0}^{P/2-1} x\left(n + \frac{jP}{2}\right) y\left(n + \frac{jP}{2} + m\right) = \quad (6.101)$$

$$= \sum_{n=0}^{(i+1)P/2-1} x(n)y(n+m) = \hat{R}_{xy}(m), \quad (6.102)$$

что идентично искомому результату (6.97) для $N = (i+1)P/2$. Таким образом, корреляционные функции можно эффективно вычислять с использованием БПФ при любом числе задержек L .

Как указывалось выше, при вычислении спектральной плотности мощности по корреляционной последовательности с использованием окна $w(m)$ могут возникнуть трудности. Если ДПФ окна не является положительным, то существует вероятность того, что вычисленная спектральная плотность мощности будет отрицательной, что весьма нежелательно. Причина этого нежелательного результата состоит в том, что вычисленная спектральная плотность мощности равна круговой свертке преобразования окна и преобразования найденной корреляционной последовательности, поэтому, если преобразование окна не является положительным на всех частотах, существует вероятность того, что из-за флуктуационных ошибок оценок корреляционной функции результирующая свертка на некоторых частотах может дать отрицательные значения спектра мощности. Существуют, однако, окна, преобразования которых положительны на всех частотах, например треугольное окно. Именно такие окна и следует применять в тех случаях, когда другие окна приводят к нежелательному результату.

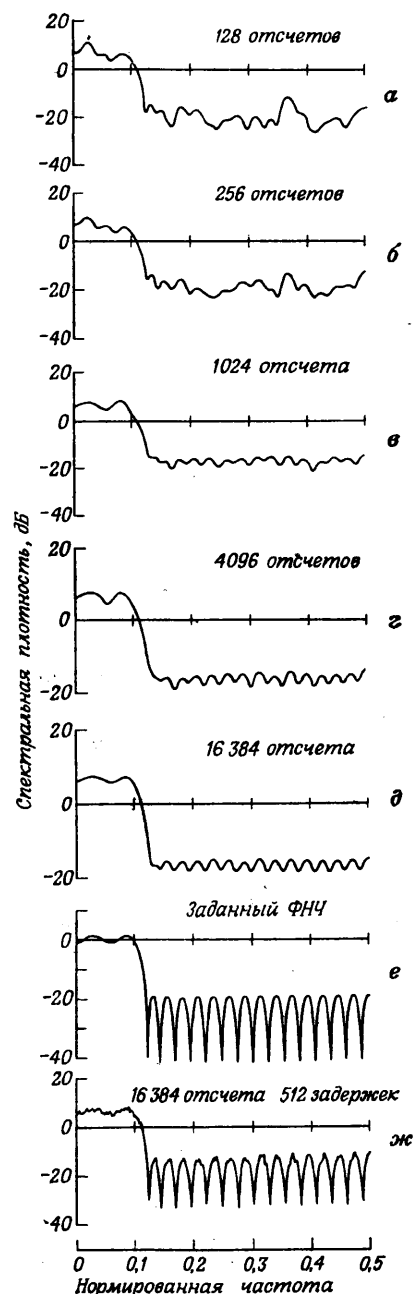
Еще одна трудность применения корреляционного метода встречается при оценке взаимной спектральной плотности по функции взаимной корреляции с использованием окна. Как видно из формулы (6.100), отсчеты функции корреляции здесь измеряются только при положительных значениях m . При использовании этого метода для оценки автокорреляционной функции ее отсчеты при отрицательных m получаются автоматически благодаря симметрии автокорреляционной функции. Однако для функции взаимной корреляции эта симметрия не существует. Таким образом, неясно, как использовать окна для сглаживания взаимно корреляционной последовательности при оценке взаимной спектральной плотности. Существует несколько возможных способов сглаживания; они иллюстрируются на фиг. 6.34. Трудность заключается в том, что весьма непросто придать физический смысл значению взаимно корреляционной функции при $m = 0$, поскольку последняя зависит от задержки между $x(n)$ и $y(n)$. Так, если $y(n) = x(n - N_0)$, то $\hat{R}_{xy}(m)$ будет иметь пик при $m = N_0$. И в этом случае можно было бы рассматривать точку $m = N_0$ как некоторое начало координат $\hat{R}_{xy}(m)$. На фиг. 6.34 иллюстрируются три возможных способа взвешивания $\hat{R}_{xy}(m)$ с использованием окна $w(m)$ до выполнения ДПФ, позволяющих получить оценки $\hat{S}_{xy}(k)$, имеющие



Фиг. 6.34. Варианты окон для вычисления взаимного спектра по взаимной корреляции.

физический смысл. На фиг. 6.34, а окно (в данном примере треугольное) симметрично относительно точки $m = P/4$, причем предполагается, что размер БПФ при вычислении $\hat{S}_{xy}(k)$ равен $P/2$. На фиг. 6.34, б размер БПФ также равен $P/2$, но окно симметрично относительно точки $m = 0$, которой придается физический смысл начала координат. Вариант взвешивания, иллюстрируемый на фиг. 6.34, в, по-видимому, наиболее разумный. Здесь оцениваются одновременно и $\hat{R}_{xy}(m)$, $m = 0, 1, \dots, P/2$, и $\hat{R}_{yx}(m) = \hat{R}_{xy}(-m)$, $m = 0, 1, \dots, P/2$, причем $\hat{R}_{yx}(m)$ вычисляется точно так же, как и $\hat{R}_{xy}(m)$, но $x(n)$ и $y(n)$ меняются местами. В этом случае используется P -точечное БПФ и снова предполагается, что окно симметрично относительно точки $m = 0$. Конечно, время вычисления в третьем случае в два раза больше, чем в двух предыдущих, но часто эти затраты времени не имеют смысла. Более того, поскольку используется P -точечное БПФ, в третьем случае достигается более высокое разрешение оценки взаимной спектральной плотности по частоте.

На фиг. 6.35—6.37 иллюстрируется применение корреляционного метода для измерения автокорреляционной функции и спектральной плотности мощности окрашенного шума, а именно белого шума, пропущенного через КИХ-фильтр нижних частот с равновеликими пульсациями частотной характеристики и импульсной характеристикой, состоящей из 39 отсчетов. Автокорреляционная



функция шума на выходе такого фильтра теоретически отличается от нуля только на интервале $-38 \leq m \leq 38$. В действительности измеренные значения функции автокорреляции вне этого интервала в точности не равны нулю, хотя и близки к нему. Аналогично идеальная функция спектральной плотности мощности шума на выходе фильтра нижних частот равна

$$S_y(f) = S_x(f) |H(e^{j2\pi f})|^2,$$

где $S_x(f) = \sigma_x^2$, а $H(e^{j2\pi f})$ — частотная характеристика фильтра нижних частот. На фиг. 6.35 изображено несколько графиков энергетического спектра (в логарифмическом масштабе) при различных значениях числа отсчетов N , по которым вычисляется корреляционная функция. Графики соответствуют значениям $N = 128, 256, 1024, 4096$ и 16384 соответственно, причем число задержек автокорреляционной функции равно 59. При получении оценки спектральной плотности мощности для взвешивания автокорреляционной функции использовалось окно Хэмминга. Чтобы получить достаточно хорошее частотное разрешение, автокорреляционная функция дополнялась нулями и выполнялось 1024-точечное БПФ. Графики для разных N показывают

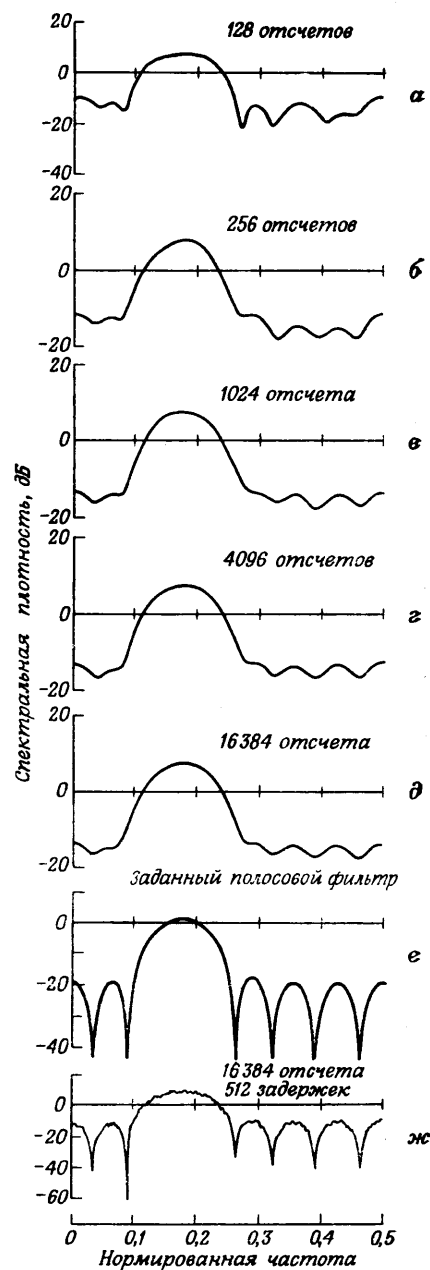
Фиг. 6.35. Спектральная плотность мощности шума на выходе фильтра нижних частот, полученная корреляционным методом (в логарифмическом масштабе).

ют, что функция $\lg S_y(f)$ быстро сходится к $\lg |H(e^{j2\pi f})|$. Для сравнения на фиг. 6.35, е показана идеальная характеристика $\lg |H(e^{j2\pi f})|$. На фиг. 6.35, ж изображен график спектральной плотности мощности, полученный с помощью БПФ по 512 точкам автокорреляционной функции, взвешенной треугольным окном. Поскольку автокорреляционная функция при $m > 38$ представляет собой чисто случайную шумовую последовательность, полученная функция спектральной плотности будет совпадать с идеальной характеристикой фильтра $\lg |H(e^{j2\pi f})|$ с наложенным на нее шумом.

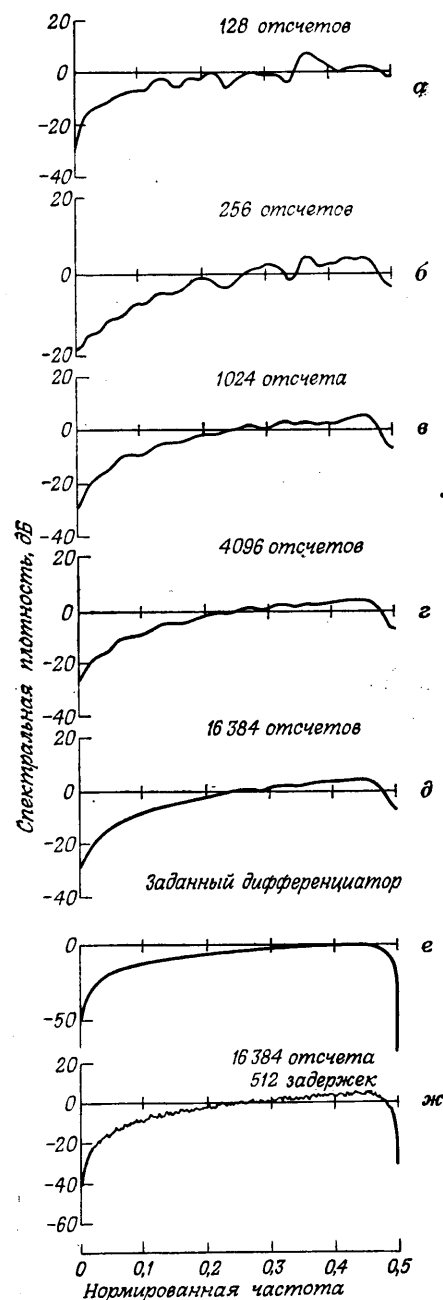
На фиг. 6.36 и 6.37 приведены аналогичные результаты прохождения шума через полосовой КИХ-фильтр с 15-точечной импульсной характеристикой и через КИХ-дифференциатор с 27-точечной импульсной характеристикой соответственно. Очевидно, что корреляционный метод обеспечивает достаточно хорошую сходимость оценок, так что в рассмотренных простых примерах получаемые спектры мощности оказываются достаточно хорошей аппроксимацией теоретических спектров.

2. Метод 2 — метод модифицированных периодограмм

Интуиция подсказывает, что достаточно хорошую оценку



Фиг. 6.36. Спектральная плотность мощности шума на выходе полосового фильтра, полученная корреляционным методом.

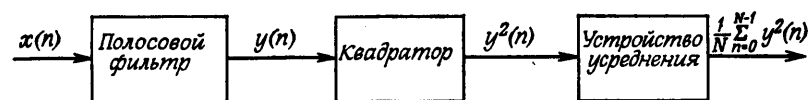


спектра можно получить, используя гребенку фильтров, как показано на фиг. 6.38.

В соответствии с изложенным в разд. 6.13 гребенку фильтров можно реализовать с помощью скользящего БПФ. Если, кроме того, прореживать выходную последовательность $y(n)$ (фиг. 6.38), то при условии, что фильтры гребенки имеют достаточно узкие полосы, $y(n)$ будет меняться сравнительно медленно. Однако использование прореживания позволяет вместо скользящего БПФ воспользоваться скачущим БПФ; такая процедура спектральных измерений носит название *метода модифицированных периодограмм*.

Для иллюстрации применения этого метода рассмотрим сначала случай $y(n) = x(n)$, т. е. нужно получить спектр мощности стационарного случайного процесса, представленного типичной последовательностью $x(n)$. На фиг. 6.39 показана такая последовательность $x(n)$ и иллюстрируется способ ее разбиения на подпоследовательности $x_r(n)$ длиной по L отсчетов. Подпоследовательности $x_r(n)$ сдвинуты относительно друг друга на D отсчетов, причем в приведенном на фиг. 6.39 примере $D = L/3$, так что $x_r(n)$ связаны с $x(n)$

Фиг. 6.37. Спектральная плотность мощности шума на выходе дифференциатора, полученная корреляционным методом.



Фиг. 6.38. Один канал спектроанализатора для измерения шумов.

соотношением

$$x_r(n) = x[n + (r-1)D], \quad r = 1, 2, \dots, K, \quad (6.103)$$

где K — число подпоследовательностей, используемых для вычисления спектральной плотности мощности. Для каждой из взвешенных подпоследовательностей $x_r(n)$ рассчитываются коэффициенты БПФ, $X_r(k)$, по формуле

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x_r(n) w(n) e^{-j(2\pi/L)nk}, \quad (6.104)$$

где $w(n)$ — соответствующее окно. Величина $I_r(f_k)$, называемая периодограммой, вычисляется по формуле

$$I_r(f_k) = \frac{1}{U} |X_r(k)|^2, \quad (6.105)$$

где

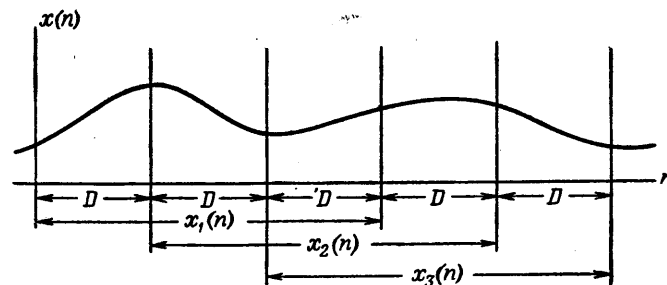
$$f_k = \frac{k}{L} \text{ — частоты ДПФ,} \quad (6.106)$$

а

$$U = \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n) \text{ — энергия окна.} \quad (6.107)$$

Оценка спектральной плотности мощности $\hat{S}_x(f_k)$ находится по формуле

$$\hat{S}_x(f_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^K I_r(f_k) = \frac{1}{KU} \sum_{r=1}^K |X_r(k)|^2. \quad (6.108)$$



Фиг. 6.39. Секционирование входной последовательности при вычислении спектральной плотности.

Таким образом, оценка спектральной плотности мощности равна среднему значению периодограмм отдельных подпоследовательностей. Уэлч показал, что математическое ожидание этой оценки описывается формулой

$$E[\hat{S}_x(f_k)] = \int_{-0,5}^{+0,5} H(f) S_x(f_k - f) df = H(f) * S_x(f), \quad (6.109)$$

где

$$H(f) = |W(e^{j2\pi f})|^2, \quad (6.110)$$

$$W(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{L-1} w(n) e^{-j2\pi f n}, \quad (6.111)$$

а $S_x(f)$ — истинная спектральная плотность мощности анализируемого процесса с отчетами $x(n)$. Из формулы (6.109) следует, что математическое ожидание искомой оценки равно свертке истинной спектральной плотности мощности с квадратом модуля фурье-преобразования от последовательности окна. Кроме того, Уэлч показал, что в случае, когда последовательность $x(n)$ формируется из реализации гауссовского случайного процесса, а функция $S_x(f)$ является достаточно гладкой в диапазоне частот, где значения ДПФ окна достаточно велики, дисперсия оценки описывается формулой

$$\text{Var}\{\hat{S}_x(f_n)\} = \frac{[S(f_n)]^2}{K} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{K-1} \frac{K-j}{K} \rho(j) \right], \quad (6.112)$$

где

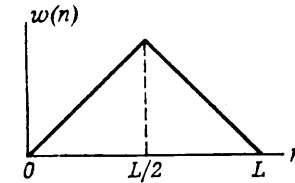
$$\rho(j) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{L-1} w(k) w(k+jD) \right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{L-1} w^2(k) \right]^2}, \quad (6.113)$$

В качестве иллюстрации применения формулы (6.112) рассмотрим случай $D = L$, для которого $\rho(j) = 0$ при $1 \leq j \leq K - 1$. Для этого случая

$$\text{Var}^1[\hat{S}_x(f_n)] = \frac{[S(f_n)]^2}{K}, \quad (6.114)$$

где $K = N/L$. Теперь рассмотрим случай $D = L/2$, причем считаем, что используется треугольное окно, изображенное на фиг. 6.40. Для этого случая $\rho(1) = 1/16$ [см. формулу (6.113)] и $\rho(j) = 0$ при $j \geq 2$. Следовательно,

$$\text{Var}^2[\hat{S}_x(f_n)] = \frac{[S(f_n)]^2}{K'} \left(\frac{17}{16} \right). \quad (6.115)$$



Фиг. 6.40. Треугольное окно.

Но $K' = N/(L/2) = 2K$, поэтому соотношение (6.115) можно переписать в виде

$$\text{Var}^2[\hat{S}_x(f_n)] = \frac{[S(f_n)]^2}{K} \left(\frac{17}{32} \right) = \left(\frac{17}{32} \right) \text{Var}^1[\hat{S}_x(f_n)]. \quad (6.116)$$

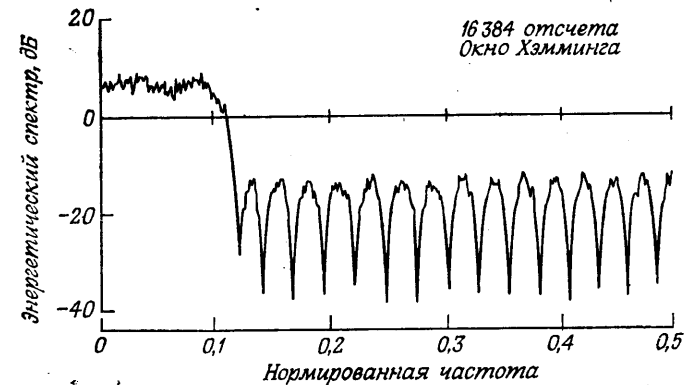
Итак, используя всего лишь сдвиг подпоследовательности на половину ширины окна, а не на полное окно, можно уменьшить дисперсию оценки почти в два раза (но за счет удвоения времени вычисления).

При вычислении взаимного спектра обе последовательности $x(n)$ и $y(n)$ разбиваются на подпоследовательности $x_r(n)$ и $y_r(n)$, как показано на фиг. 6.39. Каждая из подпоследовательностей перед вычислением преобразований $X_r(k)$ и $Y_r(k)$ взвешивается окном. Периодограмма в этом случае имеет вид

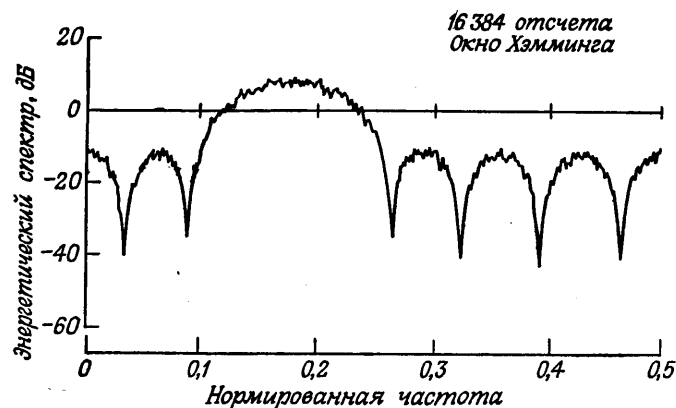
$$I_r(f_k) = \frac{1}{U} X_r(k) Y_r^*(k), \quad (6.117)$$

где U определяется согласно формуле (6.107). Оценка взаимного спектра находится по формуле

$$\hat{S}_{xy}(f_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^K I_r(f_k) = \frac{1}{KU} \sum_{r=1}^K X_r(k) Y_r^*(k). \quad (6.118)$$



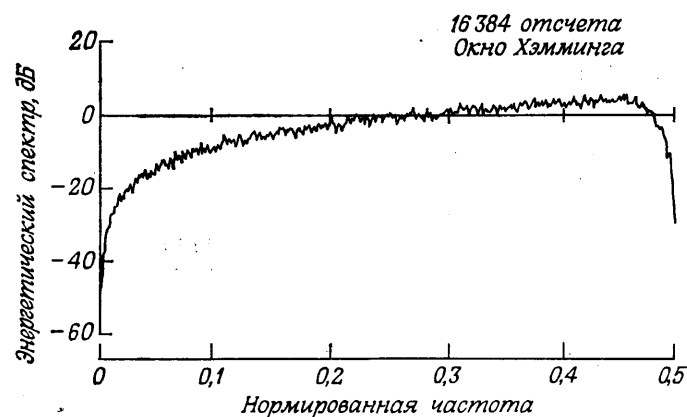
Фиг. 6.41. Спектральная плотность мощности шума на выходе фильтра нижних частот, полученная с помощью периодограмм.



Фиг. 6.42. Спектральная плотность мощности шума на выходе полосового фильтра, полученная с помощью периодограмм.

Снова можно показать, что математическое ожидание этой оценки равно свертке истинной взаимной спектральной плотности мощности с квадратом ДПФ от окна.

На фиг. 6.41—6.43 иллюстрируется практическое использование метода модифицированных периодограмм для оценки спектральной плотности мощности окрашенного шума применительно к трем примерам, приведенным ранее на фиг. 6.35 — 6.37. В каждом из этих примеров спектральная плотность оценивалась на 513 равноотстоящих частотах от $f = 0$ до $f = 0,5$, т. е. с исполь-



Фиг. 6.43. Спектральная плотность мощности шума на выходе дифференциатора, полученная с помощью периодограмм.

зованием L -точечного БПФ ($L = 1024$). Для взвешивания входной последовательности применялось окно Хэмминга. С целью уменьшения дисперсии оценки при фиксированном числе входных отсчетов был использован сдвиг подпоследовательностей на $D = 512$ отсчетов. Общее число подпоследовательностей равно 32, т. е. всего обрабатывалось $N = 16384$ отсчетов. На фиг. 6.41 изображен энергетический спектр шума на выходе фильтра нижних частот (в логарифмическом масштабе), а на фиг. 6.42 и 6.43 — энергетические спектры шумовых последовательностей на выходах полосового фильтра и дифференциатора соответственно.

3. Выводы

Итак, для оценки энергетического спектра или корреляционных функций случайных процессов можно использовать два эффективных метода. В зависимости от конкретной задачи каждый из них может иметь преимущества относительно другого. Общим для обоих методов является то, что среднее значение оценки спектра сходится к определенной величине, а дисперсия оценки стремится к нулю, когда число обрабатываемых отсчетов стремится к бесконечности.

6.19. Свертка и корреляция с использованием теоретико-числовых преобразований¹⁾

До сих пор вопросы свертки и корреляции теоретически и практически рассматривались только для данных, дискретизованных по времени. Квантованные данные (т. е. данные, дискретизованные, по амплитуде) также были рассмотрены в гл. 5, но при этом каждый отсчет представлялся в виде суммы истинной непрерывной величины и ошибки, а задача состояла в том, чтобы оценить ошибку или минимизировать ее. В данном разделе будет использован совершенно другой подход, а именно будут рассматриваться данные, которые могут принимать только квантованные (целые) значения. Будет изложен интересный метод вычисления сумм произведений сдвигаемых последовательностей (сверток и корреляций) таких чисел, позволяющий в некоторых случаях получить существенную экономию времени счета.

Мы были вынуждены бороться с эффектами округления и переполнения только потому, что при выполнении вычислений без устранения переполнений и без округлений часто нарушается основное требование любой строгой системы счисления, состоящее в том, чтобы в результате выполнения операций над числами получались числа только той же системы счисления. Предположим,

¹⁾ Этот раздел книги написан Ч. М. Рэйдером (Линкольновская лаборатория МТИ, Лексингтон, Массачусетс).

что суммируются два десятиразрядных двоичных целых числа при длине слова 10 разрядов. Правильный результат сложения может быть представлен только 11 разрядами. Таким образом, могут иметь место два случая. В первом из них старший разряд суммы равен нулю, и тогда сумма представляется, очевидно, 10-разрядным словом. Во втором случае старший разряд равен 1, так что результат не может быть размещен в имеющемся регистре. Этот случай называется *переполнением*. Для математика переполнение указывает на то, что при операции сложения нарушается условие замкнутости, если система возможных чисел включает только 10-разрядные целые числа. При умножении возникают еще большие проблемы подобного рода.

Чтобы удовлетворить условию замкнутости, и были введены операции округления и усечения. Фактически были изменены определения сложения и умножения, которые стали включать операции сдвига и округления. В результате условие замкнутости стало выполняться, однако равенство перестало быть точным.

Совершенно другой подход состоит в том, чтобы выполнять вычисления в соответствии с другими, модифицированными определениями сложения и умножения, которые удовлетворяли бы и условию замкнутости, и условию точного равенства, но за счет допущения о «неправильных» промежуточных результатах. Если и конечный результат такой процедуры вычислений «неправильный», она не представляет интереса. Однако если *правильный конечный* результат гарантирован, тот факт, что промежуточные результаты были неверны, не имеет никакого значения. Хорошим примером подобного рода вычислений является суммирование накопленных целых чисел с использованием фиксированной запятой (в обратном или дополнительном кодах). Если заранее известно, что результирующая сумма может быть корректно представлена при заданной длине слова, любое переполнение в процессе счета можно не учитывать. Для этого примера справедлив новый подход; изучим его более детально для общего случая. Рассмотрим правила сложения и умножения по модулю M , где M — целое, называемое модулем.

Допустимыми числами при выполнении операций будут считаться числа $0, 1, 2, 3, 4, \dots, M-1$. Два числа a и b называются сравнимыми по модулю M , если их разность в точности кратна M ; следовательно, понятия сравнимости и равенства не совпадают, за исключением случая, когда разность между a и b меньше M . В последнем случае единственное число, кратное и меньшее M , может быть только нулем, поэтому a и b должны быть равны. При сложении чисел с использованием слов k -разрядной длины результат в случае переполнения отличается от «обычного» результата на величину, кратную 2^k . Следовательно, при условии, что $M = 2^k$, результат сложения будет сравним по модулю M с обычной сум-

мой (содержащей больше чем k разрядов). По индукции конечный результат будет сравнимым с обычной суммой, несмотря на возможные многократные переполнения. Если же известно, что конечная обычная сумма представляется k -разрядным числом, то, так как разность между двумя k -разрядными числами меньше, чем 2^k , обычный и получаемый результаты должны быть не только сравнимыми по модулю 2^k , но и равными. Ниже будет показано, как, используя другие модули, этот принцип можно успешно применять при выполнении более сложных операций, чем простое суммирование.

Напомним основные свойства сравнений:

1. Переместительный закон: $a + b \equiv b + a$; $ab \equiv ba$.
2. Сочетательный закон: $(a + b) + c \equiv a + (b + c)$; $(ab)c \equiv a(bc)$.
3. Распределительный закон: $a(b + c) \equiv ab + ac$.
4. Тождественность: $a + 0 \equiv a$; $a(1) \equiv a$.
5. Отрицание: для каждого a существует элемент $(-a)$, такой, что $a + (-a) \equiv 0$.
6. Замкнутость: оба числа, $(a + b)$, и ab , являются допустимыми числами рассматриваемой системы счисления.
7. Аналогия: если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a + c \equiv b + d$ и $ac \equiv bd$; если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $a \equiv c$; если $a \equiv b$, то $b \equiv a$; ...

Необходимо сделать два замечания. Во-первых, при выполнении вычислений по модулю M замкнутость сохраняется всегда, поскольку, если разрядность результата вычисления превышает длину слова, есть возможность, не изменяя результата, вычитать из него любое целое число модулей, так как при этом он остается сравнимым с исходным результатом арифметической операции. Во-вторых, несмотря на то что существует операция, обратная сложению, с помощью которой можно производить вычитание, нет гарантии, что существует операция, обратная умножению, так что деление не обеспечивается. Это положение справедливо и для целых чисел с обычной арифметикой. Однако в арифметике по модулю M все же имеется ряд взаимно обратных чисел. Так, если $M = 14$, то целое $a = 2$ не имеет обратного ему числа, но целые $a = 3$ и $b = 5$ являются взаимно обратными, поскольку $3 \cdot 5 = 15$, что сравнимо с 1 по модулю 14.

Так как в дальнейшем будут использоваться и сравнения, и равенства, необходимо ввести соответствующие обозначения. Обозначим операцию сравнения как $a \equiv$, а равенство обычным символом $=$. Если некоторая величина должна быть заменена на другую, сравнимую с исходной и принадлежащую ряду $0, 1, 2, \dots, M-1$, будет использоваться символ $((\cdot))$, так что $((x)) = x + rM$, где r — целое, и

$$0 \leq ((x)) < M.$$

Операция $((\cdot))$ называется приведением к остатку. Она используется для обеспечения замкнутости без нарушения сравнения при вычислениях с конечной длиной слова. Один из способов приведения к остатку состоит в делении числа на модуль и сохранении только остатка. Так, если $M = 14$, то $((36)) = 8$, так как

$$\frac{36}{14} = 2 \frac{8}{14}.$$

На практике применение этого способа приведения к остатку требует больших затрат времени; к счастью, существуют более простые приемы.

Нас интересует вычисление сверток и корреляций, но, как известно, корреляцию можно представить в виде свертки, поэтому ниже анализируется только вычисление свертки. Поскольку операции умножения и сложения будут рассматриваться по модулю M , имеет смысл говорить о свертке двух последовательностей по модулю M . Пусть при использовании обычной арифметики последовательность c_n задается соотношением

$$c_n = a_n * b_n.$$

При использовании в вычислениях операции $((\cdot))$ может быть получена последовательность d_n , так что $d_n \equiv c_n$. Для нас наибольший интерес представляют случаи, когда, вычислив d_n , можно получить c_n . Пусть наибольшее и наименьшее возможные значения c_n равны c_u и c_v соответственно. Тогда, если M больше, чем $(c_u - c_v)$, может существовать только одно число, сравнимое с d_n по модулю M , а именно c_n . В этом случае вычисление d_n фактически дает c_n . Конечно, всегда есть возможность увеличить верхний предел значения свертки, выбрав модуль, превосходящий эту величину.

Покажем теперь, что между способами вычисления свертки с использованием БПФ и арифметики по модулю M существует полная аналогия, хотя это справедливо лишь для определенных значений модуля M . Чтобы продемонстрировать это утверждение, следует предварительно рассмотреть свойства показательной последовательности по модулю M .

Рассмотрим последовательность $((a^n))$. Для нее справедливо соотношение

$$((a^n)) = ((a \cdot ((a^{n-1}))), \quad (6.119)$$

или

$$a^n \equiv a \cdot a^{n-1} \pmod{M}. \quad (6.120)$$

Последнее соотношение соответствует автомату с конечным числом состояний; величина a может принимать только M значений, так что $((a^n))$ должна периодически повторяться через самое большее $(M - 1)$ значений n (случай $a = 0$ приводит к его собственной последовательности со значительно более коротким периодом).

Эта периодичность может быть либо абсолютной, либо с установлением в начале. Приведем два примера:

$$1. M = 8, a = 2.$$

$a^0 \equiv 1, a^1 \equiv 2, a^2 \equiv 4, a^3 \equiv 0, a^n \equiv 0$ при $n > 2$; периодичность с установлением в начале.

$$2. M = 9, a = 2.$$

$a^0 \equiv 1, a^1 \equiv 2, a^2 \equiv 4, a^3 \equiv 8, a^4 \equiv 7, a^5 \equiv 5, a^6 \equiv 1, a^n \equiv \equiv a^{n-6}$; периодичность абсолютная.

Второй пример значительно интереснее. Из свойств показательной последовательности следует, что произведение a^p и a^{q-p} сравнимо с 1, и, следовательно, они являются взаимно обратными числами, несмотря на отсутствие в общем случае в арифметике по модулю M операции, обратной умножению. В обычной арифметике с целыми числами подобной ситуации не возникает, поэтому здесь нет аналогии с ДПФ, выполняемым с применением обычной арифметики в целых числах. Второй пример представляет по крайней мере один случай такого выбора модуля и вида степенной последовательности, при котором последовательность обладает свойством периодичности, аналогичным свойству $W^N = 1$ в поле комплексных чисел. Чтобы не искать наугад подобные случаи, сформулируем соответствующую теорему:

Теорема. Величины p и q являются взаимно обратными по модулю M , если p и M являются взаимно простыми.

Доказательство.

Поскольку возможно M значений q , составим следующий набор уравнений:

$$p \cdot 0 \equiv ?$$

$$p \cdot 1 \equiv ?$$

$$p \cdot 2 \equiv ?$$

$$\vdots$$

$$p \cdot (M - 1) \equiv ?$$

Существуют две возможности: либо в одном из этих M уравнений вместо вопросительного знака стоит 1 (означающая, что уравнение соответствует правильному значению q , обратному p), либо 1 нет ни в одном из уравнений. В последнем случае, поскольку имеется M уравнений, а величин справа может быть только $M - 1$ (не больше), должна наблюдаться повторяемость. Пусть повторяемость будет при $q = a$ и $q = b$. Положим, что $a > b$, и запишем

$$p \cdot a \equiv p \cdot b \pmod{M}$$

или

$$p(a - b) \equiv 0 \pmod{M}.$$

Следовательно, M является делителем $p(a - b)$. Далее, $a - b$ меньше M и поэтому не может содержать все сомножители M . Однако, согласно условию, p не имеет общих сомножителей с M . Следовательно, вторая из возможностей приводит к противоречию и становится ясно, что pq может быть сравнимо с 1 по модулю M , если только p и M не имеют общих сомножителей. В то же время было показано, что если p не имеет общих сомножителей с M , то в записанных выше уравнениях не может быть повторений, поэтому в одном из них вместо вопросительного знака должна быть 1. Таким образом, доказаны и необходимое, и достаточное условия теоремы.

Из приведенной теоремы непосредственно следует, что произвольное число x , взаимно простое с M , позволяет сформировать степенную последовательность $((x^n))$ с периодом, меньшим или равным $(M - 1)$, для всех членов которой существуют обратные им числа по модулю M или, что еще важнее, период последовательности $((x^n))$ можно связать с модулем M . Конечно, эта последовательность может содержать лишь члены, взаимно простые с M (поскольку само число x является взаимно простым с M , что согласуется с главным условием периодичности). Количество целых чисел, меньших M и взаимно простых с M , является функцией M и обозначается как $\phi(M)$. Ясно, что оно дает максимально возможный период последовательности $((x^n))$. Обозначим действительный период последовательности через N . С математической точки зрения это означает, что x имеет порядок N по модулю M^1). Эйлер доказал следующую интересную теорему:

$$((x^{\phi(M)})) = 1. \quad (6.121)$$

Докажем ее методом, аналогичным доказательству предыдущей теоремы. Для этого представим, что записаны все целые r_i , меньшие M и взаимно простые с M , и умножим каждое из них на x по модулю M . Поскольку все произведения должны отличаться друг от друга и быть взаимно простыми с M , они будут представлять собой переставленные значения исходного набора r_i . Перемножим все члены исходного набора и полученных произведений:

$$\prod_{i=1}^{\phi(M)} ((xr_i)) \equiv \left(\prod_{i=1}^{\phi(M)} r_i \right) \pmod{M}. \quad (6.122)$$

Сократив на произведение r_i , находим, что $x^{\phi(M)}$ сравнимо с 1, что и требовалось доказать. Таким образом, получен очень важный результат: период N последовательности $((x^n))$ должен быть делителем $\phi(M)$.

¹⁾ То есть $x^N \equiv 1 \pmod{M}$ и период последовательности $((x^n))$ равен N . — Прим. ред.

Часто в качестве модуля выбирают простое число P . По определению $\phi(P) = P - 1$, и любое целое, меньшее P , является взаимно простым с P , так что

$$x^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}. \quad (6.123)$$

Этот результат известен как теорема Ферма. Практически все вопросы теории чисел так или иначе связаны с работами Ферма; ниже мы еще неоднократно будем к ним обращаться.

Изучение свойств последовательности $((x^n))$ несколько увело нас в сторону от интересующего вопроса об аналогии между операциями вычисления свертки методом БПФ и с использованием арифметики по модулю M . Чтобы установить ее, проведем сначала аналогию с алгоритмом БПФ и, следовательно, с ДПФ. Определим теоретико-числовое преобразование последовательности из N целых чисел x_n по модулю M как некоторую другую последовательность из N целых чисел X_k , рассчитываемых согласно следующей формуле:

$$X_k = \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk} \right) \right), \quad (6.124)$$

где α — целое число, взаимно простое с M и имеющее порядок N . Формула (6.124) аналогична ДПФ, но в качестве $W = \exp(j2\pi/N)$ здесь используется целое число α , N -я степень которого сравнима с 1, и, кроме того, все вычисления проводятся по модулю M . Напомним, что при выводе алгоритма БПФ использовался тот факт, что $W^N = 1$. Поэтому и теоретико-числовое преобразование может быть вычислено с применением аналогичного алгоритма, но с заменой умножений на степени W в БПФ умножениями на степени α . Как и в случае ДПФ, для существования стандартных алгоритмов БПФ N должно быть составным целым числом. Однако в отличие от ДПФ сами теоретико-числовые преобразования не применяются. Ниже они будут использованы лишь для вычисления свертки и корреляций. Правда, при этом придется перемножать соответствующие коэффициенты теоретико-числовых преобразований двух последовательностей, например x_n и h_n . Для получения круговой свертки исходных последовательностей используется обратное преобразование от последовательности этих произведений. Таким образом, придется определить и обратное теоретико-числовое преобразование. По аналогии с ДПФ оно должно иметь вид

$$x_m = \left(\left(N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \alpha^{-mk} \right) \right). \quad (6.125)$$

Отрицательный знак в показателе степени α в преобразовании (6.125) имеет определенный смысл, поскольку было показано, что члены периодической степенной последовательности имеют

обратные им числа. При записи преобразования (6.125) были сделаны два предположения. Первое касается существования числа N^{-1} , обратного числу N . Известно, что оно существует, если N и M не имеют общих множителей. Второе предположение состоит в том, что преобразование (6.125) действительно является обратным теоретико-числовым преобразованием. Чтобы показать это, подставим формулу (6.124) в (6.125) и получим таким образом еще одно соотношение между N , M и α . Итак,

$$x_m = \left((N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk} \alpha^{-mk}) \right). \quad (6.126)$$

Меняя порядок суммирования, находим

$$x_m = \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{k=0}^{N-1} N^{-1} \alpha^{(n-m)k} \right) \right). \quad (6.127)$$

Можно показать, что оба эти выражения являются взаимно обратными. Для этого убедимся, что

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^{ik} \right) = N \delta(i), \quad \text{где } \delta(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0 & \text{при других } i. \end{cases} \quad (6.128)$$

При $i \equiv 0 \pmod{N}$ имеем $\alpha^i \equiv 1 \pmod{M}$, так что равенство (6.128) легко доказывается. Если же $i \not\equiv 0 \pmod{N}$, то умножая на $1 - \alpha^i$, получим

$$\left((1 - \alpha^i) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^{ik} \right) = ?$$

Все смежные члены суммы взаимно уничтожаются, остаются первый и последний, равные $((1 - \alpha^{Nk}))$, которые также взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$\left((1 - \alpha^i) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^{ik} \right) = 0. \quad (6.129)$$

Отсюда можно легко получить нужный результат, если не учитывать необходимости делить обе части равенства (6.129) на $1 - \alpha^i$, (деление как операция не определено). Сократить на множитель $1 - \alpha^i$ можно только при условии, что существует обратное ему число, и только при этом формула (6.125) действительно представляет обратное теоретико-числовое преобразование. Сформулированное условие, заключающееся в том, что число $1 - \alpha^i$ не должно иметь общих множителей с M для $i = 1, 2, \dots, N - 1$, и является последним ограничением.

Подведем итог вышеизложенному.

1. Теоретико-числовое преобразование последовательности из N отсчетов определяется следующим образом:

$$X_k = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk} \right),$$

где модуль M и длина последовательности N не имеют общих множителей, N является делителем $\phi(M)$, α выбирается так, чтобы оно имело порядок N и было взаимно простым с M .

2. Обратное теоретико-числовое преобразование последовательности из N отсчетов определяется следующим образом:

$$x_m = \left((N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \alpha^{-mk}) \right),$$

где $(1 - \alpha^k)$ является взаимно простым с M для всех k , за исключением тех, которые сравнимы с 0 по модулю N .

Все эти условия можно сформулировать в более сжатой форме следующим образом (без доказательства). Преобразование будет обеспечивать вычисление круговой свертки при α , имеющем порядок, равный N , тогда и только тогда, когда $P - 1$ делится на N , причем P — любой из простых множителей M .

Доказательство теоремы о свертке для теоретико-числового преобразования очевидно. Математические выкладки будут такими же, как и для ДПФ; читатель может проделать их самостоятельно в качестве упражнения. Поэтому будем считать доказанным, что, вычислив обратное преобразование от произведения теоретико-числовых преобразований, можно получить результат, сравнимый с круговой сверткой исходных последовательностей. Если число N составное, для вычисления прямого и обратного преобразований можно использовать алгоритм БПФ и таким образом очень быстро получить результат, сравнимый с круговой сверткой последовательностей целых чисел.

Здесь, по-видимому, имеет смысл привести практический пример. Чтобы продемонстрировать математическую сторону, а не эффективность вычислений, рассмотрим простейший случай: найдем четырехточечную круговую свертку последовательности 1, 2, 0, 0 саму с собой. Выберем модуль $M = 17$ и $\alpha = 4$. Величина N , естественно, равна 4, а α , как легко убедиться, имеет порядок N по модулю M . N^{-1} равно 13. Перепишем для удобства все степени α : $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = 4$, $\alpha^2 = 16$, $\alpha^3 = 13$.

Прямое преобразование с применением БПФ:

Исходная последовательность	1	2	0	0
После двоичной инверсии	1	0	2	0
После первого этапа вычислений (после сложений и вычитаний)	1	1	2	2
После второго этапа вычислений	3	9	16	10

В итоге получено преобразование исходной последовательности. Возведем его коэффициенты в квадрат по модулю 17:

Преобразование от свертки $\begin{matrix} 9 & 13 & 1 & 15 \end{matrix}$

При обратном преобразовании умножаем на $N^{-1} = 13$, изменяем знак в показателе степени¹⁾ и выполняем преобразование аналогично предыдущему:

Преобразование, умноженное на 13	15	16	13	8
После изменения знака показателя степени	15	8	13	16
После двоичной инверсии	15	13	8	16
После первого этапа вычислений	11	2	7	9
После второго этапа вычислений	1	4	4	0

Итак, получен результат круговой свертки исходной последовательности с ней самой. Поскольку максимальное значение истинного результата равно 4, сравнимость полученных значений по модулю 17 обеспечивает равенство. Заметим, что в процессе вычислений все результаты записывались по модулю 17 с приведением к остатку всякий раз, когда результат вычисления выходил за пределы от 0 до 16.

Рассмотрим теперь практические аспекты нового метода. Свертки, полученные с использованием теоретико-числового преобразования, в отличие от обычного метода с применением БПФ являются точными. Поскольку числа по модулю M образуют конечное множество, ни на одном из этапов вычислений приближения не вводились. Действительно, при наличии ошибки даже в одном, самом младшем разряде результат был бы совершенно неверным. К счастью, данная система счисления не требует ни округления, ни усечения даже при самых сложных вычислениях. В практических применениях интерес представляет скорее не сравнимость результатов, а их равенство, поэтому значения свертки должны быть ограничены тем или иным способом, чтобы можно было заменить сравнимость на равенство. Если, например, каждая из двух 64-точечных последовательностей представлена 10-разрядными числами, для точного представления результата необходим 26-разрядный регистр. Таким образом, вычисления с использованием теоретико-числового преобразования потребуют использования модуля M , превышающего 2^{26} . Было предложено несколько способов совместного использования меньших модулей, но при этом возникают другие трудности.

Еще одна особенность использования теоретико-числового преобразования состоит в необходимости часто выполнять операции приведения к остатку, чтобы избежать представления промежуточных результатов словами с большим числом разрядов. В самом

¹⁾ Как и в случае ДПФ, одну и ту же программу можно использовать для вычисления и прямого, и обратного преобразований.

деле, фактически после каждой операции необходимо выполнить приведение к остатку. Для этой цели, как было отмечено выше, можно использовать деление числа на модуль и сохранение лишь остатка, однако деление требует больших затрат времени и его стараяются избегать, особенно при выполнении совместно со сложением. В действительности, поскольку нам нужен только остаток, выполнять деление нет необходимости. Методы определения остатка зависят от конкретного M , причем простейшие с точки зрения нахождения остатка, но в то же время наиболее важные модули¹⁾ имеют вид $M = 2^g \pm 1$.

Арифметика по модулю $2^g - 1$ известна достаточно хорошо. Все величины представляются g разрядами. Результаты арифметических действий (суммы и произведения), для которых требуется больше чем g разрядов, могут быть легко приведены к остаткам, если учесть, что 2^g сравнимо с 1 по модулю $2^g - 1$, так что при сложении разряд переноса с весом 2^g просто добавляется к младшему значащему разряду. Такой перенос называют *циклическим*, а соответствующую систему счисления — *арифметикой с представлением чисел в обратном коде*. При умножении получается более одного дополнительного разряда сверх исходных g разрядов. Первый дополнительный разряд имеет вес, сравнимый с 1, последующие разряды имеют веса, сравнимые с 2, 4 и т. д. Следовательно, дополнительные разряды произведения сверх младших g значащих разрядов образуют двоичное число, которое можно добавить к двоичному числу, состоящему из младших g значащих разрядов произведения. Например, при $g = 8$, $M = 255$ произведение $ab = 258 = 100000010$ можно разложить на два слова: 00000001 и 00000010, сложение которых дает 00000011 = 3.

Проводимые в настоящее время исследования различных M в виде $2^g - 1$ позволили найти несколько интересных модулей, но ни один из них не представляет такого интереса, как модуль вида $M = 2^g + 1$.

Арифметика по модулю $2^g + 1$ изучена менее детально. Для представления всех возможных величин здесь требуется $g + 1$ разрядов. Это представление в какой-то мере неэффективно, поскольку только для одного числа, а именно для 2^g , старший значащий разряд равен не нулю, а единице. Но если не учитывать неэффективность использования разрядов, то между данной и рассмотренной выше арифметикой можно обнаружить сходство. Разряд с весом, равным 2^g , представляет величину, сравнимую с -1 по модулю M . Следовательно, вместо циклического переноса для сложения нужно производить циклический перенос для вычитания. В этом и состоит отличие от предыдущего случая, но при

¹⁾ Модуль $M = 2^g$ не имеет интересных для нас прямых и обратных преобразований, поскольку в этом случае N должно быть равно единице.

этом, помимо обеспечения циклического переноса, не требуется какое-либо дополнительное оборудование. При умножении произведение имеет обычно больше чем g разрядов. Если разложить произведение на два слова, одно из которых представлено младшими разрядами, а другое — остальными разрядами, то второе слово следует вычитать из первого. Например, при $g = 8$, $M = 257$ произведение $ab = 258 = 100000010$ раскладывается, как и прежде, на 00000001 и 00000010 , т. е. на 1 и 2, и разность между ними равна $2 - 1 = 1$. Таким образом, приведение к остатку при модуле $M = 2^g + 1$ выполняется почти так же просто, как при модуле $2^g - 1$. Не следует забывать, что в данном случае есть одна величина 2^g , которая представляется $g + 1$ разрядами. Чтобы вычисления выполнялись без ошибки, необходимо принять две меры предосторожности. Во-первых, следует учитывать особый случай, когда результат сравним с -1 . Если (снова для $M = 257$) получен результат 100000000 , то его разложение, составленное из старших разрядов, дает $+1$, а разложение из младших разрядов дает 0 . Циклическое вычитание для этого случая дает -1 , т. е. результат правильный, но его нельзя представить восьмизрядным словом. Вторую предосторожность необходимо соблюдать при умножении в том случае, когда численное значение слова, образованного старшими разрядами, превысит численное значение слова из младших разрядов, так что при вычитании получается отрицательный результат. В этом случае к отрицательной величине необходимо добавить M с тем, чтобы результат находился в диапазоне от 0 до $M - 1$. Конечно, при таком сложении нельзя забывать и о первой предосторожности.

Упомянем также и правило изменения знака числа: нужно инвертировать g разрядов и добавить число $+2$ (снова используя циклическое вычитание).

Общепризнано, что эта арифметика несколько более сложная, чем обычно используемая система сложений и умножений. С другой стороны, здесь нет необходимости в делении для приведения к остатку, поскольку деление заменяется значительно более простой операцией. Таким образом, среди возможных модулей $M = 2^g + 1$ будем искать такие g , которые приводят к преобразованиям со свойствами, представляющими для нас интерес, не забывая об ограничивающих соотношениях, связывающих M , N и α . Простейшим из ограничений является случай простых M . Можно поставить вопрос: при каких значениях g модуль $M = 2^g + 1$ является простым? Ответ хотя и неполный, но зато удивительно простой, состоит в следующем. Пусть g будет нечетным, скажем $g = 2r + 1$. Тогда $M = 2 \cdot 4^r + 1$ и, следовательно, $M \equiv 0 \pmod{3}$. Это означает, что M делится на 3, т. е. число M не является простым¹⁾. Исследование четных значений g равносильно рас-

¹⁾ Кроме $M = 3$.

смотрению модулей $M = 4^h + 1$. Теперь, если h нечетное, M будет делиться на 5, поскольку $4 \equiv -1 \pmod{5}$. Следовательно, M не является простым¹⁾. Случай четных h соответствует модулю $M = 16^i + 1$. Здесь, если i нечетное, M имеет сомножитель 17. Методом итераций можно показать, что только те значения M могут быть простыми, у которых g являются степенью двойки. Заметим, что последнее утверждение не доказано; показано лишь, что M является составным, если g имеет какой-либо нечетный сомножитель. Первыми несколькими членами последовательности простых модулей являются $M = 3$, $M = 5$, $M = 17$, $M = 257$, $M = 65537$. Ферма предположил, но не смог доказать, что все числа вида $2^{2^m} + 1$ являются простыми. На самом же деле число $2^{32} + 1$ является составным и имеет сомножитель 641, а все последующие числа Ферма тоже, по-видимому, являются составными. Целые числа вида $2^{2^m} + 1$, как простые, так и составные, называются *числами Ферма*. Другое важное для нас свойство известно из работ Лукаса, еще одного известного специалиста в области теории чисел, который показал, что любой простой сомножитель p числа Ферма должен иметь вид $p = 2^{m+2}k + 1$. Последнее означает, что когда модуль равен числу Ферма, должно существовать теоретико-числовое преобразование для любого N , равного степени двойки и не превышающего 2^{m+2} , если число Ферма составное, а также для любого N , равного степени двойки и меньшего чем M , если число Ферма простое. Такие размеры преобразований позволяют использовать алгоритмы, подобные простейшим алгоритмам БПФ с основанием два.

Одно интереснейшее свойство преобразования по модулю M , равному числу Ферма, выявляется при анализе возможных значений α . Поскольку $2^g \equiv -1 \pmod{M}$, то $2^{2g} \equiv 1 \pmod{M}$. Из простых соображений ясно, что никакая меньшая, чем $2g$, положительная степень двойки не может быть порядком числа 2 по модулю M . В самом деле, для $M = 2^{2m} + 1$ при $\alpha = 2$ и $N = 2^{m+1}$ все необходимые условия действительно удовлетворяются. Преобразование для этого необычного случая будет иметь вид²⁾

$$A_k = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n 2^{nk} \right), \quad N = 2g = 2^{m+1}.$$

Обратное преобразование равно

$$a_n = \left(2^t \sum_{k=0}^{N-1} A_k 2^{-nk} \right),$$

¹⁾ Кроме $M = 5$.

²⁾ Теоретико-числовые преобразования с величиной α , равной 2 или степени 2, называют преобразованиями Рэйдера. — *Прим. ред.*

где

$$t = 2^{m+1} - m - 1.$$

Пример. $m = 3$, $2^m = 8$, $M = 257$, $N = 16$, $t = 12$. Этот особый случай преобразования по модулю чисел Ферма называют числовым преобразованием Ферма. Отметим, что как в прямом, так и в обратном преобразовании используются только умножения на степень двойки. Последнее справедливо и для вычислений числовых преобразований Ферма с помощью алгоритма БПФ. Кроме того, важно, что умножение на степень двойки, достаточно простое в обычно используемой системе счисления с представлением чисел в дополнительном коде, оказывается довольно простым и в системе счисления по модулю чисел Ферма: число сдвигают влево на количество разрядов, равное степени двойки, и затем вычитают слово, образованное старшими разрядами, из слова, образованного младшими разрядами. Поскольку первое из этих слов имеет после сдвига вид 0000xxxx (рассматривается случай сдвига восьмиразрядного слова на четыре разряда), а второе имеет вид yyyu0000, то вычитание становится чрезвычайно простым и требует меньшего числа логических операций, чем, например, в обычном полном сумматоре. Оно выполняется следующим образом:

$$\begin{array}{r} y \ y \ y \ y \ \overline{x \ x \ x \ x} \\ \underline{\quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad +1} \end{array}$$

т. е. к младшему значащему разряду представленного в обратном коде слова, сдвинутого за разрядную сетку, добавляется +1, а к последнему младшему значащему разряду сдвинутого исходного слова добавляется -1. Заметим, что перенос, связанный с добавлением +1, будет компенсировать -1, тогда как циклическое вычитание, связанное с добавлением -1, приводит к добавлению еще одной единицы в младший значащий разряд слова.

Ко времени написания книги этап логического проектирования арифметического устройства для выполнения числового преобразования Ферма еще не был завершен, но само преобразование было запрограммировано на ЦВМ ИВМ 360. Оказалось, что с помощью этого преобразования свертки можно вычислять примерно в три раза быстрее, чем с использованием обычного алгоритма БПФ. Причинами сокращения времени вычисления являются следующие:

1. Числовое преобразование Ферма выполняется без умножений, поэтому для расчета N -точечной свертки требуется всего N умножений. Общее число сложений и вычитаний равно $2N \log_2 N$; кроме того, требуется выполнить $N \log_2 N$ «умножений» на степень двойки.

2. Используются операции только над действительными числами, что обеспечивает выигрыш во времени преобразования в два раза по сравнению с обычным алгоритмом БПФ.

3. Числовое преобразование Ферма позволяет вычислить точное значение свертки; при этом нет необходимости использовать арифметику с плавающей запятой, делать проверки на переполнение или принимать какие-либо другие меры предосторожности.

Следует, однако, рассмотреть и недостатки нового метода. Один из них связан с ограничениями, накладываемыми на выбор модуля, размера преобразования и величины α , что сильно сужает круг применений. Тот факт, что получаемый результат здесь всегда точный, вынуждает использовать большие модули и, следовательно, оперировать на протяжении всего вычисления преобразования словами большой длины. При аппаратурной реализации стоимость памяти может намного превзойти стоимость умножителей, так что почти полное исключение умножений может все-таки не компенсировать увеличения стоимости памяти. В то же время при цифровой обработке сигналов почти никогда не требуется получать абсолютно точный результат.

Другой фактор, способствующий увеличению длины слова, связан с тем, что для чисел Ферма и $\alpha = 2$ размер круговой свертки может быть равен только 2^{m+1} . Последнее означает, что длина слова должна быть примерно такой же, как и размер самой свертки. В результате для свертки, обычно представляющих интерес, требуемая длина слова составляет сотни разрядов, что совершенно нереально в настоящее время. Ниже будут кратко рассмотрены возможности некоторого смягчения этого ограничения.

На практике в расчет приходится принимать и другие соображения. При обработке сигналов на ЦВМ нет необходимости сводить к минимуму число умножений, если ЦВМ имеет встроенный быстродействующий умножитель. В то же время при всей простоте операций по модулю чисел Ферма для их выполнения требуются несколько команд программы. Более того, возможности программирования операции приведения к остатку существенно зависят от длины слова машины. Читатель может в этом убедиться, написав программу приведения к остатку по модулю $F = 2^{32} + 1$ для ЦВМ с длиной слова, равной 12, 16, 18, 24 и 32 разряда, используя аналогичные наборы команд для каждой из ЦВМ. Кроме того, хотя циклический перенос разрядов в слове может показаться более простой операцией, чем умножение, с точки зрения времени выполнения эта операция может оказаться далеко не элементарной, особенно если речь идет об очень простой вычислительной машине, в которой, как правило, за один такт выполняется сдвиг только на один разряд.

Ограничение, связанное с размером свертки, можно смягчить двумя способами. Во-первых, заметим, что N можно удвоить, если

в качестве α использовать величину, имеющую порядок $2^{m+2} \pmod{M}$. Агарвал и Баррас показали, что величина α , задаваемая формулой

$$\alpha = 2^c - 2^d, \quad \text{где } c = 3 \cdot 2^{m-2} \text{ и } d = 2^{m-2}, \quad (6.130)$$

имеет порядок 2^{m+2} по модулю $M = 2^{2m} + 1$. Легко показать, что $\alpha^2 \equiv 2 \pmod{M}$, так что, как и прежде, четные степени α являются степенями двойки. В то же время нечетные степени α не сравнимы с 1, поэтому порядок α будет вдвое превышать порядок числа 2 по модулю M . Умножение на степени числа α , задаваемого формулой (6.130), ненамного сложнее умножения на степени двойки, поскольку α состоит из двух степеней двойки. В то же время оно проще обычного умножения, причем самое важное то, что оно используется либо только на первом, либо на последнем (но не на обоих) из $\log_2 N$ этапов алгоритма быстрого числового преобразования по модулю чисел Ферма, поскольку только на этих этапах могут встретиться нечетные степени α .

Значительно более существенное смягчение ограничения размера преобразования может быть достигнуто несколько более дорогой ценой за счет того, что любую одномерную свертку можно вычислить, используя алгоритмы свертки двумерных последовательностей. Это, казалось бы, абстрактное утверждение в действительности основано на том, что обычная свертка может быть вычислена методами расчета круговой свертки. Для этого обрабатываемые данные представляются в виде таких двумерных массивов с дополнением нулями и повторением части данных там, где это необходимо, чтобы результат вычисления двумерной свертки совпадал с искомыми значениями одномерной свертки. Читатель может убедиться, что следующую одномерную круговую свертку: $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q\} * \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q\}$

можно найти, вычислив круговую двумерную свертку двух следующих двумерных массивов:

$$\begin{pmatrix} m & n & p & q & a & b & c & d \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ e & f & g & h & i & j & k & l \\ i & j & k & l & m & n & p & q \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A & B & C & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & F & G & H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & J & K & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & N & P & Q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что половина результатов дает правильный ответ, а остальные результаты — неверный. Применение двумерной свертки для вычисления одномерной свертки дает возможность использовать двумерное числовое преобразование Ферма. В результате если в одномерном случае модуль ограничивал размер последовательности N точками, то в двумерном случае появляется возможность обрабатывать последовательности из $(1/2)N^2$ отсчетов, если,

конечно, не возникает проблем, связанных с точностью представления результатов.

Рассмотрев достоинства и недостатки числового преобразования Ферма, можно остановиться на том, в каких задачах применение нового преобразования представляется целесообразным. Такие задачи должны иметь следующие характеристики: 1) последовательности должны быть достаточно короткими (суммируется около 50 произведений сдвинутых членов); 2) существует необходимость в высокой точности; 3) умножение является значительно более дорогостоящей операцией по сравнению со сложением.

Рассмотрим два возможных применения нового преобразования. Первое относится к оценке спектров (одновременно большого количества) широкополосных сигналов. Из теории спектрального анализа известно, что число сдвигов при расчете корреляционной функции может составлять лишь долю от полного количества обрабатываемых отсчетов. В разд. 6.18 был рассмотрен алгоритм вычисления автокорреляционной функции, основанный на суммировании в частотной области. Но подобное суммирование можно выполнить и в области чисел Ферма. Используя такую методику и применяя 32-разрядные слова, можно рассчитать 65 значений автокорреляционной функции при $N = 128$ для такого количества исходных отсчетов, которое ограничено лишь однозначным представлением чисел в пределах выбранного модуля. При длине слова в 10 разрядов (включая знак) таким способом можно обработать 2000 отсчетов. Помимо сложений, при расчете коэффициентов преобразований Ферма и накоплении достаточно выполнить лишь одно умножение на каждый входной отсчет вместо 65 умножений при обычном методе вычисления корреляции. Естественно, что получаемый при этом результат будет точным, что в данном случае может быть даже более важным, чем в большинстве других. (Следует отметить, что описанное в данном разделе теоретико-числовое преобразование в равной степени применимо к числам как без знака, так и со знаком.)

Рассмотрим второе возможное применение теоретико-числового преобразования, относящееся к двумерной КИХ-фильтрации. Речь пойдет об обработке многоэлементного изображения с использованием произвольной импульсной характеристики размером $L \times L$. Если L имеет величину порядка $5 \div 20$, применение БПФ для вычисления свертки будет неэффективным, хотя и более выгодным, чем в одномерном случае. Однако числовое преобразование Ферма будет весьма эффективным. Для импульсной характеристики указанных размеров в отличие от фильтрации прямым методом число умножений сокращается примерно на два порядка за счет увеличения числа сложений, которое тем не менее обычно даже меньше, чем в прямом методе. Таким образом, можно ожидать, что числовое преобразование Ферма вскоре будет использо-

ваться для линейной фильтрации изображений.

Алгоритмы обработки в конечных математических структурах, аналогичные алгоритмам быстрого преобразования Фурье, представляют интересную область исследований, и их применения, несомненно, не ограничиваются лишь вычислением сверток. Как было показано, существует принципиально новый подход к организации вычислений с характерными для него взаимосвязями между разрядностью слова, модулем, величиной α , допустимой неоднозначностью значений результатов и т. д. Возможности этого нового подхода, первоначально казавшегося весьма многообещающим, оказались сильно ограниченными. Можно ожидать, что дальнейшие исследования позволят найти другие математические структуры, которые будут обладать многими достоинствами и в то же время будут целиком или в значительной степени свободны от недостатков структур, рассмотренных в данном разделе. Однако не менее важно и то, что был разработан еще один метод быстрой свертки, о котором мы и не подозревали до тех пор, пока не был исследован аналог обычного метода быстрой свертки в другой системе счисления.

ЛИТЕРАТУРА

Алгоритмы БПФ

1. Cooley J. W., Tukey J. W., An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series, *Math. Comp.*, 19, 297—304 (April 1965).
2. Bergland G. D., A Guided Tour of the Fast Fourier Transform, *IEEE Spectrum*, 6, No. 7, 41—52 (1969); есть русский перевод: Бергланд Дж. Д., Руководство к быстрому преобразованию Фурье, *Зарубежная радиоэлектроника*, № 3 (1971).
3. Cochran W. T., Cooley J. W., Favon D. L., Helms H. D., Kaenel R. A., Lang W. W., Maling G. C., Nelson D. E., Rader C. M., Welch P. D., What is the Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15, No. 2, 45—55 (June 1967); есть русский перевод: Кокрен У. и др., Что такое быстрое преобразование Фурье?, *ТИИЭР*, 55, № 10 (1967).
4. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., The Finite Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 17, No. 2, 77—86 (1969).
5. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., Historical Notes on the Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15, No. 2, 76—79 (June 1967); есть русский перевод: Кули, Льюис, Уэлч, Исторические замечания относительно быстрого преобразования Фурье, *ТИИЭР*, 55, № 10 (1967).
6. Singleton R. C., A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited High Speed Storage, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15, No. 2, 91—98 (June 1967).
7. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Considerations in the Calculation of Sine, Cosine, and Laplace Transforms, *J. Sound Vib.*, 12, No. 3, 315—337 (1970).
8. Singleton R. C., An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 17, No. 2, 93—103 (June 1969).

9. Pease M. C., An Adaptation of the Fast Fourier Transform for Parallel Processing, *J. Assn. Comp. Mach.*, 15, No. 2, 252—264 (April 1968).
10. Rader C. M., Discrete Fourier Transforms When the Number of Data Samples is Prime, *Proc. IEEE*, 56, No. 6, 1107—1108 (June 1968).
11. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., The Fast Fourier Transform and Its Applications, *IEEE Trans. Education*, 12, 27—34 (March 1969).
12. Gold B., Rader C. M., Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, N.Y., 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
13. Bluestein L. I., A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, No. 4, 451—456 (1970).
14. Rabiner L. R., Schafer R. W., Rader C. M., The Chirp z-Transform Algorithm and Its Application, *Bell Syst. Tech. J.*, 48, No. 5, 1249—1292 (May—June 1969).

Методы статистического спектрального анализа

1. Jenkins G. M., Watts D. G., Spectral Analysis and Its Applications, Holden-Day, Inc., Pub., San Francisco, Calif., 1968; есть русский перевод: Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, изд-во «Мир», 1971.
2. Welch P. D., The Use of the FFT for Estimation of Power Spectra: A Method Based on Averaging Over Short, Modified Periodograms, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15, No. 2, 70—73 (1967).
3. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., The Use of the Fast Fourier Transform Algorithm for the Estimation of Spectra and Cross Spectra, *Proc. of the 1969 Polytechnic Inst. of Brooklyn Symp. on Computer Processing in Communications*, 5—20 (1969).
4. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. D., The Application of the Fast Fourier Transform Algorithm to the Estimation of Spectra and Cross-Spectra, *J. Sound Vib.*, 12, 339—352 (1970).
5. Rader C. M., An Improved Algorithm for High Speed Autocorrelation with Applications to Spectral Estimation, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, No. 4, 439—442 (1970).

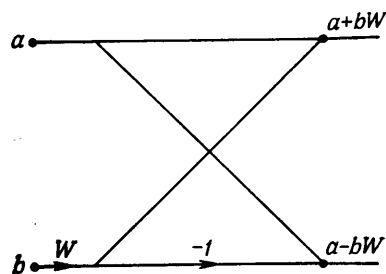
Теоретико-числовые преобразования и свертка

1. Pollard J. M., The Fast Fourier Transform in a Finite Field, *Mathematics of Computation*, 25, No. 114, 365—374 (April 1971).
2. Rader C. M., Discrete Convolution Via Mersenne Transforms, *IEEE Trans. on Computers*, C-21, No. 12, 1269—1273 (Dec. 1972).
3. Agarwal R. C., Burrus C. S., Fast One-Dimensional Convolution by Multi-dimensional Techniques, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-22, No. 1, 1—10 (Feb. 1974).
4. Agarwal R. C., Burrus C. S., Fast Convolution Using Fermat Number Transforms with Applications to Digital Filtering, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-22, No. 2, 87—97 (April 1974).

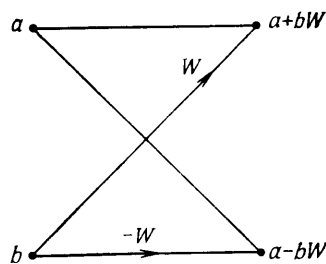
ПРИЛОЖЕНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ БПФ

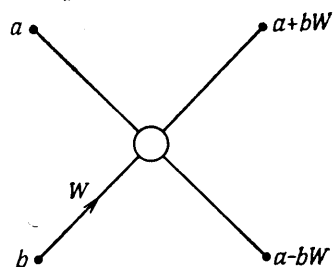
Различные авторы использовали самые разнообразные условные обозначения в публикациях, посвященных алгоритмам БПФ. Так, Кули и Тьюки [1] использовали алгебраическую систему обо-



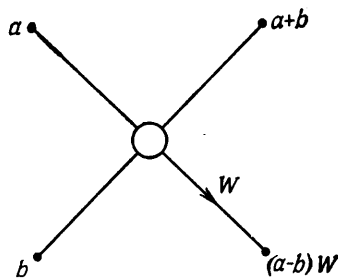
Фиг. А.6.1. Старое обозначение базовой операции алгоритма БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени.



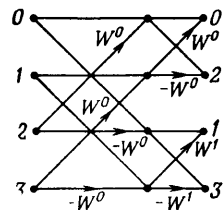
Фиг. А.6.2. Улучшенное обозначение базовой операции алгоритма БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени.



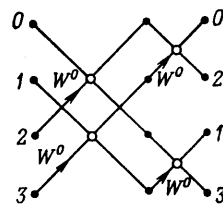
Фиг. А.6.3. Новое обозначение базовой операции алгоритма БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени.



Фиг. А.6.4. Новое обозначение базовой операции алгоритма БПФ с основанием 2 и прореживанием по частоте.



Фиг. А.6.5. Направленный граф четырехточечного БПФ с прореживанием по времени в старой системе обозначений.



Фиг. А.6.6. Направленный граф четырехточечного БПФ с прореживанием по времени в новой системе обозначений.

значений; некоторые авторы пользовались матричным обозначением. По-видимому, наиболее распространенным способом описания БПФ является представление его с помощью направленных графов (впервые использованных Рэйдером и Стокхэмом). Ниже будет проведено сравнение обозначений, используемых в данной книге, и обозначений, принятых при представлении алгоритмов в виде направленных графов. Обе системы обозначений нетрудно усвоить, и в зависимости от конкретных условий можно использовать любую из них, не испытывая при этом никаких неудобств.

В направленных графах точка суммирования представляется узлом, а умножение — стрелкой, так что базовую операцию алгоритма с основанием 2 и прореживанием по времени можно изобразить так, как это сделано на фиг. А.6.1. При построении направленного графа полного алгоритма БПФ этот граф не совсем удобен; его можно заменить другим, изображенным на фиг. А.6.2. Последний лучше использовать для представления полного алгоритма БПФ, однако при пользовании им может показаться, что на одну базовую операцию вместо одного приходится два умножения в комплексной форме.

Для обозначения элементарного ДПФ в книге использован специальный символ. Так, например, базовая операция для алгоритма БПФ с прореживанием по времени показана на фиг. А.6.3, а для алгоритма БПФ с прореживанием по частоте — на фиг. А.6.4. На фиг. А.6.5 и А.6.6 изображен направленный граф четырехточечного алгоритма БПФ с прореживанием по времени с использованием обеих систем обозначений. Читатель сам должен решить, какое из них предпочтительнее. Отметим лишь существенные отличия между ними:

1. Первый способ (фиг. А.6.5) обычно применяется при изображении направленных графов, хорошо известен и очень широко используется.
2. Первый способ можно использовать и для графического описания работы цифровых фильтров.
3. Все общие и важные теоремы о свойствах направленных графов применимы и к графам алгоритмов БПФ.
4. При втором способе (фиг. А.6.6) используется в два раза меньше линий при основании 2 (и в r раз меньше линий при основании r).
5. Второй способ легко использовать при построении графа алгоритма БПФ со смешанным основанием.
6. Для второго способа число символов умножителей равно фактическому числу умножений в алгоритме БПФ с основанием 2.