

ТЕОРИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

4.1. Введение

В настоящей главе рассматриваются методы расчета цифровых фильтров с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ-фильтров) при условии, что фильтры являются физически реализуемыми и, конечно, устойчивыми. Для импульсных характеристик таких фильтров $h(n)$ справедливы следующие ограничения:

$$h(n) = 0, \quad n < 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (4.2)$$

Наиболее общая форма записи z -преобразования импульсной характеристики БИХ-фильтров имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}. \quad (4.3)$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов a_i отличен от нуля, причем сразу все корни знаменателя не могут в точности компенсироваться корнями числителя. Действительно, рассмотрим, например, фильтр с z -преобразованием импульсной характеристики

$$H(z) = \frac{(1-z)^{-8}}{(1-z^{-1})}, \quad (4.4)$$

удовлетворяющим общей формуле (4.3). Так как корень $z = 1$ знаменателя компенсируется корнем $z = 1$ числителя, то фактически функция $H(z)$ представляет собой полином от z^{-1} с конечным числом членов, так что последовательность $h(n)$ будет соответствовать КИХ-фильтру.

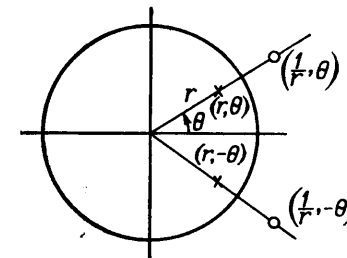
Фильтр с передаточной функцией вида (4.3) имеет, вообще говоря, конечное число нулей (M) и полюсов (N). Нули $H(z)$ могут располагаться на всей z -плоскости, но полюсы $H(z)$ в соответствии с условием устойчивости фильтра обязательно должны размещаться внутри круга единичного радиуса. В большинстве случаев, особенно при расчете цифровых фильтров по характери-

стикам аналоговых фильтров, число нулей (M) не превышает числа полюсов (N). Системы, удовлетворяющие этому условию, называются системами N -го порядка. При $M > N$ порядок системы становится неопределенным. В этом случае можно считать, что передаточная функция $H(z)$ соответствует последовательному соединению системы N -го порядка и КИХ-фильтра $(M - N)$ -го порядка. При рассмотрении всех методов расчета фильтров в настоящей главе предполагается, что $M \leq N$.

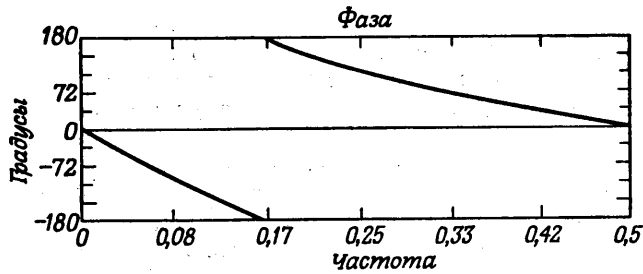
В отличие от КИХ-фильтров устойчивые, физически реализуемые БИХ-фильтры не обладают строго линейной фазовой характеристикой (за исключением частного случая, когда все полюсы $H(z)$ размещаются на единичной окружности). Действительно, в гл. 3 было показано, что фильтр будет иметь линейную фазовую характеристику, если

$$H(z) = H(z^{-1}) \quad (4.5)$$

[с точностью до множителя с линейной фазой, см. (3.19)]. Для БИХ-фильтров это условие означает, что каждому полюсу передаточной функции $H(z)$, расположенному внутри единичного круга (модули этих полюсов меньше 1), должен соответствовать зеркально отображенный полюс вне единичного круга, поэтому такой фильтр будет неустойчивым. В связи с этим при расчете БИХ-фильтров всегда приходится рассматривать аппроксимацию заданных и амплитудной, и фазовой характеристик. Существует, правда, специальный вид БИХ-фильтров с равномерной амплитудной характеристикой, у которых при изменениях положения нулей и полюсов меняется лишь фазовая характеристика. Фильтры такого вида называют всепропускающими цепями. Для этого чтобы цепь была всепропускающей, необходимо, чтобы каждому полюсу ее передаточной функции $H(z)$ в точке $z = re^{j\theta}$ соответствовал нуль в точке $z = (1/r) e^{j\theta}$, причем для действительных последовательностей $h(n)$ и полюсы, и нули должны иметь комплексно сопряженные пары. Типичное расположение полюсов и нулей для всепропускающего фильтра 2-го порядка показано на фиг. 4.1.

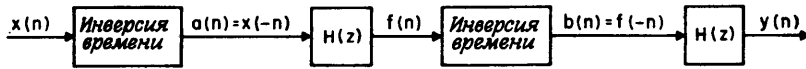


Фиг. 4.1. Расположение нулей и полюсов всепропускающего фильтра 2-го порядка.

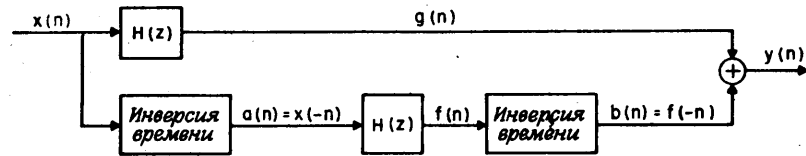


Фиг. 4.2. Фазовая характеристика всепропускающего фильтра 2-го порядка.

Метод 1



Метод 2



Фиг. 4.3. Два метода построения БИХ-фильтров с нулевой фазовой характеристикой.

Передаточная функция этого фильтра равна

$$H(z) = \frac{[z - (1/r)e^{j\theta}][z - (1/r)e^{-j\theta}]}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})}. \quad (4.6)$$

Ее можно преобразовать к виду

$$H(z) = \frac{[z^2 - (2/r)(\cos \theta)z + (1/r^2)]}{[z^2 - 2r(\cos \theta)z + r^2]} = \frac{[r^2 z^2 - 2r(\cos \theta)z + 1]}{r^2 [z^2 - 2r(\cos \theta)z + r^2]}. \quad (4.7)$$

Значения $H(z)$ на единичной окружности дают амплитудную характеристику фильтра, которая удовлетворяет условию

$$|H(e^{j\omega})| = \text{const},$$

а также фазовую характеристику, изображенную (для часто встречающихся значений $r = 0,9$ и $\theta = 36^\circ$) на фиг. 4.2. Всепропускающие фильтры представляют интерес прежде всего потому, что их последовательное соединение можно использовать для выравни-



Фиг. 4.4. К определению эквивалентного фильтра.

вания заданной фазовой характеристики (или характеристики групповой задержки).

Если не учитывать ограничения (4.1), связанного с физической реализуемостью фильтров, то можно предложить два различных метода построения БИХ-фильтров с линейными фазовыми характеристиками (фиг. 4.3). В обоих случаях фильтры с передаточной функцией $H(z)$ представляют собой физически реализуемые БИХ-фильтры, а блоки с обозначением «инверсия времени» описываются уравнением

$$z(n) = w(-n), \quad (4.8)$$

где $w(n)$ и $z(n)$ — входная и выходная последовательности этих блоков соответственно. Ограничения, при которых возможно построение таких блоков, будут сформулированы после того, как будет предварительно показано, что в обоих случаях эквивалентный фильтр имеет линейную (нулевую) фазовую характеристику. Понятие эквивалентного фильтра иллюстрируется с помощью фиг. 4.4, откуда следует, что передаточная функция эквивалентного фильтра $H_{\text{эк}}(z)$ равна

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (4.9)$$

Для метода 1 (см. фиг. 4.3 и 4.4) имеем

$$A(z) = X(z^{-1}), \quad (4.10a)$$

$$F(z) = H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1}), \quad (4.10б)$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z), \quad (4.10в)$$

$$Y(z) = H(z)B(z) = X(z)H(z)H(z^{-1}), \quad (4.10г)$$

$$H_{\text{эк}}(z) = H(z)H(z^{-1}), \quad (4.10д)$$

$$H_{\text{эк}}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2. \quad (4.10е)$$

При выводе этих соотношений учитывалось, что если z -преобразование последовательности $x(n)$ равно $X(z)$, то для инвертированной во времени последовательности $x(-n)$ оно будет равно $X(z^{-1})$. Из конечного результата (4.10е) следует, что эквивалентный фильтр имеет нулевую фазовую характеристику, причем его амплитудная характеристика равна квадрату амплитудной характеристики БИХ-фильтра.

Для метода 2 аналогично получим

$$A(z) = X(z^{-1}), \quad (4.11a)$$

$$F(z) = H(z) A(z) = H(z) X(z^{-1}), \quad (4.11b)$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1}) X(z), \quad (4.11в)$$

$$G(z) = H(z) X(z), \quad (4.11г)$$

$$Y(z) = B(z) + G(z) = X(z) [H(z) + H(z^{-1})], \quad (4.11д)$$

$$H_{\text{ЭК}}(z) = H(z) + H(z^{-1}), \quad (4.11е)$$

$$H_{\text{ЭК}}(e^{j\omega}) = 2 |H(e^{j\omega})| \cos[\varphi(\omega)], \quad (4.11ж)$$

где

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (4.11з)$$

И в этом случае эквивалентный фильтр имеет нулевую фазовую характеристику, однако его амплитудная характеристика равна удвоенному произведению амплитудной характеристики исходного фильтра на функцию косинуса от фазовой характеристики исходного фильтра. По этой причине предпочтение следует отдать методу 1.

На практике точная реализация обоих рассмотренных методов невозможна ввиду того, что приходится инвертировать бесконечные временные последовательности, не дожидаясь, пока они закончатся. Ограничив, однако, эти последовательности соответствующим числом членов, всегда можно обеспечить любую наперед заданную точность аппроксимации эквивалентного фильтра. Более подробно этот подход рассмотрен в тезисах Гиббса.

4.2. Элементарные свойства БИХ-фильтров:
квадрат амплитудной характеристики, фазовая характеристика, характеристика групповой задержки

В процессе рассмотрения методов расчета БИХ-фильтров нам неоднократно придется обращаться к некоторым элементарным свойствам их передаточных функций. На протяжении всей главы будут использоваться три основные функции, характеризующие фильтр: квадрат амплитудной характеристики, фазовая характеристика и характеристика групповой задержки. Причина, по которой понадобятся все три функции, заключается в том, что при решении задачи аппроксимации для БИХ-фильтров в общем случае приходится рассматривать комплексную передаточную функцию от ω . Поэтому при разработке методов аппроксимации нужно учитывать поведение и амплитудной и фазовой характеристик. Кроме того, так как фазовая характеристика БИХ-фильтра, как правило, существенно нелинейна, то для оценки дисперсионного

воздействия фильтра на типовой обрабатываемый сигнал часто используется характеристика групповой задержки фильтра. В данном разделе даются определения всех трех характеристик фильтра, которые будут затем использованы в этой главе.

1. Квадрат амплитудной характеристики

При расчете БИХ-фильтра с использованием аппроксимации только амплитудной характеристики (т. е. без учета фазовой характеристики) удобнее всего оперировать с квадратом амплитудной характеристики, определяемым следующим образом:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(z) H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.12)$$

Расположению полюсов и нулей этой функции в z -плоскости свойственна симметрия с зеркальным отображением относительно единичной окружности. Полюсы $H(z)$ располагаются внутри единичной окружности, поэтому они полностью определяются квадратом амплитудной характеристики фильтра. Нули $H(z)$ могут занимать в z -плоскости произвольное положение (исключение составляет важный случай, когда все нули располагаются на единичной окружности). Однако чаще всего нули передаточной функции $H(z)$ также выбираются таким образом, чтобы соответствующие им нули квадрата амплитудной характеристики располагались на единичной окружности или внутри ее в z -плоскости. Фильтры с такими нулями являются минимально-фазовыми фильтрами.

2. Фазовая характеристика

Так как передаточная функция БИХ-фильтра в общем случае является комплексной функцией от ω , можно рассматривать и амплитудную и фазовую характеристики фильтра. Фазовая характеристика равна

$$\beta(e^{j\omega}) = \text{arctg} \left\{ \frac{\text{Im}[H(z)]}{\text{Re}[H(z)]} \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.13)$$

Другая форма записи фазовой характеристики имеет вид

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} \ln \left\{ \frac{H[z]}{H[z^{-1}]} \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.14)$$

Ее можно получить, представив $H(z)$ как

$$H(z) = |H(z)| e^{j\beta(z)} \quad (4.15)$$

и учитывая, что

$$H(z^{-1}) = |H(z)| e^{-j\beta(z)}. \quad (4.16)$$

3. Характеристика групповой задержки

Характеристика групповой задержки является мерой средней задержки в фильтре в функции частоты и записывается следующим образом:

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} = -jz \frac{d\beta}{dz} \Big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.17)$$

Используя формулу (4.14), функцию $\tau_g(e^{j\omega})$ можно представить в виде

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\operatorname{Re} \left[z \frac{dH(z)/dz}{H(z)} \right]_{z=e^{j\omega}} = -\operatorname{Re} \left\{ z \frac{d}{dz} [\ln H(z)] \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.18)$$

Предпочтительна приблизительно постоянная характеристика групповой задержки во всей полосе (или полосах) пропускания фильтра.

4.3. Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтра

Решение задачи расчета фильтров сводится к нахождению значений его коэффициентов [обозначенных через b_i и a_i в формуле (4.3)], обеспечивающих аппроксимацию заданных характеристик фильтра, таких, как импульсная и частотная характеристики, характеристика групповой задержки и др., в том или ином смысле (например, в среднеквадратическом или минимаксном). Таким образом, задача расчета фильтра в значительной мере сводится к задаче аппроксимации и может быть решена чисто математическими методами. Область, в которой производится аппроксимация, определяется назначением фильтра. Так, если аппроксимация производится в z -плоскости, результирующий фильтр будет цифровым. Если же она производится в s -плоскости, результирующий фильтр будет аналоговым. Аналогично можно рассчитать оптические фильтры или фильтры с распределенными параметрами. Все эти различные классы фильтров объединяет общность математических свойств аппроксимирующих функций.

Таким образом, вопреки распространенному мнению, методика расчета цифровых БИХ-фильтров практически не связана с методикой расчета фильтров непрерывного времени, хотя и предполагает использование многочисленных сведений, содержащихся в публикациях по методам расчета этих фильтров. Вместо того чтобы заново создавать теорию расчета цифровых фильтров (модернизируя математический аппарат применительно к случаю цифровых фильтров), можно использовать простые методы отображения, позволяющие преобразовать фильтры из одной области в другую. Именно такие методы расчета цифрового фильтра, включаю-

щие проектирование соответствующего фильтра непрерывного времени и его дискретизацию, наиболее широко используются при расчете БИХ-фильтров. Их можно использовать при проектировании стандартных фильтров, таких, как фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные; теория расчета этих фильтров для непрерывного времени хорошо разработана.

Другую группу методов расчета цифровых БИХ-фильтров образуют прямые методы расчета в z -плоскости. Часто удается найти такое расположение полюсов и нулей фильтра, при котором обеспечивается некоторая аппроксимация непосредственно заданной характеристики фильтра. Третий, также часто встречающийся подход к расчету БИХ-фильтров заключается в использовании процедур оптимизации для нахождения такого расположения полюсов и нулей в z -плоскости, при котором обеспечивается аппроксимация в том или ином смысле заданной характеристики фильтра. При таком подходе обычно не удается получить формулы, связывающие координаты полюсов и нулей (а следовательно, и коэффициенты фильтра) с параметрами заданной характеристики. Расчет фильтров производится, как правило, методом последовательных приближений.

4.4. Расчет цифровых фильтров по фильтрам непрерывного времени

В предыдущем разделе уже отмечалось, что наиболее распространенным методом расчета БИХ-фильтров является метод дискретизации аналогового фильтра, удовлетворяющего заданным требованиям. При расчете цифровых фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров можно воспользоваться многочисленными методами расчета аналоговых фильтров-прототипов. Хорошо известны такие классы аналоговых фильтров, как фильтры Баттерворта, фильтры Чебышева типа I и II и фильтры Кауэра (называемые также эллиптическими фильтрами). Основные свойства этих фильтров, а также соотношения, используемые в настоящее время для их расчета, будут приведены в разд. 4.9, а сначала рассмотрим несколько методов преобразования (т. е. дискретизации) существующего аналогового фильтра в эквивалентный ему цифровой фильтр.

Предположим, что передаточная функция аналогового фильтра (представляющая собой преобразование Лапласа от импульсной характеристики) равна

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^i}{\sum_{i=1}^N a_i s^i} = \frac{\prod_{i=1}^M (s + c_i)}{\prod_{i=1}^N (s + d_i)}, \quad (4.19)$$

причем коэффициенты a_i и b_i (или, что то же, c_i и d_i) известны. Дифференциальное уравнение фильтра имеет вид

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad (4.20)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — колебания на входе и выходе фильтра соответственно. Наиболее распространенными методами дискретизации аналогового фильтра с передаточной функцией (4.19) являются следующие:

- 1) метод отображения дифференциалов;
- 2) метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;
- 3) метод билинейного преобразования;
- 4) метод согласованного z -преобразования.

В последующих разделах все эти методы будут подробно рассмотрены.

4.5. Метод отображения дифференциалов

Один из наиболее простых методов дискретизации аналоговой системы заключается в замене дифференциалов в ее дифференциальном уравнении на конечные разности, что дает возможность получить разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение. Простейшая замена состоит в замене первого дифференциала на прямую или обратную разность. При этом дифференциальное уравнение (4.20) после дискретизации принимает вид

$$\sum_{i=0}^N a_i \Delta_i [y(n)] = \sum_{i=0}^M b_i \Delta_i [x(n)], \quad (4.21)$$

где $x(n)$ — последовательность на входе цифрового фильтра, $y(n)$ — на его выходе, а i -я разность $\Delta_i [w(n)]$ определяется соотношением

$$\Delta_{i+1} [w(n)] = \Delta_i \{ \Delta_i [w(n)] \}, \quad (4.22)$$

причем

$$\Delta_1 [w(n)] = \begin{cases} \frac{1}{T} [w(n) - w(n-1)], & \text{обратная разность,} \\ \frac{1}{T} [w(n+1) - w(n)], & \text{прямая разность.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Так, при использовании обратных разностей вторая разность $\Delta_2 [w(n)]$ будет равна

$$\begin{aligned} \Delta_2 [w(n)] &= \frac{1}{T} \{ \Delta_1 [w(n)] - \Delta_1 [w(n-1)] \} = \\ &= \frac{1}{T} \{ [w(n) - w(n-1)] - \frac{1}{T} [w(n-1) - w(n-2)] \} = \\ &= \frac{1}{T^2} [w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

При любом отображении непрерывного пространства в дискретное должны выполняться следующие требования:

1. Ось $j\Omega$ из s -плоскости должна отображаться в единичную окружность на z -плоскости.

2. Точки из левой половины s -плоскости (для них $\{\text{Re } [s] < 0\}$) после отображения должны располагаться внутри единичной окружности в z -плоскости (т. е. для отображенных точек $|z| < 1$).

Выполнение первого требования позволяет сохранить (благодаря свойству равномерности отображения) селективные свойства аналоговой системы, а выполнение второго гарантирует, что получающаяся в результате отображения устойчивой аналоговой системы дискретная система также является устойчивой. Рассмотрим, насколько хорошо замена дифференциалов прямыми или обратными разностями позволяет удовлетворить сформулированным требованиям.

Обратные разности. При использовании обратных разностей производится следующая замена:

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}. \quad (4.25)$$

С точки зрения операторов преобразования она соответствует соотношению

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}, \quad (4.26)$$

или

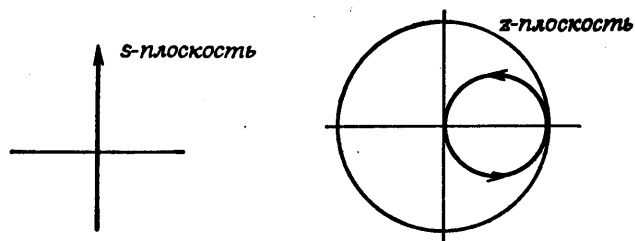
$$z = \frac{1}{1 - sT}. \quad (4.27)$$

При $s = j\Omega$ из формулы (4.27) следует, что

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + j\Omega T}{1 - j\Omega T} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{2j \arctg \Omega T}). \quad (4.28)$$

Запишем действительную и мнимую части z :

$$\begin{aligned} \text{Re } [z] &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(2 \arctg \Omega T)}{2}, \\ \text{Im } [z] &= \frac{\sin(2 \arctg \Omega T)}{2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$



Фиг. 4.5. Отображение оси $j\Omega$ из s -плоскости в z -плоскость для метода обратных разностей.

Таким образом, прямая $s = j\Omega$ (при $-\infty < \Omega < \infty$) отображается на z -плоскости в окружность, уравнение которой имеет вид

$$\left\{ \operatorname{Re} [z] - \frac{1}{2} \right\}^2 + \{\operatorname{Im} [z]\}^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2. \quad (4.30)$$

Центр этой окружности (фиг. 4.5) находится в точке с координатами $\operatorname{Re} [z] = 1/2$, $\operatorname{Im} [z] = 0$, а ее радиус равен $1/2$. Видно, что все точки оси $j\Omega$ из s -плоскости после отображения не попадают на единичную окружность в z -плоскости (за исключением области весьма малых значений ΩT). Это означает, что первое из сформулированных выше требований не удовлетворяется. Проверим, выполняется ли второе требование. Для этого положим, что

$$sT = \alpha + j\beta, \quad (4.31)$$

где α и β — действительные числа, причем $\alpha < 0$. Тогда соотношение (4.27) принимает вид

$$z = \frac{1}{1 - \alpha - j\beta}, \quad (4.32)$$

откуда

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} < 1. \quad (4.33)$$

Таким образом, при использовании обратных разностей устойчивый аналоговый фильтр будет отображаться в устойчивый цифровой фильтр, но избирательные свойства аналогового фильтра не будут сохраняться.

Прямые разности. При использовании прямых разностей производится следующая замена:

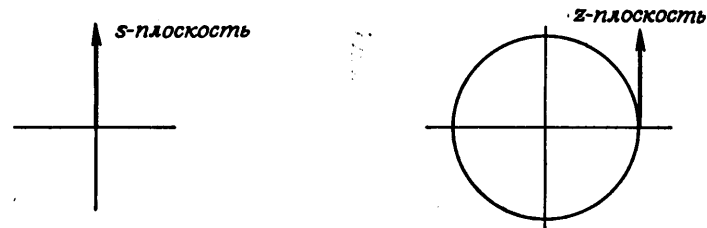
$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n+1) - y(n)}{T}, \quad (4.34)$$

для которой

$$s = \frac{z-1}{T}, \quad (4.35)$$

или

$$z = 1 + sT. \quad (4.36)$$



Фиг. 4.6. Отображение оси $j\Omega$ из s -плоскости в z -плоскость для метода прямых разностей.

При $s = j\Omega$ имеем

$$z = 1 + j\Omega T. \quad (4.37)$$

Контуры на s -плоскости и z -плоскости для рассматриваемого метода отображения показаны на фиг. 4.6. Видно, что первое требование, предъявляемое к отображениям, не удовлетворяется. Не удовлетворяется и второе требование, так как если

$$sT = \alpha + j\beta, \quad (4.38)$$

то

$$z = 1 + \alpha + j\beta \quad (4.39)$$

и

$$|z| > 1$$

при $\beta^2 > 1 - (1 + \alpha)^2$.

Обобщенные разности. Более сложная методика дискретизации аналоговых фильтров, основанная на замене дифференциалов разностями, заключается в использовании разностей более высокого порядка для замены дифференциалов более низкого порядка. Положим, например, что первая разность Δ_1 определяется вместо (4.23) следующим выражением:

$$\Delta_1 [w(n)] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i [w(n+i) - w(n-i)], \quad (4.40)$$

где L — порядок используемых разностей. Тогда соотношение между операторами, описывающее отображение s -плоскости в z -плоскость, будет иметь вид

$$s = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i (z^i - z^{-i}). \quad (4.41)$$

Докажем, что оно удовлетворяет первому требованию. Для этого покажем, что при $z = e^{j\omega T}$ оператор s будет иметь вид $s = j\beta(\omega)$, так что единичная окружность на z -плоскости будет результатом

отображения оси $j\Omega$ из s -плоскости. Подставив $z = e^{j\omega T}$ в формулу (4.41), получим

$$s = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i (e^{j\omega_i T} - e^{-j\omega_i T}) = \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L 2j\alpha_i \sin(\omega_i T) = j\beta(\omega). \quad (4.43)$$

Выбрав соответствующим образом значения коэффициентов α_i , можно добиться того, что функция $\beta(\omega)$ будет аппроксимировать практически любую заданную нечетную функцию от ω , так что ось $j\Omega$ из s -плоскости будет монотонно отображаться в единичную окружность на z -плоскости. Кроме того, можно показать, что отображение, описываемое оператором (4.41), является конформным, поэтому точки левой полуплоскости s будут располагаться после отображения внутри единичного круга в z -плоскости, так что оба требования, предъявляемые к отображениям, будут удовлетворяться. Однако в связи с трудностями в определении коэффициентов α_i , необходимых для выполнения отображения, а также из-за наличия более простых методов дискретизации аналоговых фильтров рассмотренный метод использования разностей более высокого порядка не нашел широкого практического применения.

Общие замечания о методе замены дифференциалов разностями. Достоинство метода замены дифференциалов простыми разностями заключается в том, что с помощью простых подстановок типа (4.26) или (4.35) можно от рациональной передаточной функции от s непосредственно перейти к рациональной передаточной функции от z . Однако независимо от того, используются простые прямые или простые обратные разности, характеристики аналогового фильтра при этом не сохраняются, поэтому для дискретизации аналоговых фильтров обычно применяют другие методы.

4.6. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики

Второй метод дискретизации аналоговых фильтров называется методом инвариантного преобразования импульсной характеристики¹. Отличительной особенностью этого метода является то, что в качестве импульсной характеристики рассчитываемого цифрового фильтра используется дискретизованная импульсная характеристика соответствующего аналогового фильтра. В результате частот-

¹) Его называют также методом стандартного z -преобразования. — Прим. ред.

ная характеристика цифрового фильтра образуется путем наложения частотной характеристики дискретизованного аналогового фильтра.

Для того чтобы продемонстрировать метод дискретизации аналогового фильтра с использованием инвариантного преобразования его импульсной характеристики, разложим передаточную функцию этого фильтра (4.19) на простые дроби:

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s+d_i}, \quad (4.44)$$

где

$$c_i = H(s)(s+d_i)|_{s=-d_i}, \quad (4.45)$$

причем каждый коэффициент d_i определяет положение i -го полюса. При записи разложения (4.44) предполагалось, что порядок числителя M меньше порядка знаменателя N и что все полюсы $H(s)$ простые. Предположение о том, что $M < N$, обязательно должно выполняться для дискретизируемого фильтра, поскольку в противном случае наложения в частотной характеристике цифрового фильтра станут недопустимыми. Если же не все полюсы $H(s)$ простые, то результаты, которые будут получены в настоящем разделе, следует несколько модифицировать.

Импульсная характеристика $h(t)$ аналогового фильтра с передаточной функцией вида (4.44) описывается соотношением

$$h(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i t} u_{-1}(t). \quad (4.46)$$

Дискретизуя ее, получим импульсную характеристику цифрового фильтра

$$h(nT) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i nT} u_{-1}(nT), \quad (4.47)$$

где T — период дискретизации. Найдем ее z -преобразование

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i nT} z^{-n}. \quad (4.48)$$

Изменив порядок суммирования и просуммировав по n , получим

$$H(z) = \sum_{i=1}^N c_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-d_i T} z^{-1})^n = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{1 - e^{-d_i T} z^{-1}}. \quad (4.49)$$

Сравним формулы (4.49) и (4.44). Видно, что для простых полюсов переход от $H(s)$ к $H(z)$ осуществляется с помощью отображения,

при котором используется замена

$$\frac{1}{s+d_i} \rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}e^{-d_i T}}. \quad (4.50)$$

Если полюсы d_i комплексные, то остатки c_i в (4.44) также будут комплексными. Функция $h(t)$ действительная, поэтому должны существовать также комплексно сопряженные полюс d_i^* и остаток c_i^* . Просуммируем эти комплексно сопряженные члены в (4.44):

$$\frac{c_i}{s+d_i} + \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{(c_i+c_i^*)s + c_i d_i^* + c_i^* d_i}{s^2 + (d_i+d_i^*)s + d_i d_i^*}. \quad (4.51)$$

Положив $d_i = \sigma_i + j\Omega_i$ и $c_i = g_i + jh_i$, получим

$$\frac{c_i}{s+d_i} + \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{2g_i s + 2(\sigma_i g_i + \Omega_i h_i)}{s^2 + 2\sigma_i s + (\sigma_i^2 + \Omega_i^2)}. \quad (4.52)$$

Использование отображающей замены (4.50) применительно к каждому слагаемому в формуле (4.51) дает

$$\begin{aligned} \frac{c_i}{1-z^{-1}e^{-d_i T}} + \frac{c_i^*}{1-z^{-1}e^{-d_i^* T}} &= \\ &= \frac{(c_i+c_i^*) - z^{-1}(c_i e^{-d_i T} + c_i^* e^{-d_i^* T})}{1-z^{-1}(e^{-d_i T} + e^{-d_i^* T}) + z^{-2}e^{-(d_i+d_i^*)T}} = \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$= \frac{2g_i - z^{-1}e^{-\sigma_i T} [2g_i \cos(\Omega_i T) - 2h_i (\sin \Omega_i T)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma_i T} \cos(\Omega_i T) + z^{-2}e^{-2\sigma_i T}}. \quad (4.54)$$

Из формул (4.52) и (4.54) получаем

$$\frac{s+\sigma+\Omega(h/g)}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T} [\cos(\Omega T) - (h/g) \sin(\Omega T)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos(\Omega T) + z^{-2}e^{-2\sigma T}} \quad (4.55)$$

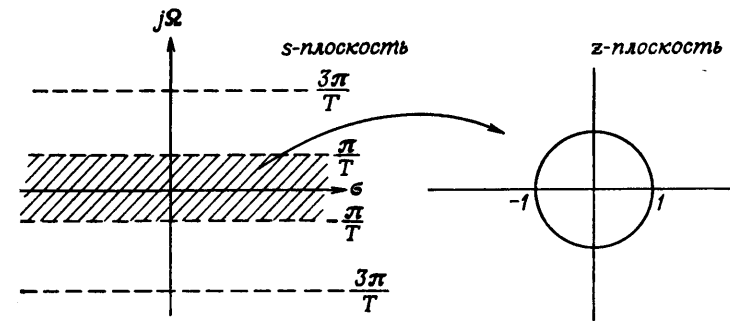
(индекс i здесь опущен, а числители поделены на $2g$).

Приведем два полезных частных случая этой отображающей замены, соответствующих аналоговым фильтрам с импульсными характеристиками $h_1(t) = e^{-\sigma t} \cos(\Omega t)$ $u_{-1}(t)$ и $h_2(t) = e^{-\sigma t} \sin(\Omega t)$ $u_{-1}(t)$:

$$H_1(s) = \frac{s+\sigma}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T + z^{-2}e^{-2\sigma T}}, \quad (4.56)$$

$$H_2(s) = \frac{\Omega}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{z^{-1}e^{-\sigma T} \sin \Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T + z^{-2}e^{-2\sigma T}}. \quad (4.57)$$

Выше было отмечено, что частотная характеристика цифрового фильтра, рассчитываемого методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, образуется путем наложений частот-



Фиг. 4.7. Отображение из s -плоскости в z -плоскость для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики.

ной характеристики дискретизируемого аналогового фильтра. Таким образом, можно записать

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H(j\Omega + jl\Omega_s), \quad (4.58)$$

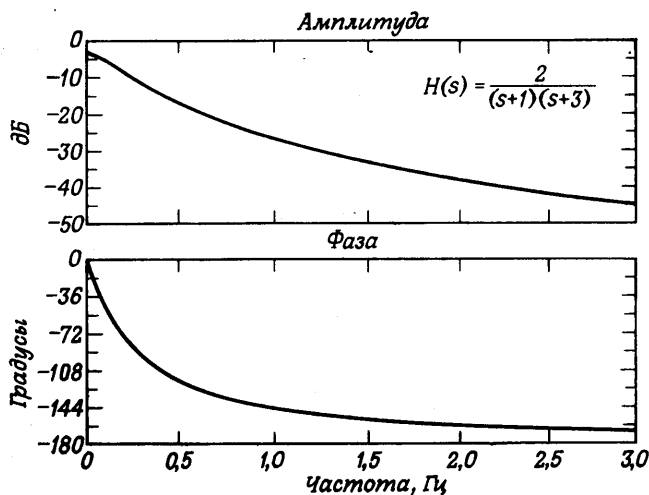
где $\Omega_s = 2\pi/T$ — угловая частота дискретизации цифрового фильтра. На фиг. 4.7 показано соответствующее инвариантному преобразованию импульсной характеристики отображение из s -плоскости в z -плоскость. Каждая горизонтальная полоса шириной $2\pi/T$ из s -плоскости отображается на z -плоскость. Поэтому все смежные полосы из s -плоскости будут при отображении накладываться друг на друга в z -плоскости. Отсюда следует, что для того, чтобы частотные характеристики исходного аналогового фильтра и рассчитываемого методом инвариантного преобразования импульсной характеристики цифрового фильтра соответствовали друг другу, необходимо, чтобы полоса пропускания аналогового фильтра находилась в пределах диапазона $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$. Для выполнения этого условия необходимо до начала преобразования вводить дополнительный фильтр нижних частот, гарантирующий соответствующее ограничение полосы пропускания аналогового фильтра.

Пример инвариантного преобразования импульсной характеристики. Для иллюстрации этого метода дискретизируем аналоговый фильтр с передаточной функцией вида

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}.$$

Непосредственное использование отображающей замены (4.50) дает

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-3T}} = \frac{z^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1-z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + e^{-4T}z^{-2}}.$$



Фиг. 4.8. Амплитудная и фазовая характеристики аналогового фильтра.

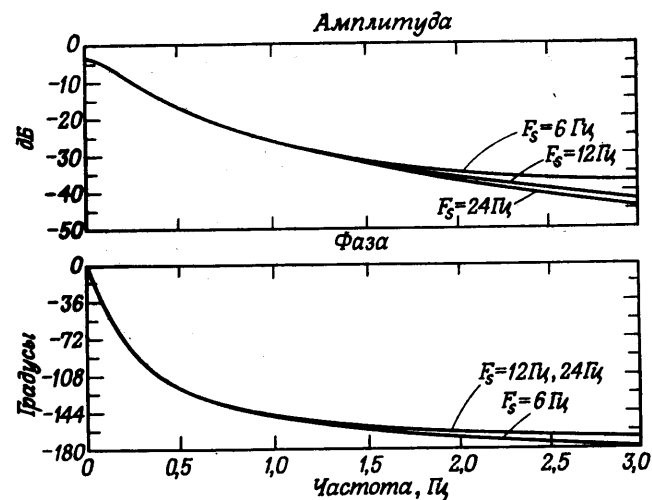
Частотная характеристика аналогового фильтра определяется соотношением

$$H(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + 4j\Omega}.$$

На фиг. 4.8 представлены амплитудная и фазовая характеристики этого фильтра. Характеристики соответствующего цифрового фильтра для разных значений периода дискретизации $T = 1/F_s$ изображены на фиг. 4.9. Ясно, что при уменьшении T (т. е. при увеличении частоты дискретизации F_s) эффекты наложения могут оказаться пренебрежимо малыми и частотные характеристики аналогового и цифрового фильтров станут похожими друг на друга.

4.7. Билинейное z -преобразование

Достоинство первого из двух рассмотренных выше методов расчета цифрового фильтра по характеристикам аналогового фильтра, основанного на замене дифференциалов конечными разностями, заключалось в том, что z -преобразование импульсной характеристики цифрового фильтра элементарно получалось из преобразования Лапласа импульсной характеристики аналогового фильтра с помощью простой алгебраической подстановки. Недостатки же этого метода состояли в том, что ось $j\Omega$ из s -плоскости не отображалась, вообще говоря, в единичную окружность на z -плоскости, а устойчивый аналоговый фильтр (в случае использования прямых разностей) не всегда отображался в устойчивый цифровой фильтр.



Фиг. 4.9. Амплитудная и фазовая характеристики цифровых фильтров, рассчитанных методом инвариантного преобразования импульсной характеристики аналогового фильтра, представленного на фиг. 4.8.

Существует, однако, простое конформное отображение s -плоскости в z -плоскость, свободное от этих недостатков и в то же время сохраняющее удобную алгебраическую форму преобразования. Оно называется билинейным преобразованием, использующим следующую замену:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}. \quad (4.59)$$

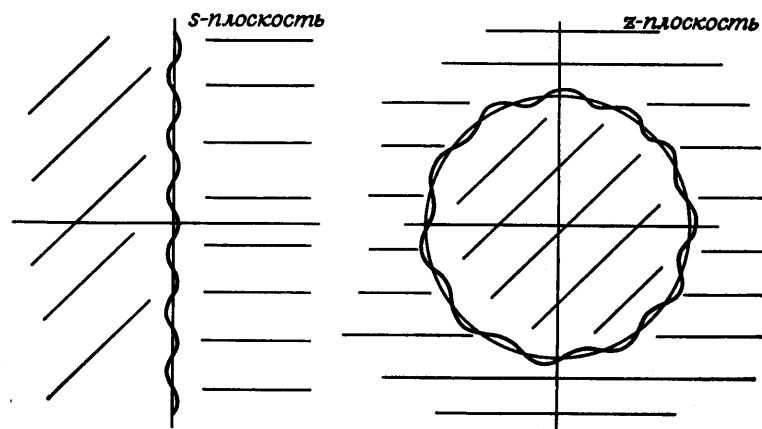
Характер этого преобразования проще всего понять, если обратиться к фиг. 4.10, где показано, каким образом s -плоскость отображается в z -плоскость. Видно, что вся ось $j\Omega$ из s -плоскости отображается в единичную окружность на z -плоскости; левая полуплоскость s отображается в единичный круг, а правая полуплоскость s — в область, расположенную вне единичного круга на z -плоскости. Эти свойства легко проиллюстрировать, если из формулы (4.59) найти выражение для z :

$$z = \frac{(2/T) + s}{(2/T) - s}. \quad (4.60)$$

При $s = j\Omega$

$$z = \frac{(2/T) + j\Omega}{(2/T) - j\Omega}. \quad (4.61)$$

Отсюда видно, что $|z| = 1$. При $\Omega = 0$ имеем $z = 1$ и при $\Omega = \infty$ $z = -1$, в промежутке z монотонно меняется от 0 до π . Подставив



Фиг. 4.10. Отображение s -плоскости в z -плоскость при билинейном преобразовании.

в формулу (4.60) $s = \sigma + j\Omega$, получим

$$z = \frac{(2/T) + \sigma + j\Omega}{(2/T) - \sigma - j\Omega}. \quad (4.62)$$

При $\sigma < 0$ (для левой полуплоскости s) $|z| < 1$, т. е. точки располагаются внутри единичной окружности.

При билинейном преобразовании передаточная функция цифрового фильтра $H(z)$ рассчитывается с помощью алгебраической подстановки (4.59), т. е.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]}. \quad (4.63)$$

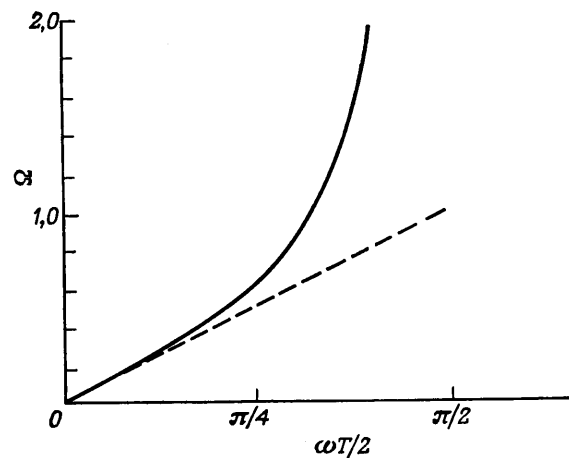
Из этого соотношения видно, что порядки знаменателей функций $H(z)$ и $H(s)$ совпадают, но порядки числителей могут отличаться. Действительно, передаточная функция

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

имеет числитель нулевого порядка, а знаменатель — первого порядка. В то же время получаемая методом билинейного преобразования функция $H(z)$ равна

$$H(z) = \frac{1}{(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] + a} = \frac{1+z^{-1}}{2/T + a + z^{-1}[a - (2/T)]},$$

где и числитель, и знаменатель первого порядка. Причиной этого является то, что функция $H(s)$ имеет нуль на бесконечности ($s = \infty$), который при билинейном преобразовании отображается в точку $z = -1$.



Фиг. 4.11. Соотношение между частотными шкалами аналогового и цифрового фильтров при билинейном преобразовании.

Так как в единичную окружность на z -плоскости отображается вся ось $j\Omega$ из s -плоскости, то эффекты, связанные с наложениями в частотной характеристике цифрового фильтра, характерные для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, в данном случае будут отсутствовать. Однако соотношение между частотами аналогового фильтра Ω и цифрового фильтра ω оказывается существенно нелинейным. Рассмотрим характер этой нелинейности, положив в (4.59) $z = e^{j\omega T}$ и $s = j\Omega$, что дает

$$j\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1 - e^{-j\omega T})}{(1 + e^{-j\omega T})}, \quad (4.64)$$

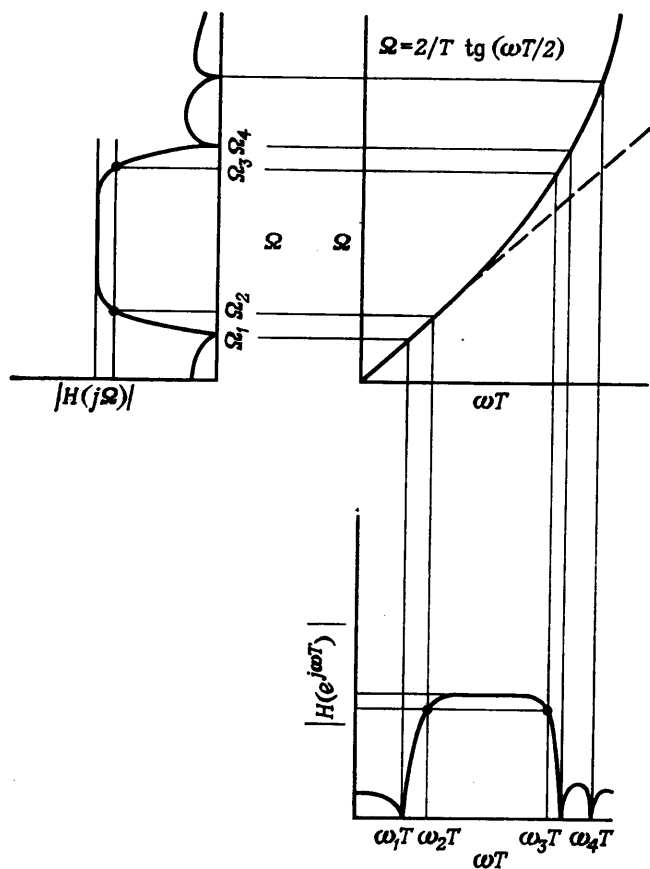
или

$$j\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \frac{[e^{j(\omega T/2)} - e^{-j(\omega T/2)}]}{[e^{j(\omega T/2)} + e^{-j(\omega T/2)}]},$$

откуда

$$\begin{aligned} j\Omega &\rightarrow \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right), \\ \Omega &\rightarrow \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Это соотношение представлено на фиг. 4.11 для случая $T = 2$. При небольших ω отображение почти линейно, однако для основной части частотной шкалы оно существенно нелинейно и сильно ограничивает область применения билинейного преобразования. Действительно, амплитудная характеристика преобразуемого анало-



Фиг. 4.12. Методика учета нелинейного искажения частотной шкалы при билинейном преобразовании.

гового фильтра должна быть ступенчатообразной функцией частоты, так как в противном случае частотная характеристика цифрового фильтра будет представлять собой деформированную характеристику аналогового фильтра. По этой причине, например, билинейное преобразование нельзя использовать для преобразования аналогового дифференцирующего фильтра в цифровой дифференциатор. Существует, правда, довольно большой класс фильтров, для которых частотная деформация, описываемая соотношением (4.65), может быть скомпенсирована. К ним относятся фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные. Метод компенсации деформации достаточно прост (фиг. 4.12). Совокупность характерных частот среза цифрового фильтра известна. Пусть

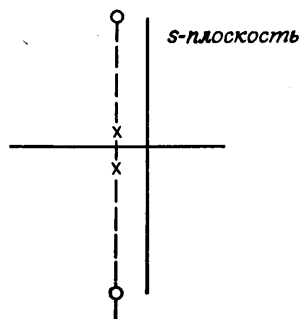
в данном случае их будет четыре: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ (они показаны на фиг. 4.12 справа внизу). Используя нелинейное соотношение (4.65) между частотными шкалами цифрового и аналогового фильтров, пересчитаем все частоты среза цифрового фильтра в частоты среза аналогового фильтра, которые будут равны $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ (см. на фиг. 4.12 вверху). Теперь рассчитаем аналоговый фильтр, все характерные частоты которого совпадали бы с этими пересчитанными частотами среза цифрового фильтра. Амплитудная характеристика такого аналогового фильтра изображена на фиг. 4.12 слева вверху. Выполнив билинейное преобразование этого аналогового фильтра, получим цифровой фильтр, все частоты среза которого будут совпадать с заданными. Ниже в настоящей главе будут даны примеры расчета фильтров нижних и верхних частот методом билинейного преобразования.

Итак, билинейное преобразование обеспечивает простое отображение между аналоговыми и цифровыми фильтрами и является алгебраическим преобразованием, при котором ось $j\Omega$ полностью отображается в единичную окружность на z -плоскости. Кроме того, ему присуще свойство отображать физически реализуемый устойчивый аналоговый фильтр также в физически реализуемый и устойчивый цифровой фильтр. Более того, аналоговые широкополосные фильтры с резкими скатами могут быть отображены в широкополосные цифровые фильтры с резкими скатами без искажений частотной характеристики, связанных с наложениями, которые характерны для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. Недостаток метода билинейного преобразования заключается в том, что эффекты нелинейности соотношения между частотными шкалами аналогового и цифрового фильтров удастся учесть лишь в том случае, когда частотная характеристика аналогового фильтра имеет вид ступенчатообразной функции. Кроме того, при билинейном преобразовании ни импульсная, ни фазовая характеристики аналогового и цифрового фильтров не будут совпадать.

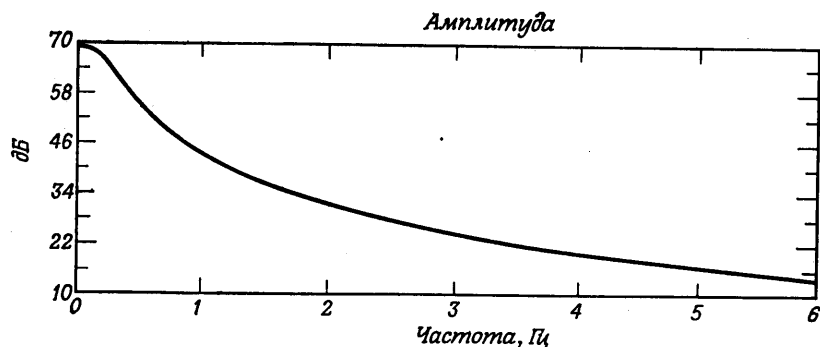
4.8. Согласованное z -преобразование

Четвертый метод дискретизации аналоговых фильтров, называемый согласованным z -преобразованием, основан на непосредственном отображении полюсов и нулей из s -плоскости в полюсы и нули на z -плоскости. При таком отображении полюс (или нуль) в точке $s = -a$ плоскости s отображается в полюс (или нуль) в точке $z = e^{-aT}$ плоскости z , где T — период дискретизации. Таким образом, при согласованном z -преобразовании отображающая замена будет иметь вид

$$s + a \rightarrow 1 - z^{-1}e^{-aT}. \quad (4.66)$$



Фиг. 4.13. Расположение полюсов и нулей в s -плоскости и амплитудная характеристика аналогового фильтра.

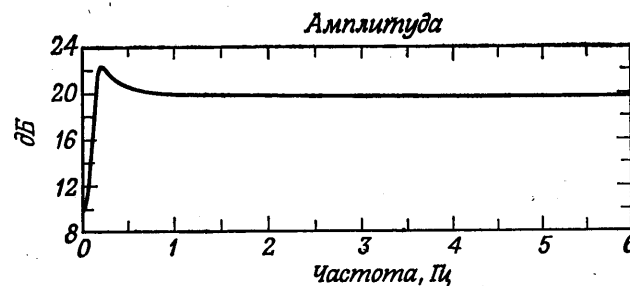
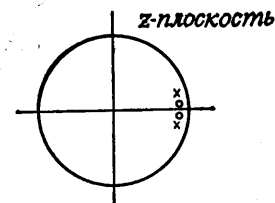


Если полюсы (или нули) комплексные, то (4.66) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} (s + a - jb)(s + a + jb) &= \\ = (s + a)^2 + b^2 &\rightarrow 1 - 2z^{-1}e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Необходимо отметить, что полюсы цифрового фильтра, рассчитываемого методом согласованного z -преобразования аналогового фильтра, оказываются идентичными полюсам, получаемым при инвариантном преобразовании импульсной характеристики того же аналогового фильтра, однако нули существенно различаются. Необходимо также учитывать, что для использования метода согласованного z -преобразования передаточная функция $H(s)$ аналогового фильтра должна быть разложена на множители.

Метод согласованного z -преобразования довольно прост в использовании, однако во многих случаях он неприменим. Так, если центральные частоты аналогового фильтра, соответствующие его нулям, превышают половину частоты дискретизации, то положение нулей цифрового фильтра будет существенно искажено



Фиг. 4.14. Расположение полюсов и нулей в z -плоскости и амплитудная характеристика цифрового фильтра, рассчитанного методом согласованного z -преобразования полюсов и нулей аналогового фильтра, представленного на фиг. 4.13.

эффектом наложения. Покажем это на примере передаточной функции

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5626}{s^2 + 2s + 2}$$

с нулями в точках $s = -1 \pm j75$ и полюсами в точках $s = -1 \pm j1$. Расположение нулей и полюсов этой функции в s -плоскости, а также амплитудная характеристика (в логарифмическом масштабе) представлены на фиг. 4.13. Пусть $T = 1/12$. Используя согласованное z -преобразование, получим следующее выражение для передаточной функции цифрового фильтра:

$$H(z) = \frac{1 - 2e^{-1/12} \cos\left(\frac{75}{12}\right) z^{-1} + e^{-1/6} z^{-2}}{1 - 2e^{-1/12} \cos\left(\frac{1}{12}\right) z^{-1} + e^{-1/6} z^{-2}}$$

Полюсы этой функции расположены в точках с полярными координатами $z = e^{-1/12} e^{\pm j(1/12)}$, а нули — в точках с координатами $z = e^{-1/12} e^{\pm j75/12}$. Приближенное положение полюсов и нулей в z -плоскости и амплитудная характеристика цифрового фильтра показаны на фиг. 4.14. Видно, что при использовании согласо-

ванного z -преобразования из-за эффекта наложения нули аналогового фильтра из области верхних смещаются в область нижних частот для цифрового фильтра.

Согласованное z -преобразование неприменимо также в случае, когда передаточная функция аналогового фильтра имеет только полюсы. Передаточная функция цифрового фильтра также будет иметь только полюсы, но во многих случаях она не будет соответствовать исходному аналоговому фильтру. Считается, что несколько лучшие результаты можно получить, искусственно введя в цифровой фильтр нули в точке $z = -1$, однако эту меру даже в лучшем случае следует рассматривать лишь как временную. Вообще использование инвариантного преобразования импульсной характеристики или билинейного преобразования предпочтительнее использования согласованного z -преобразования.

4.9. Обзор методов расчета аналоговых фильтров нижних частот

Значительная часть теории расчета цифровых БИХ-фильтров требует понимания методов расчета фильтров непрерывного времени. Поэтому в данном разделе будут приведены расчетные формулы для нескольких стандартных типов аналоговых фильтров, включая фильтры Баттерворта, Бесселя, Чебышева типа I и II и Кауэра (называемые также эллиптическими фильтрами). Подробный анализ достоинств и недостатков способов аппроксимации заданных характеристик, соответствующих этим фильтрам, можно найти в ряде работ, посвященных методам расчета аналоговых фильтров, поэтому ниже будут лишь кратко перечислены основные свойства фильтров каждого типа и приведены расчетные соотношения, необходимые для получения коэффициентов аналоговых фильтров.

Пусть нужно рассчитать нормированный фильтр нижних частот с частотой среза, равной $\Omega = 1$ рад/с. В качестве аппроксимируемой функции будет, как правило, использоваться квадрат амплитудной характеристики (исключением является фильтр Бесселя). Будем считать, что передаточная функция аналогового фильтра является рациональной функцией переменной s следующего вида:

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^i} \quad (4.68)$$

1. Фильтры Баттерворта

Фильтры Баттерворта нижних частот характеризуются тем, что имеют максимально гладкую амплитудную характеристику в начале координат в s -плоскости. Это означает, что все существующие производные от амплитудной характеристики в начале координат равны нулю. Квадрат амплитудной характеристики нормированного (т. е. имеющего частоту среза 1 рад/с) фильтра Баттерворта равен

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega^2)^n}, \quad (4.69)$$

где n — порядок фильтра. Аналитически продолжая функцию (4.69) на всю s -плоскость, получим

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}. \quad (4.70)$$

Все полюсы (4.70) находятся на единичной окружности на одинаковом расстоянии друг от друга в s -плоскости. Выразим передаточную функцию $H(s)$ через полюсы, располагающиеся в левой полуплоскости s :

$$H(s) = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad (4.71)$$

где

$$s_k = e^{j\pi[1/2 + (2k-1)/2n]}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.72)$$

а k_0 — константа нормирования. Используя формулы (4.69) и (4.72), можно сформулировать несколько свойств фильтров Баттерворта нижних частот:

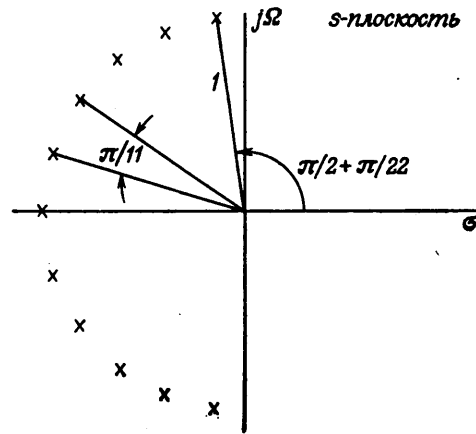
1. Фильтры Баттерворта имеют только полюсы (все нули передаточных функций этих фильтров расположены на бесконечности).

2. На частоте $\Omega = 1$ рад/с коэффициент передачи фильтров Баттерворта равен $1/\sqrt{2}$ (т. е. на частоте среза их амплитудная характеристика спадает на 3 дБ).

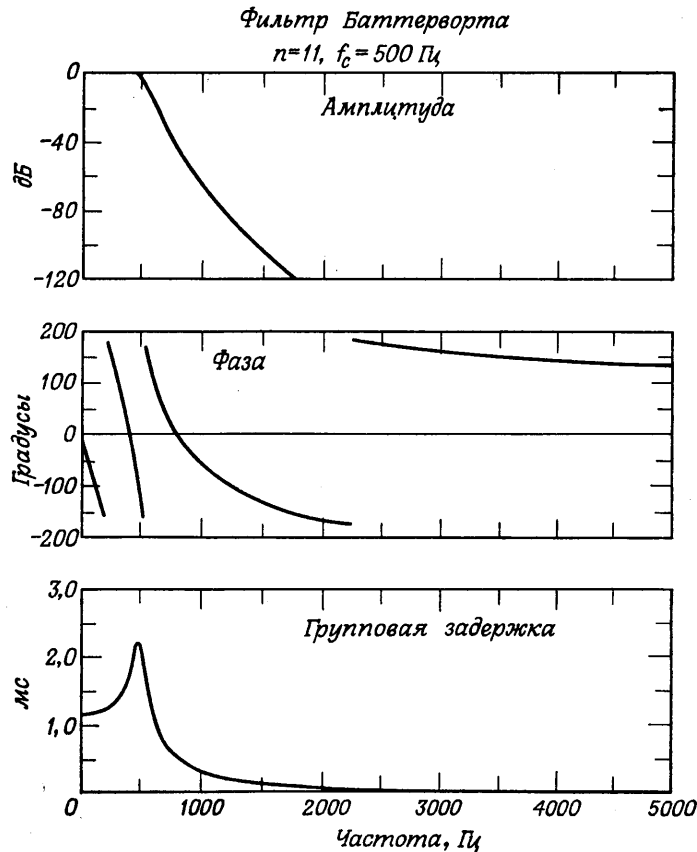
3. Порядок фильтра n полностью определяет весь фильтр.

На практике порядок фильтра Баттерворта обычно рассчитывают из условия обеспечения определенного ослабления на некоторой заданной частоте $\Omega_t > 1$. Порядок фильтра, обеспечивающий на частоте $\Omega = \Omega_t$ уровень амплитудной характеристики, равный $1/A$, можно найти из соотношения

$$n = \frac{\lg(A^2 - 1)}{2 \lg \Omega_t}. \quad (4.73)$$



Фиг. 4.15. Расположение полюсов аналогового фильтра Баттерворта нижних частот.



Фиг. 4.16. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Баттерворта нижних частот.

Пусть, например, требуется на частоте $\Omega_t = 2$ рад/с обеспечить ослабление, равное $A = 100$. Тогда

$$n = \frac{\lg(9999)}{2 \lg 2} \approx \frac{4}{2(0,301)} = 6,64.$$

Округлив n в большую сторону до целого числа, найдем, что заданное ослабление обеспечит фильтр Баттерворта 7-го порядка.

Пример 1. Рассчитать фильтр Баттерворта с ослаблением не менее 66 дБ на частоте $\Omega = 2000$ л рад/с и с ослаблением 3 дБ на частоте $\Omega = 1000$ л рад/с.

Решение. Используя в качестве расчетных характеристик $1/A = 0,0005$ (что соответствует ослаблению на 66 дБ) и $\Omega_t = 2$, получим $n = 10,97$. Округление дает $n = 11$. На фиг. 4.15 показано расположение полюсов рассчитанного фильтра Баттерворта в s -плоскости. Амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки этого фильтра представлены на фиг. 4.16.

2. Фильтры Бесселя

Фильтры Бесселя характеризуются максимально гладкой характеристикой групповой задержки в начале координат в s -плоскости. Переходная характеристика фильтров Бесселя имеет весьма малый выброс (обычно менее 1%), причем и импульсная и амплитудная характеристики стремятся к гауссовой кривой по мере увеличения порядка фильтра. Можно показать, что при дискретизации непрерывных фильтров Бесселя методами, рассматриваемыми в данной главе, характерное для этих фильтров свойство максимальной гладкости характеристики групповой задержки, вообще говоря, не сохраняется. Подробно этот вопрос изложен в статье Тайрана.

Передачная функция фильтров Бесселя записывается в виде

$$H(s) = \frac{d_0}{B_n(s)}, \quad (4.74)$$

где $B_n(s)$ — функция Бесселя n -го порядка, а d_0 — константа нормирования, равная

$$d_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (4.75)$$

Появление функций Бесселя в знаменателе (4.74) является результатом усечения при представлении функции единичной задержки e^{-s} в виде цепной дроби. Функции Бесселя удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$B_n(s) = (2n - 1) B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad (4.76)$$

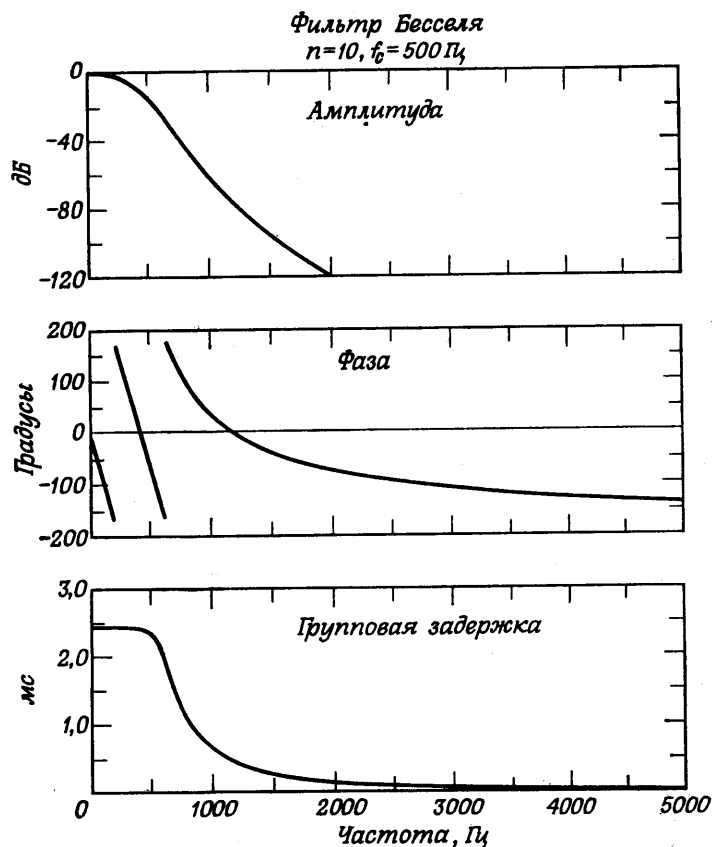
с начальными условиями $B_0(s) = 1$ и $B_1(s) = s + 1$. Эти функции можно также представить в виде

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n d_k s^k, \quad (4.77)$$

где

$$d_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k! (n-k)!}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (4.78)$$

Можно показать, что фильтры Бесселя имеют только полюсы, которые расположены на окружности с центром на действительной положительной полуоси s -плоскости.



Фиг. 4.17. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Бесселя нижних частот.

В отличие от фильтров Баттерворта частота среза фильтров Бесселя Ω_c зависит от их порядка, что затрудняет работу с ними. Частоту среза фильтра Бесселя n -го порядка можно найти, анализируя поведение его амплитудной характеристики на высоких частотах. Из формул (4.75) и (4.78) получим

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |H(j\Omega)| \rightarrow \frac{d_0}{d_n \Omega^n} = \frac{d_0}{2\Omega^n}. \quad (4.79)$$

Чтобы определить асимптотическую частоту среза, найдем такую частоту Ω_c , на которой $|H(j\Omega)| = 1/2$. Соотношение (4.79) дает

$$|H(j\Omega_c)| \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d_0}{2\Omega_c^n}, \quad (4.80)$$

откуда

$$\Omega_c = d_0^{1/n}. \quad (4.81)$$

Для нормирования Ω_c к величине 1 рад/с разделим все корни фильтра на $d_0^{1/n}$. При этом задержка в фильтре вместо 1 становится равной $d_0^{1/n}$, а уровень амплитудной характеристики на частоте 1 рад/с будет уменьшаться при увеличении порядка фильтра n .

Обычно фильтры Бесселя рассчитывают, задавая порядок фильтра n и частоту среза и отыскивая корни по таблице.

На фиг. 4.17 в качестве примера приведены амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки фильтра Бесселя нижних частот 10-го порядка. Асимптотическая частота среза этого фильтра равна 1000 л рад/с (т. е. 500 Гц).

3. Фильтры Чебышева

Отличительной чертой фильтров Чебышева является наименьшая величина максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. В действительности ошибка аппроксимации представляется в заданной полосе равновеликими пульсациями, т. е. она флуктуирует между максимумами и минимумами равной величины. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации — в полосе пропускания или в полосе непропускания, — различают фильтры Чебышева типа I и II.

Фильтры Чебышева типа I имеют только полюсы и обеспечивают равновеликие пульсации амплитудной характеристики в полосе пропускания и монотонное изменение ослабления в полосе непропускания. Квадрат амплитудной характеристики фильтра Чебышева типа I n -го порядка описывается выражением

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \quad (4.82)$$

где $T_n(\Omega)$ — полином Чебышева n -го порядка, по определению равный

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega), & |\Omega| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \Omega), & |\Omega| > 1, \end{cases} \quad (4.83)$$

а ε — параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания.

Свойство оптимальности фильтров Чебышева типа I порядка n заключается в том, что не существует какого-либо другого фильтра n -го порядка, содержащего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Другими словами, если какой-либо фильтр n -го порядка, содержащий только полюсы, имеет в полосе пропускания лучшие характеристики по сравнению с фильтром Чебышева типа I порядка n , то в полосе непропускания характеристики этого фильтра наверняка будут хуже, чем у фильтра Чебышева.

Фильтры Чебышева типа II (иногда их называют также обратными фильтрами Чебышева) обеспечивают монотонное изменение ослабления в полосе пропускания (максимально гладкое при $\Omega = 0$) и равновеликие пульсации в полосе непропускания. Нули фильтров этого типа располагаются на мнимой оси в s -плоскости, а полюсы — в левой полуплоскости. Квадрат амплитудной характеристики фильтров Чебышева типа II порядка n можно представить следующим образом:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_n(\Omega_r)/T_n(\Omega_r/\Omega)]^2}, \quad (4.84)$$

где Ω_r — наименьшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданный уровень ослабления.

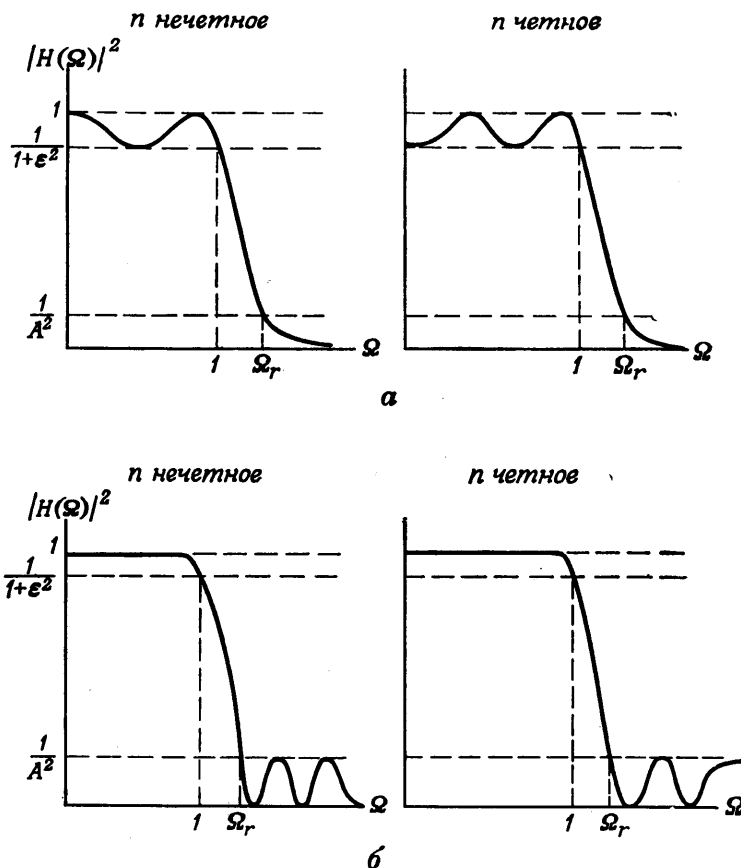
На фиг. 4.18 показано поведение квадрата амплитудной характеристики для фильтров Чебышева типа I и II при четных и нечетных n . Во всех этих фильтрах граница полосы пропускания находится при $\Omega = 1$, где $|H(1)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2)$, а граница полосы непропускания расположена при $\Omega = \Omega_r$, где $|H(\Omega_r)|^2 = 1/A^2$.

Фильтр Чебышева типа I имеет простые полюсы в точках $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$, которые лежат в s -плоскости на эллипсе, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2 \varphi} + \frac{\Omega_k^2}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = 1. \quad (4.85)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\operatorname{sh} \varphi \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \\ \Omega_k &= \operatorname{ch} \varphi \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$



Фиг. 4.18. Общий вид функции квадрата амплитудной характеристики аналоговых фильтров Чебышева нижних частот типа I и II. а — фильтр Чебышева типа I; б — фильтр Чебышева типа II.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi &= \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \\ \operatorname{ch} \varphi &= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

и

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{1/n}. \quad (4.88)$$

Фильтры Чебышева типа II имеют и полюсы, и нули. Нули являются чисто мнимыми и находятся в точках

$$s_k = j \frac{\Omega_r}{\cos \{[(2k-1)/2n]\pi\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.89)$$

(Отметим, что при нечетных n нуль с номером $k = (n + 1)/2$ находится на бесконечности.) Полюсы фильтров типа II можно найти, вычислив координаты особых точек знаменателя передаточной функции (4.84).

Простые преобразования дают для полюсов $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$) следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \frac{\Omega_r \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \\ \Omega_k &= \frac{-\Omega_r \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},\end{aligned}\quad (4.90)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_k &= -\operatorname{sh} \varphi \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \\ \beta_k &= \operatorname{ch} \varphi \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right],\end{aligned}\quad (4.91)$$

причем

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} \varphi &= \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \\ \operatorname{ch} \varphi &= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}\end{aligned}\quad (4.92)$$

и

$$\gamma = (A + \sqrt{A^2 - 1})^{1/n}. \quad (4.93)$$

Фильтры Чебышева типа I и II полностью определяются любыми тремя из следующих четырех параметров:

- 1) n (порядок фильтра);
- 2) ε (параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания, см. фиг. 4.18);
- 3) Ω_r (наименьшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданное ослабление, см. фиг. 4.18);
- 4) A (параметр, характеризующий ослабление в полосе непропускания, см. фиг. 4.18).

Порядок фильтра Чебышева n , необходимый для обеспечения заданных значений ε , A и Ω_r , определяется с помощью формулы

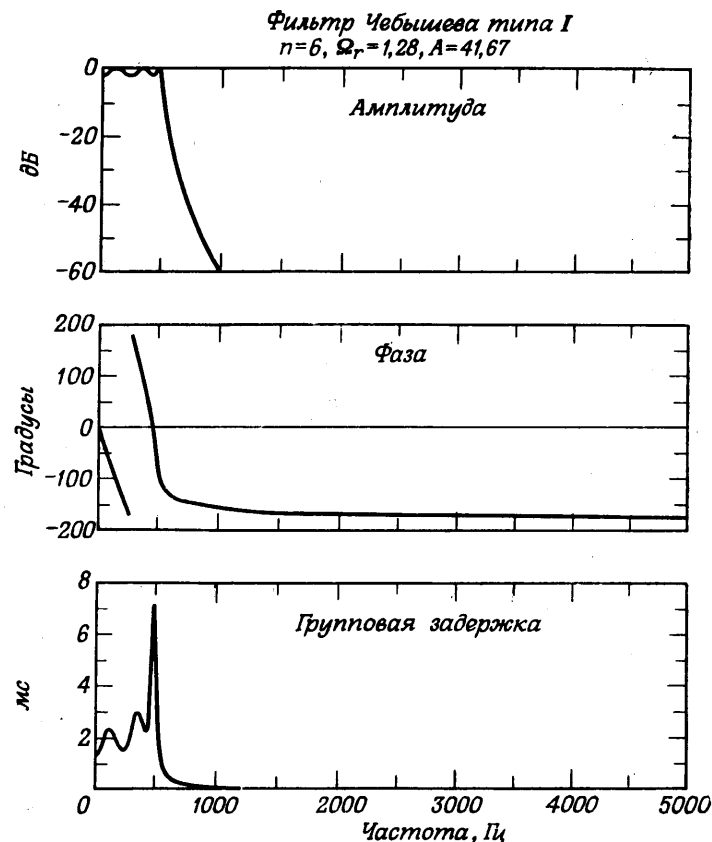
$$n = \frac{\lg(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\lg(\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1})}, \quad (4.94)$$

где

$$g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}}. \quad (4.95)$$

Пример 2. Рассчитать фильтр Чебышева минимального порядка, удовлетворяющий следующим условиям:

- пульсации в полосе пропускания равны 2 дБ;
- переходное отношение $1/\Omega_r = 0,781$;



Фиг. 4.19. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристики групповой задержки аналогового фильтра Чебышева нижних частот типа I.

ослабление в полосе непропускания 30 дБ.

Решение. Используя фиг. 4.18, найдем параметры фильтра ε , A и Ω_r по заданным характеристикам

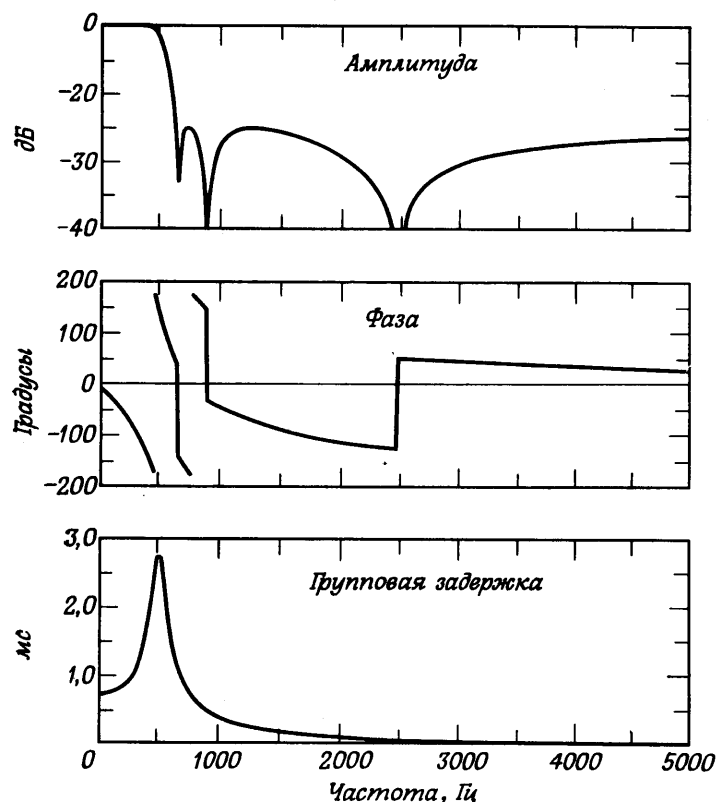
$$-2 \text{ дБ} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad \varepsilon = 0,764,$$

$$-30 \text{ дБ} = 20 \lg \left(\frac{1}{A} \right), \quad A = 31,62,$$

$$\Omega_r = \frac{1}{0,781} = 1,28.$$

Затем по формуле (4.95) получим $g = 41,33$, а по формуле (4.94) вычислим значение $n = 6,03$.

Фильтр Чебышева типа II



Фиг. 4.20. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Чебышева нижних частот типа II.

На фиг. 4.19 и 4.20 представлены основные характеристики (амплитудная в логарифмическом масштабе, фазовая и групповой задержки) фильтров Чебышева типа I и II, удовлетворяющие условиям, перечисленным в примере 2. Оба фильтра имеют частоту среза $\Omega_c = 1000\pi$ рад/с (т. е. $f_c = 5000$ Гц). Из сопоставления фиг. 4.19 и 4.20 видно, что поведение характеристики групповой задержки в полосе пропускания для фильтра типа II вообще значительно лучше, чем для фильтра типа I. Это связано с тем, что нули фильтров Чебышева типа II располагаются в s -плоскости на оси $j\Omega$, тогда как все нули фильтров Чебышева типа I находятся на бесконечности.

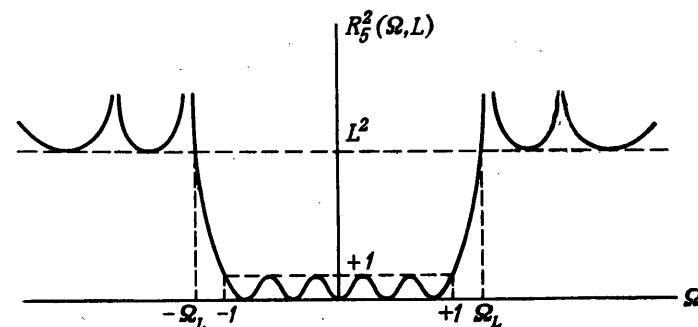
4. Эллиптические фильтры

Эллиптические фильтры характеризуются тем, что их амплитудная характеристика имеет равновеликие пульсации и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Можно показать, что с точки зрения минимальной ширины переходной полосы эллиптические фильтры являются оптимальными, т. е. для заданных порядка фильтра и уровня пульсаций не существует других фильтров с более быстрым переходом от полосы пропускания к полосе непропускания. Квадрат амплитудной характеристики эллиптического фильтра нижних частот записывается в виде

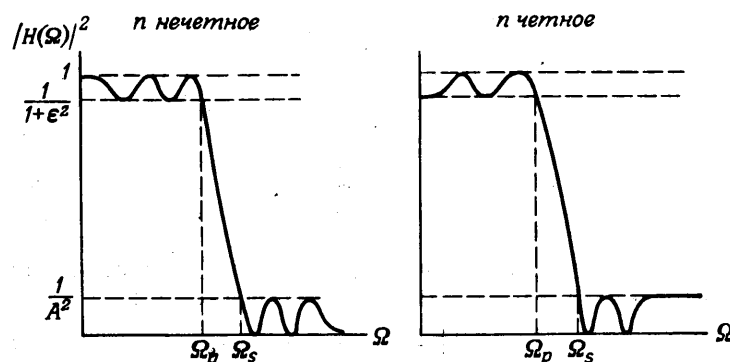
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\Omega, L)} \quad (4.96)$$

где $R_n(\Omega, L)$ — рациональная функция Чебышева, а L — параметр, характеризующий пульсации функции $R_n(\Omega, L)$. Проанализируем свойства эллиптических фильтров, используя фиг. 4.21, где представлена типичная функция $R_n^2(\Omega, L)$. Видно, что в полосе пропускания $-1 \leq \Omega \leq 1$ эта функция осциллирует между 0 и 1, а, начиная с частоты Ω_L , она осциллирует между L^2 и ∞ . При изменении параметра L величина Ω_L также будет меняться. Именно на этом свойстве рациональных функций Чебышева основана методика расчета фильтров с произвольным ослаблением и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Фактически можно выбрать любые три из четырех параметров фильтра (порядок, ослабление в полосе пропускания, ослабление в полосе непропускания и переходное отношение, или, что то же самое, частота среза Ω_L), и четвертый из них определяется однозначно.

Изучение свойств функции $R_n(\Omega, L)$ требует знания теории эллиптических функций Якоби, детальное изложение которой увело бы нас слишком далеко. Поэтому, отослав заинтересованного читателя к книге Даниэльса, ограничимся тем, что сначала представим расчетное соотношение, позволяющее найти порядок эллип-



Фиг. 4.21. Типичная рациональная функция Чебышева.



Фиг. 4.22. Общий вид квадрата амплитудной характеристики аналогового эллиптического фильтра нижних частот.

тического фильтра, обеспечивающего заданные величины уровня пульсаций и переходного отношения, а после этого приведем в качестве примера характеристики типичного эллиптического фильтра. На фиг. 4.22 показано поведение квадрата амплитудной характеристики типичных эллиптических фильтров при нечетном и четном значениях n . Там же представлены параметры пульсаций ε и A . Видно, что для эллиптических фильтров они определяются так же, как и для фильтров Чебышева. Переходное отношение k определяется следующим образом:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}, \quad (4.97)$$

где Ω_p — граничная частота полосы пропускания, а Ω_s — граничная частота полосы непропускания. Если ввести параметр k_1 , равный

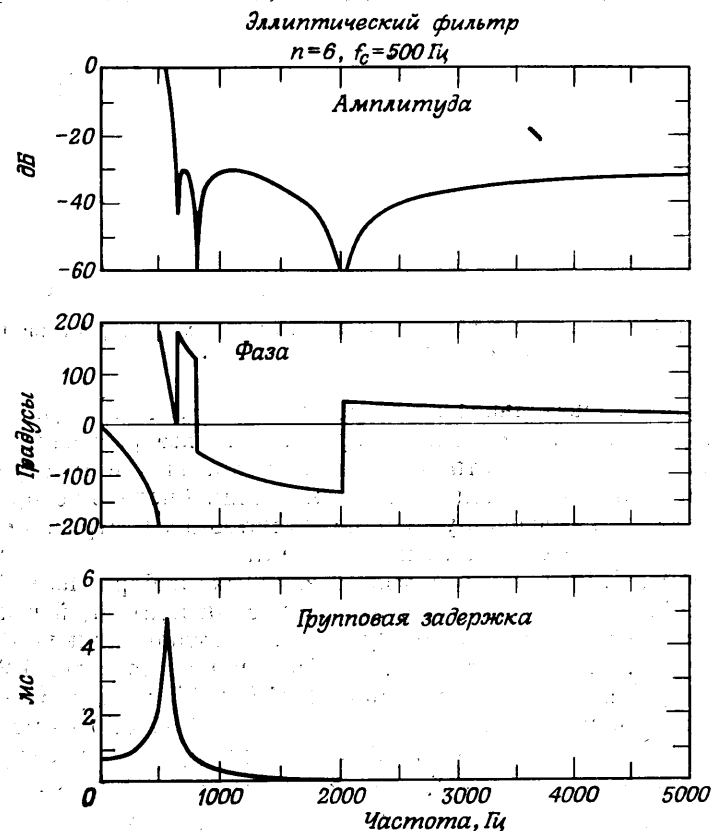
$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}, \quad (4.98)$$

то порядок эллиптического фильтра n , удовлетворяющего заданным значениям ε , A , Ω_p и Ω_s , можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{K(k) K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1) K(\sqrt{1-k^2})}, \quad (4.99)$$

где $K(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. В разд. 4.10 описана графическая методика нахождения порядка эллиптических фильтров Чебышева и Баттерворта, удовлетворяющих заданным характеристикам.

Амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки эллиптического фильтра нижних частот представлены на фиг. 4.23.

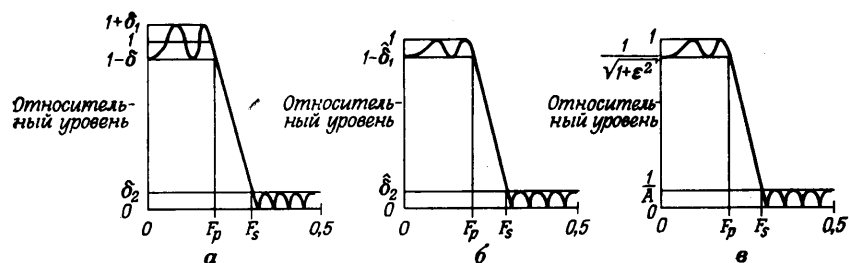


Фиг. 4.23. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового эллиптического фильтра нижних частот.

Порядок фильтра $n = 6$, частота среза $\Omega_c = 1000 \pi$ рад/с ($f_c = 500$ Гц), переходное отношение $k = 0,781$, характеристики пульсаций $A = 31,62$ и $\varepsilon = 0,01$.

4.10. Расчетные диаграммы фильтров нижних частот

Выше уже были приведены все расчетные формулы, необходимые для проектирования фильтров нижних частот, однако было бы весьма полезно и информативно представить соотношения между параметрами фильтров графически. Поскольку число этих параметров в общем случае равно пяти (из них два параметра характеризуют пульсации, два дают граничные частоты и один — порядок фильтра), то ясно, что представить соотношения между всеми параметрами с помощью одной диаграммы не удастся. Используя,



Фиг. 4.24. Эквивалентные параметры амплитудной характеристики цифрового фильтра нижних частот.

однако, последовательность из трех диаграмм, можно достаточно просто и наглядно графически представить все расчетные соотношения, причем это относится и к аналоговым и к цифровым фильтрам (рассчитываемым методом билинейного преобразования). В данном разделе будет описана методика построения и использования таких расчетных диаграмм.

На фиг. 4.24 показаны три различных набора параметров пульсаций, используемых для представления пульсаций в полосе пропускания и в полосе непропускания фильтров нижних частот. Амплитудная характеристика, изображенная на фиг. 4.24, а, осциллирует в полосе пропускания $0 \leq f \leq F_p$ между $(1 + \delta_1)$ и $(1 - \delta_1)$, а в полосе непропускания ($F_s \leq f \leq 0,5$) — между 0 и δ_2 . Характеристика на фиг. 4.24, б осциллирует в полосе пропускания между 1 и $(1 - \hat{\delta}_1)$, а в полосе непропускания — между 0 и $\hat{\delta}_2$. Амплитудная характеристика на фиг. 4.24, а соответствует КИХ-фильтрам, рассмотренным в гл. 3, тогда как характеристика на фиг. 4.24, б [а также на фиг. 4.24, в, о которой будет сказано ниже] более характерна для БИХ-фильтров, рассчитанных методом билинейного преобразования.

Нетрудно связать между собой величины δ_1 , δ_2 , $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ таким образом, чтобы амплитудные характеристики, представленные на фиг. 4.24, а и б, были эквивалентными. Для этого достаточно нормировать первую из них, умножив на $1/(1 + \delta_1)$, что дает

$$\hat{\delta}_1 = \frac{2\delta_1}{1 + \delta_1} \quad (4.100)$$

$$\hat{\delta}_2 = \frac{2\delta_2}{1 + \delta_1} \quad (4.101)$$

$$\delta_1 = \frac{\hat{\delta}_1}{2 - \hat{\delta}_1} \quad (4.102)$$

$$\delta_2 = \frac{2\hat{\delta}_2}{2 - \hat{\delta}_1} \quad (4.103)$$

Обозначения, использованные на фиг. 4.24, б, в принципе вполне приемлемы для амплитудных характеристик БИХ-фильтров, однако более общепринятыми для этих фильтров являются обозначения, использующие параметры пульсаций в полосе пропускания ε и в полосе непропускания A , показанные на фиг. 4.24, в применительно к такой амплитудной характеристике. Из сопоставления фиг. 4.24, б и фиг. 4.24, в легко найти связь ε и A с $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2 - \hat{\delta}_1} \sqrt{\hat{\delta}_1}}{(1 - \hat{\delta}_1)} \quad (4.104a)$$

$$A = \frac{1}{\hat{\delta}_2} \quad (4.104b)$$

Здесь целесообразно ввести три дополнительных параметра фильтра: E — уровень пульсаций (в полосе пропускания), ATT — ослабление в полосе непропускания и η . Они определяются с помощью следующих формул:

$$E = 20 \lg \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad (4.105)$$

$$ATT = 20 \lg A \quad (4.106)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\hat{\delta}_1} \sqrt{2 - \hat{\delta}_1} \hat{\delta}_2}{\sqrt{1 - \hat{\delta}_2^2 (1 - \hat{\delta}_1)}} = \frac{2 \sqrt{\hat{\delta}_1} \hat{\delta}_2}{(1 - \hat{\delta}_1) \sqrt{(1 + \hat{\delta}_1)^2 - \hat{\delta}_2^2}} \quad (4.107)$$

Параметры E и ATT образуют четвертый набор параметров БИХ-фильтра, описывающих его амплитудную характеристику. Показано, что параметр η является основным параметром аналоговых фильтров и будет использован далее при построении расчетных диаграмм.

Выше было отмечено, что при расчете БИХ-фильтра по фильтру-прототипу непрерывного времени методом билинейного преобразования частотные шкалы этих фильтров связаны простым деформирующим соотношением. Поэтому величину переходного отношения k для фильтров нижних частот можно представить следующим образом:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad \text{для фильтров непрерывного времени,} \quad (4.108)$$

$$k = \frac{\operatorname{tg}(\omega_p/2)}{\operatorname{tg}(\omega_s/2)} \quad \text{для цифровых фильтров.} \quad (4.109)$$

Формула (4.109) дает деформированное (по частоте) переходное отношение.

Чтобы иметь возможность связать искомый порядок фильтра n с параметрами пульсаций (δ_1 , δ_2), или ($\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$), или (ε , A), а также со значениями граничных частот (Ω_p , Ω_s) или (ω_p , ω_s), следует для

каждого типа фильтра непосредственно использовать свою формулу для расчета n . Чтобы проанализировать эти формулы, перепишем их:

$$n = \frac{K(k) K(\sqrt{1-k^2})}{K(k_1) K(\sqrt{1-k_1^2})} \text{ для эллиптических фильтров,} \quad (4.110)$$

$$n = \frac{\text{Arch}(1/k_1)}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\right)} \text{ для фильтров Чебышева,} \quad (4.111)$$

$$n = \frac{\ln k_1}{\ln k} \text{ для фильтров Баттерворта.} \quad (4.112)$$

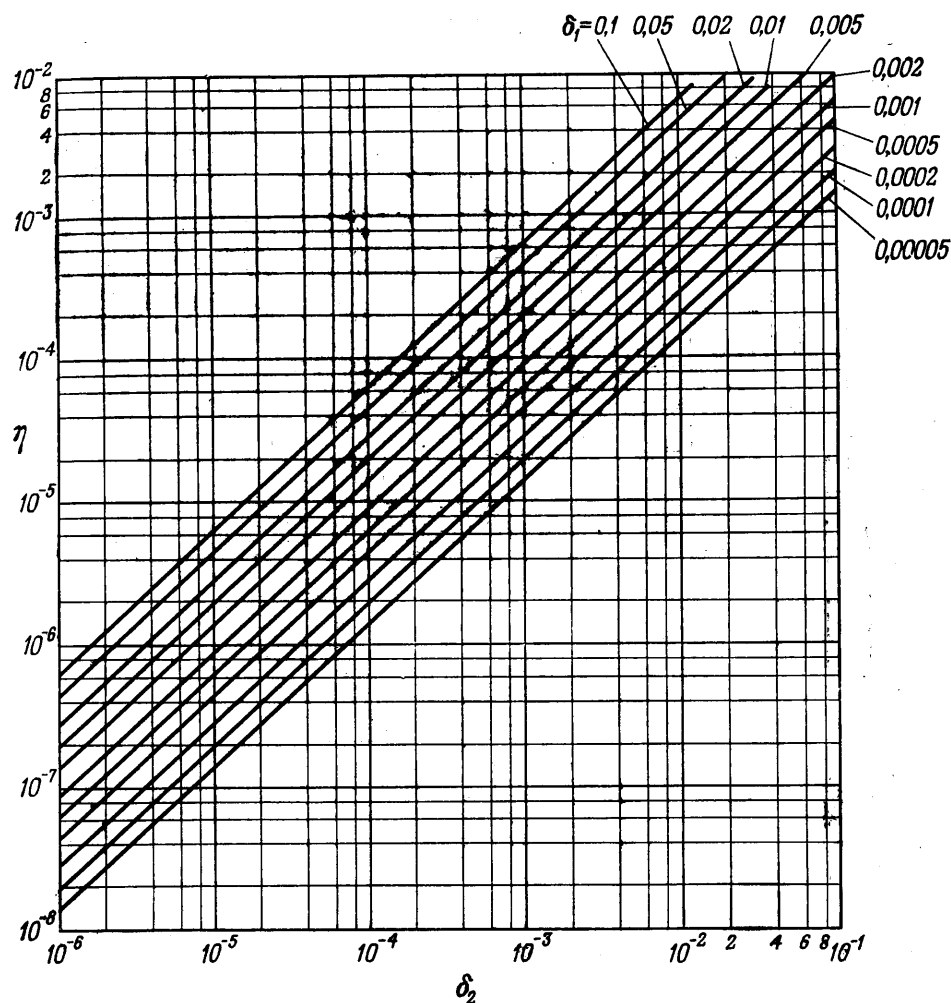
Здесь $k_1 = \eta$ [см. формулу (4.107)]. Ниже для каждого из рассмотренных типов фильтров будет дан простой и наглядный метод графического представления расчетных соотношений для цифровых и аналоговых фильтров с использованием последовательности из трех диаграмм.

Диаграмма 1 (фиг. 4.25а) связывает расчетный параметр фильтра η с параметрами пульсаций δ_1 и δ_2 в полосе пропускания и в полосе непропускания соответственно (или с эквивалентными им параметрами). Диаграмма 2 представляет расчетное соотношение, связывающее порядок фильтра n , расчетный параметр η и переходное отношение k . Диаграмма 3 связывает переходное отношение k , граничную частоту полосы пропускания F_p и ширину переходной полосы ν .

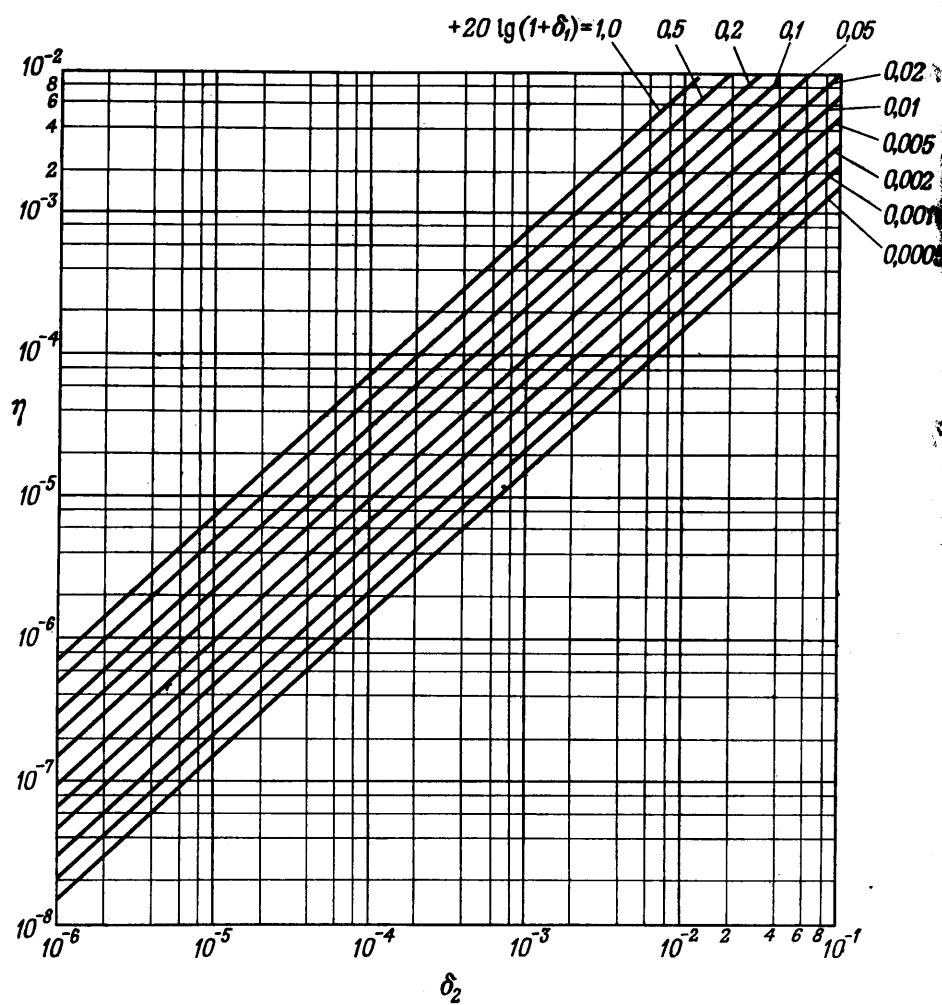
На фиг. 4.25а—4.25г приведены четыре различных варианта диаграммы 1. Диаграммы на фиг. 4.25а и фиг. 4.25б соответствуют фильтрам, для которых в качестве параметров пульсаций используются соответственно δ_1 и величина $20 \lg(1 + \delta_1)$ в децибелах. Диаграммы на фиг. 4.25в и 4.25г соответствуют фильтрам, для которых параметрами являются соответственно $\hat{\delta}_1$ и $20 \lg(1 + \hat{\delta}_1)$ в децибелах.

Приведенные на фиг. 4.26а—4.26в диаграммы 2 представляют расчетные соотношения для каждого из трех фильтров прототипов: (4.110) — для эллиптических фильтров, (4.111) — для фильтров Чебышева и (4.112) — для фильтров Баттерворта. На всех этих диаграммах 2 расчетный параметр фильтров η изображен в функции переходного отношения k ; параметром служит порядок фильтра n . Фиг. 4.26а соответствует эллиптическим фильтрам, фиг. 4.26б — фильтрам Чебышева, фиг. 4.26в — фильтрам Баттерворта. На всех этих трех диаграммах для более удобного размещения кривых, соответствующих различным значениям n , использована неравномерная горизонтальная шкала. Эта нелинейная шкала описывается формулой

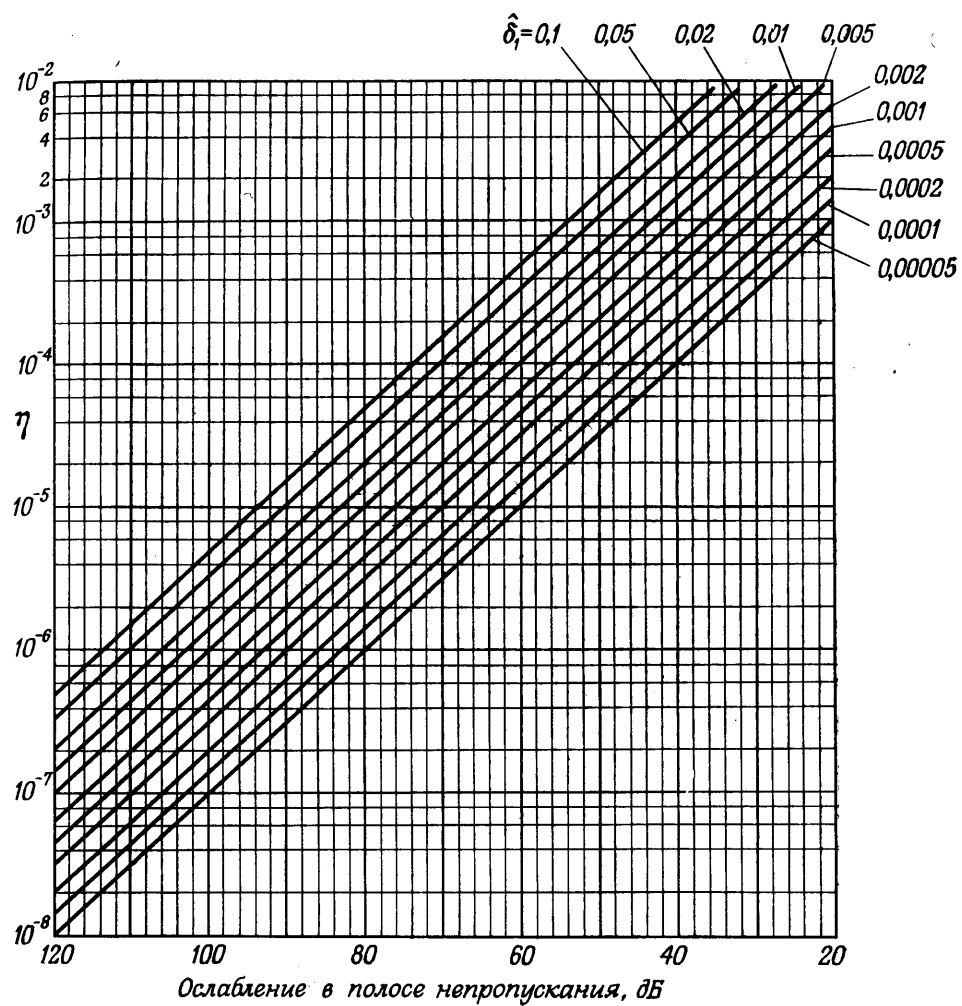
$$x = \frac{k + k^8}{2}, \quad (4.113)$$



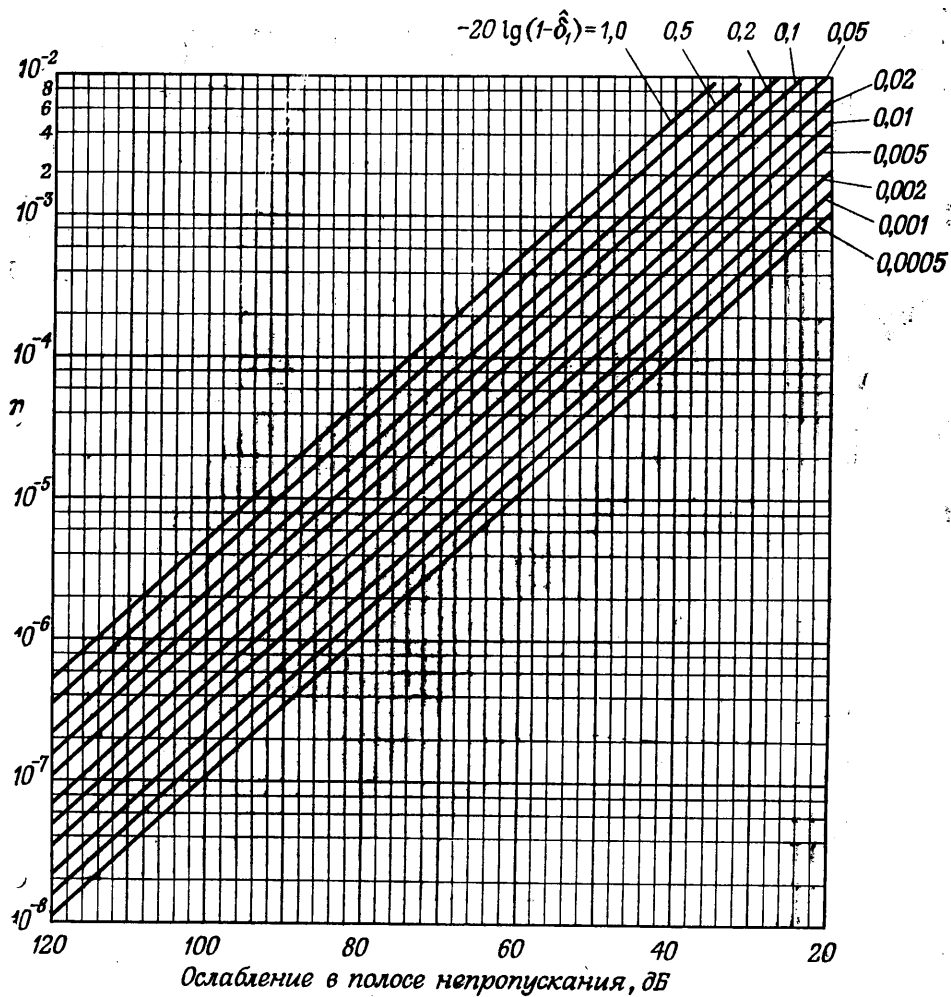
Фиг. 4.25а. Расчетная диаграмма 1. Зависимость η от δ_2 (δ_1 — параметр).



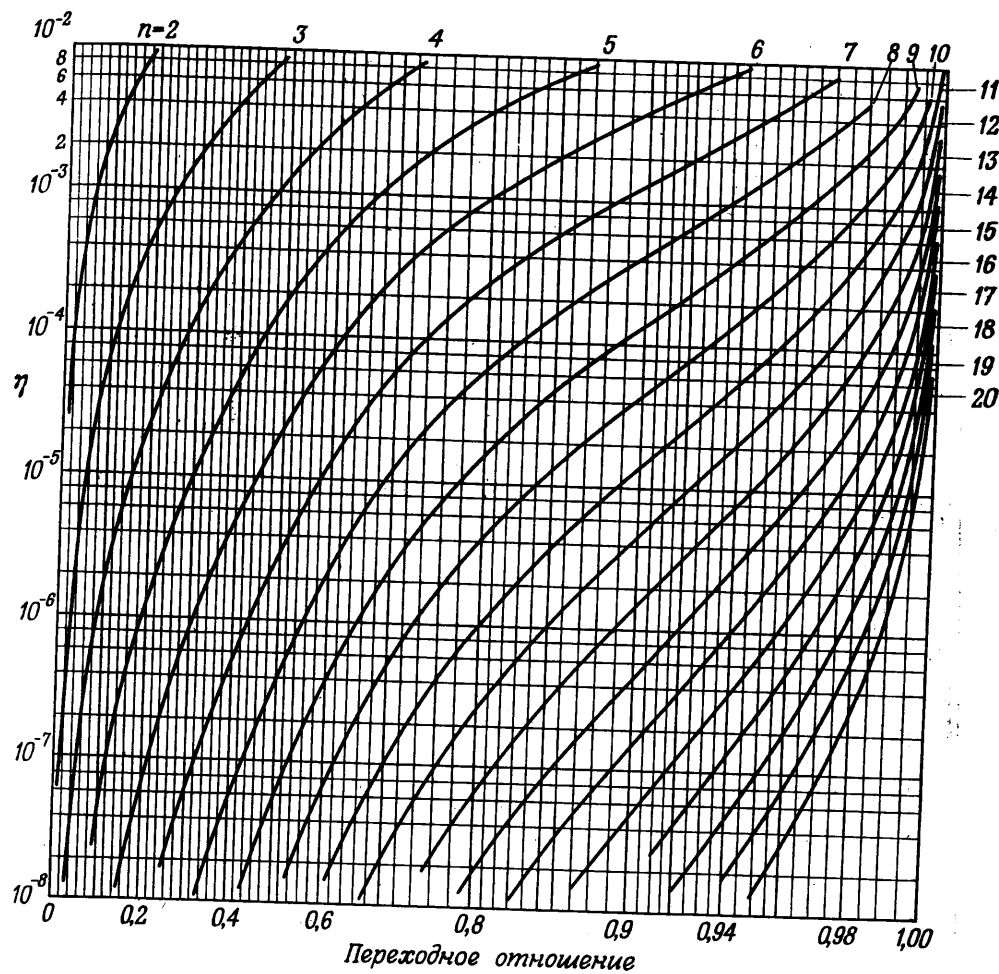
Фиг. 4.256. Расчетная диаграмма 1. Зависимость η от δ_2 [$20 \lg(1 + \delta_1)$ — параметр].



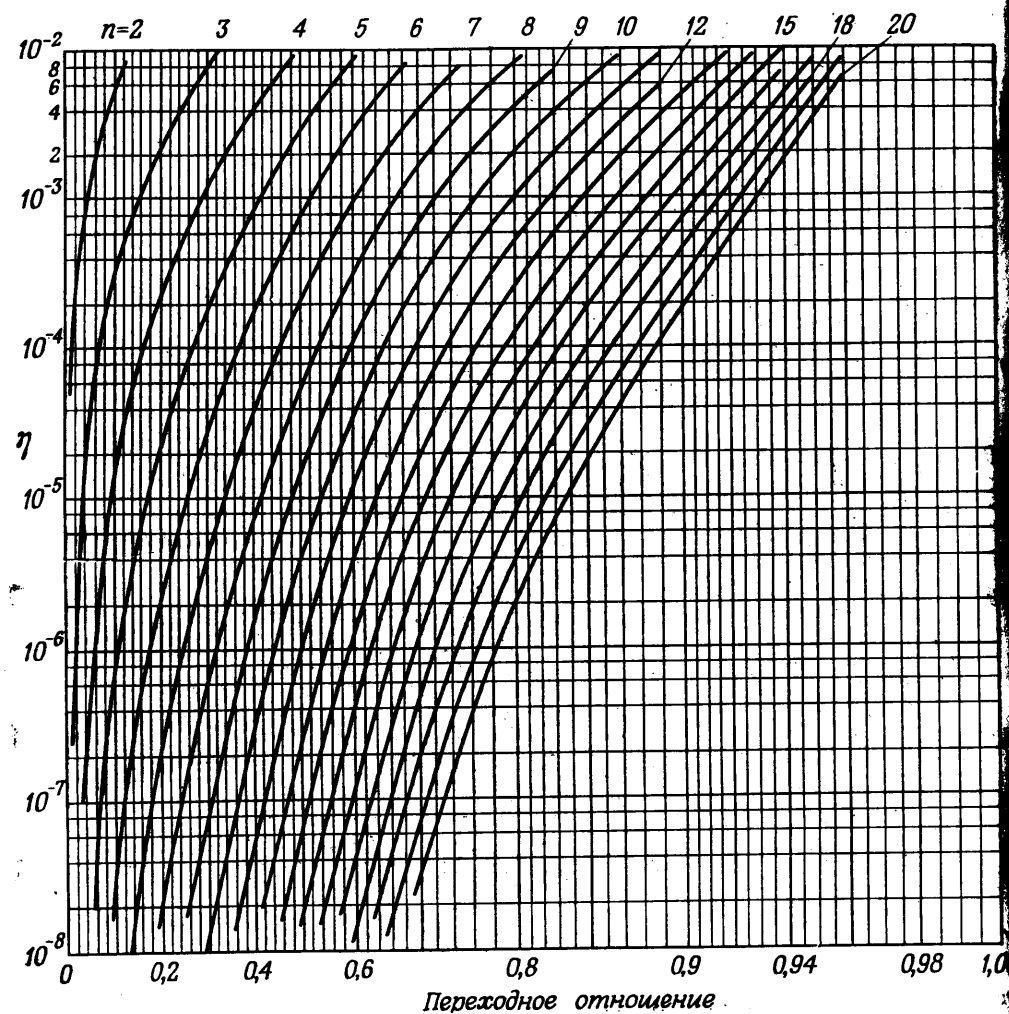
Фиг. 4.25в. Расчетная диаграмма 1. Зависимость η от ослабления в полосе не пропускания ($\hat{\delta}_1$ — параметр).



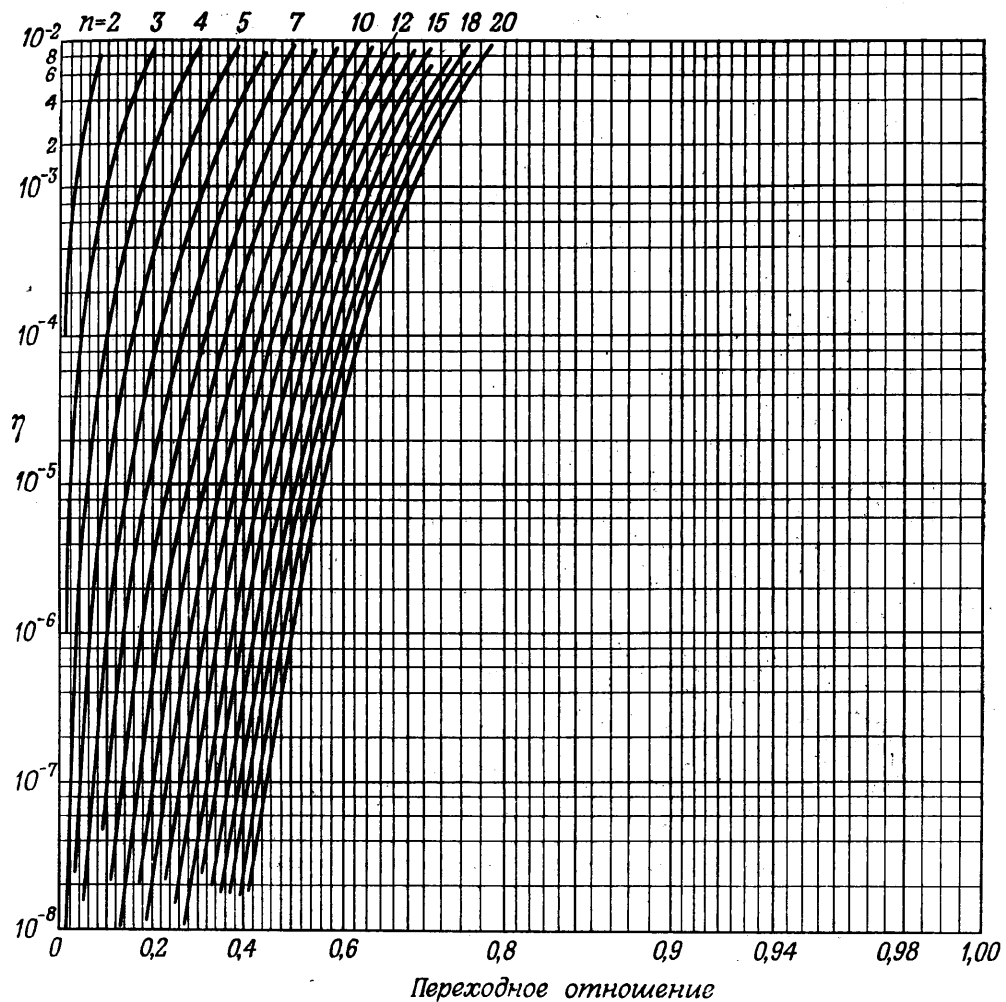
Фиг. 4.25г. Расчетная диаграмма 1. Зависимость η от ослабления в полосе не пропускания $[20 \lg(1 - \delta_1)]$ — параметр.



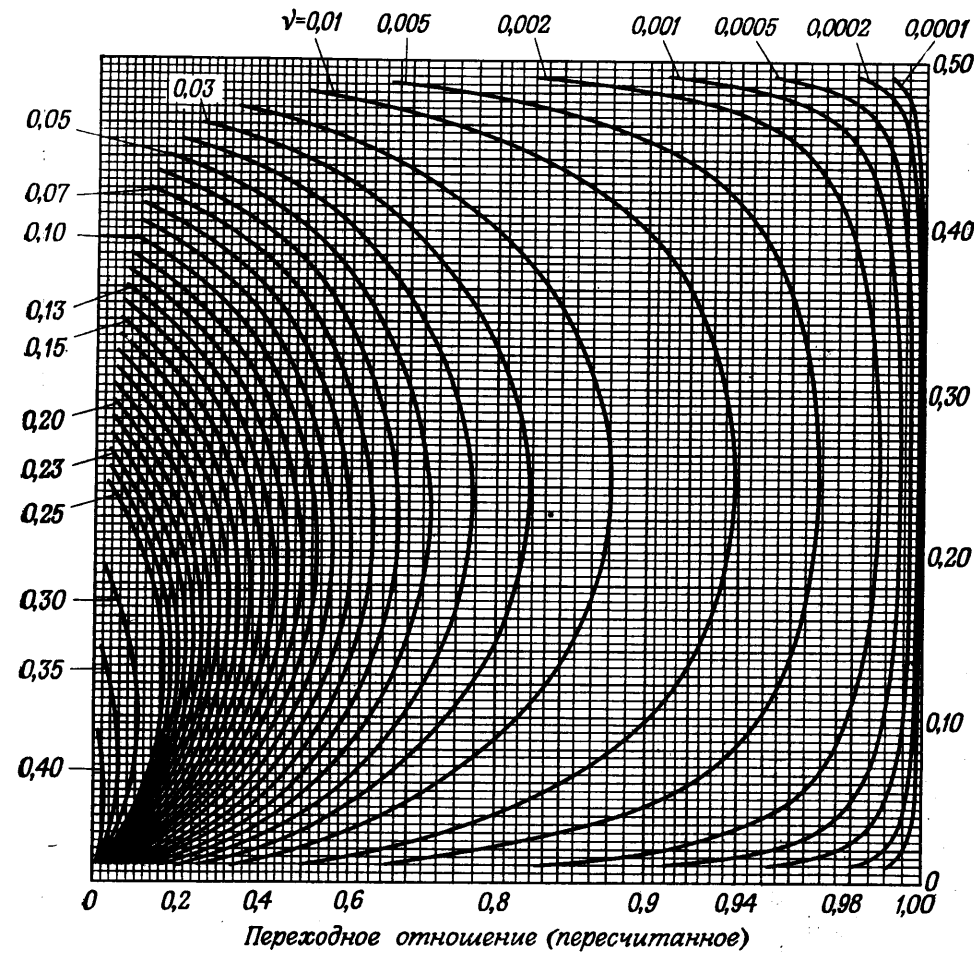
Фиг. 4.26а. Расчетная диаграмма 2. Зависимость η от переходного отношения для эллиптических фильтров (порядок фильтра n — параметр).



Фиг. 4.266. Расчетная диаграмма 2. Зависимость η от переходного отношения для фильтров Чебышева (порядок фильтра n — параметр).



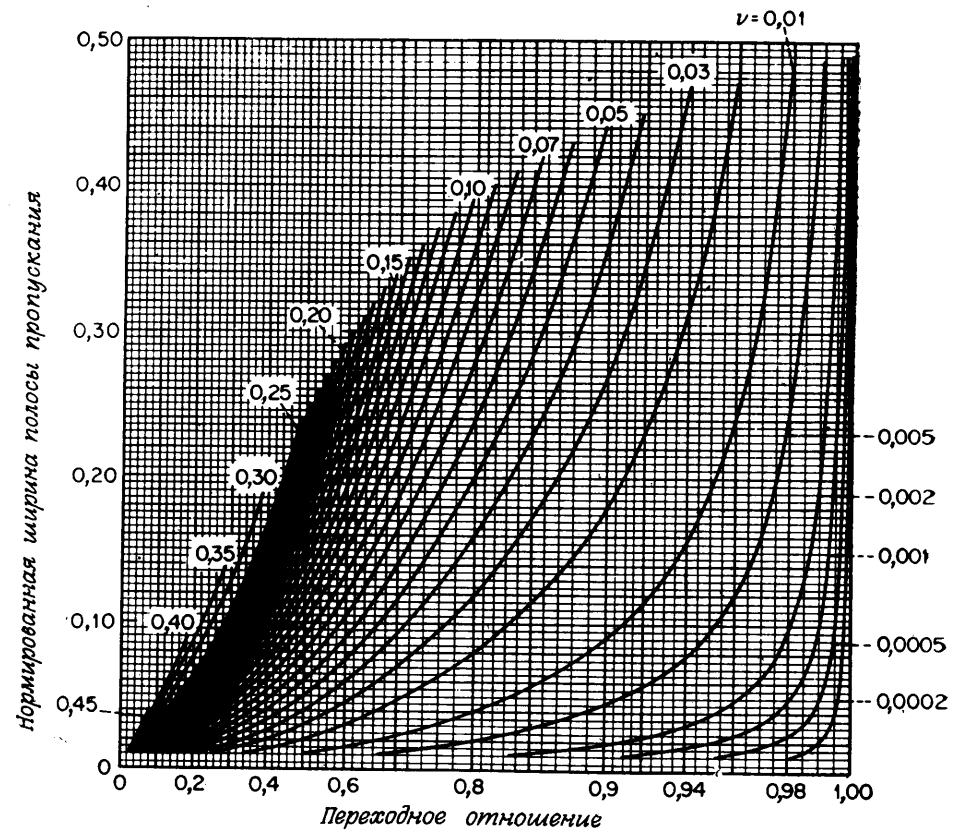
Фиг. 4.26в. Расчетная диаграмма 2. Зависимость η от переходного отношения для фильтров Баттлворта (порядок фильтра n — параметр).



Фиг. 4.27а. Расчетная диаграмма 3. Зависимость нормированной ширины пропускания от переходного отношения для цифровых фильтров (ширина переходной полосы ν — параметр).

где x — значение горизонтальной координаты ($0 \leq x \leq 1$), а k — ширина переходной полосы. Таким образом, при малых значениях k шкала почти нелинейна, а при больших k , близких к 1, она существенно нелинейна.

Приведенные на фиг. 4.27а и 4.276 диаграммы 3 представляют соотношение, связывающее переходное отношение с частотами среза фильтров [см. формулы (4.108) и (4.109)]. На этих диаграммах частота среза полосы пропускания F_p изображена в функции



Фиг. 4.27б. Расчетная диаграмма 3. Зависимость нормированной ширины полосы пропускания от переходного отношения для аналоговых фильтров (ширина переходной полосы ν — параметр).

переходного отношения k при различных значениях нормированной ширины переходной полосы ν , определяемой следующим образом:

$$\nu = F_s - F_p = \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi} \text{ для цифровых фильтров,} \quad (4.114)$$

$$\nu = \Omega_s - \Omega_p \text{ для аналоговых фильтров.}$$

Диаграмма на фиг. 4.27а соответствует цифровым фильтрам, а на фиг. 4.27б — аналоговым. Горизонтальная шкала для переходного отношения идентична шкале, использованной в диаграмме 2 на фиг. 4.26.

Использование диаграмм. Чтобы продемонстрировать использование последовательности диаграмм, приведенных на фиг. 4.25—

4.27, рассмотрим методику определения порядка n цифрового эллиптического фильтра, удовлетворяющего следующим условиям: пульсации в полосе пропускания $\delta_1 = 0,01$ (т. е. $\pm 0,086$ дБ); ослабление в полосе непропускания $\delta_2 = 0,0001$ (80 дБ); граничная частота среза полосы пропускания 480 Гц; граничная частота среза полосы непропускания 520 Гц; частота дискретизации 8000 Гц.

Нормирование граничных частот дает

$$F_p = \frac{480}{8000} = 0,06,$$

$$F_s = \frac{520}{8000} = 0,065.$$

Для определения порядка n цифрового эллиптического фильтра воспользуемся диаграммами фиг. 4.25а, 4.26а и 4.27а [диаграмма на фиг. 4.26а предназначена для расчета эллиптических фильтров]. Для получения значения η выберем на фиг. 4.25а кривую, соответствующую $\delta_1 = 0,01$. Найдя ее пересечение с линией, соответствующей $\delta_2 = 0,0001$, получим $\eta \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Для определения переходного отношения воспользуемся диаграммой на фиг. 4.27а. Найдём пересечение кривой, соответствующей $\nu = F_s - F_p = 0,005$, с линией, соответствующей $F_p = 0,06$; переходное отношение оказывается равным 0,923. [Эта величина хорошо согласуется с отношением $F_p/F_s = 0,06/0,065 = 0,923$, соответствующим другому способу нахождения переходного отношения.] Теперь из диаграммы на фиг. 4.26а можно определить порядок фильтра n , найдя пересечение линий, соответствующих значениям расчетного параметра фильтра $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ и переходного отношения $k = 0,923$. Таким образом, искомый порядок эллиптического фильтра приблизительно равен 11,5. Чтобы получить заданные значения четырех исходных параметров фильтра, необходимо использовать фильтр 12-го порядка.

При окончательном выборе характеристик фильтра, однако, возможны несколько вариантов. Так, например, если зафиксировать $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ и изменять переходное отношение приблизительно до величины 0,94, когда порядок фильтра n станет равным 12, то новое значение переходного отношения можно получить, соответственно изменив либо F_s , либо F_p . При этом различные варианты характеристик фильтра можно получить с помощью фиг. 4.27а. Если же зафиксировать переходное отношение, то при $n = 12$ параметр фильтра η будет равен $1,0 \cdot 10^{-5}$. Теперь по диаграмме 1 на фиг. 4.25а можно сравнить различные варианты выбора величин δ_1 и δ_2 , определяющих новое значение параметра η . Можно, кроме того, изменить и η , и переходное отношение, взяв, например, их равными $1,5 \cdot 10^{-5}$ и 0,93, так чтобы точка с этими координатами находилась на кривой с $n = 12$. В этом

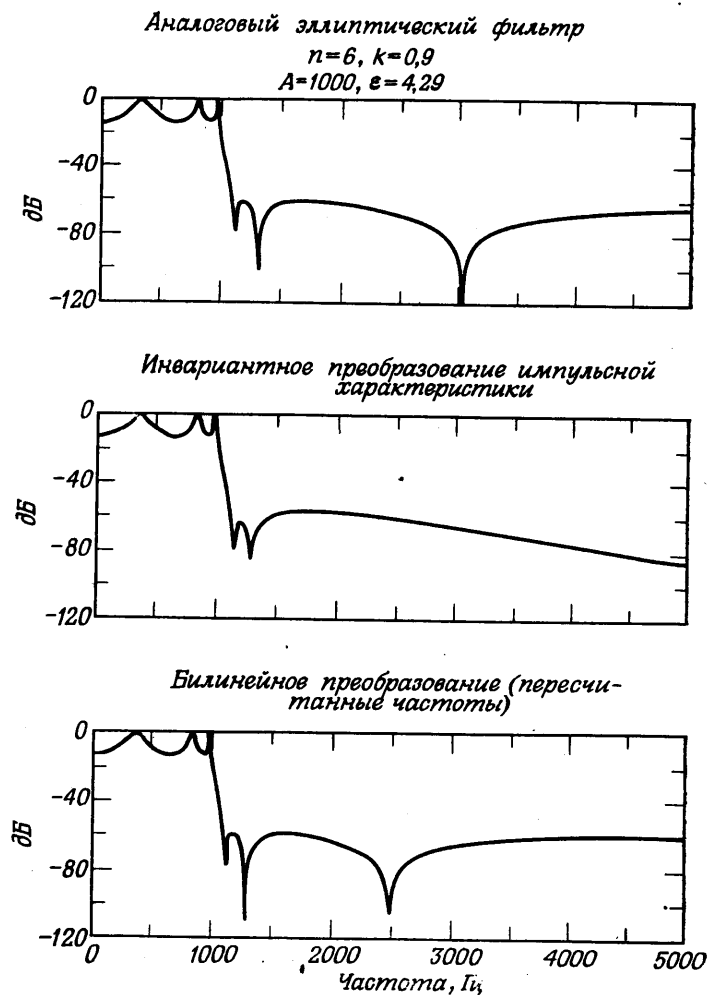
случае для обеспечения новых значений η и переходного отношения можно изменять все четыре параметра фильтра.

Отметим, что при расчете фильтров Чебышева или Баттерворта следует в качестве диаграммы 2 вместо фиг. 4.26а, предназначенной для расчета эллиптических фильтров, использовать фиг. 4.26б или фиг. 4.26в. Методика расчета при этом не меняется. Для каждого из этих двух типов фильтров требуемый порядок будет значительно превышать максимальный предел, использованный в диаграммах и равный 20, так что «эффективность» эллиптических фильтров очевидна.

Описанная методика графического расчета фильтров весьма универсальна. Вообще она универсальнее большинства программ расчета фильтров. *Более того, графическая методика дает возможность разработчику глубже понять влияние небольших изменений характеристик фильтра на искомую величину его порядка.* Часто разработчик готов снизить требования к характеристикам фильтра, особенно если это может привести к уменьшению его порядка, выбираемого из условия обеспечения этих характеристик.

4.11. Сравнение методов инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования для эллиптических фильтров

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с дискретизацией аналоговых фильтров методами инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования, используя ряд примеров. Так, на фиг. 4.28 представлена амплитудная характеристика (в логарифмическом масштабе) аналогового эллиптического фильтра нижних частот со следующими параметрами: $n = 6$, переходное отношение $k = 0,9$, $A = 1000$ (т. е. ослабление в полосе пропускания равно 60 дБ), $\epsilon = 4,29$. Частота среза полосы пропускания равна 1000 Гц. На этой же фигуре изображена амплитудная характеристика (в логарифмическом масштабе) цифрового фильтра (во всех примерах частота дискретизации равна 10 000 Гц), рассчитанного методом инвариантного преобразования импульсной характеристики аналогового фильтра. Вблизи частоты 1500 Гц ясно видны эффекты наложения, которые привели к нарушению равновеликого характера пульсаций в полосе пропускания. Кроме того, минимум ослабления в полосе непропускания уменьшился с 60 дБ примерно до 55 дБ. Третья амплитудная характеристика на фиг. 4.28 соответствует цифровому фильтру, рассчитанному методом билинейного преобразования после предварительного пересчета всех характерных частот аналогового фильтра. Видно, что по сравнению с аналоговым фильтром положения



Фиг. 4.28. Сравнение методов инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования для эллиптического фильтра нижних частот.

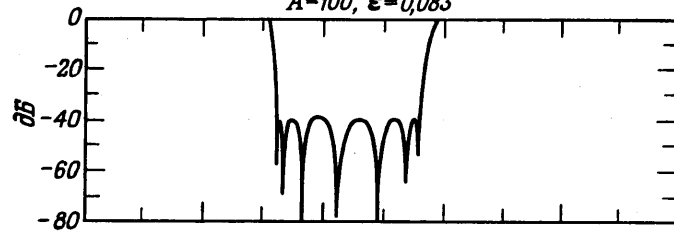
максимумов и минимумов несколько сместились, однако пульсации характеристики по-прежнему остались равновеликими.

Следующие два примера приведены для иллюстрации подобных эффектов применительно к эллиптическим режекторным фильтрам и эллиптическим фильтрам верхних частот. На фиг. 4.29 представлены амплитудные характеристики аналогового эллиптического режекторного фильтра и двух цифровых фильтров, полученных из аналогового методами инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования. Полоса исходного аналогового фильтра была неограничена, поэтому эффекты наложения, характерные для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, привели к потере цифровым фильтром режекторных свойств. В то же время цифровой фильтр, рассчитанный методом билинейного преобразования, оказался идентичным исходному аналоговому фильтру. Аналогичные результаты представлены на фиг. 4.30 для фильтра верхних частот. Опять цифровой фильтр, полученный методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, оказался неприемлемым, так как полоса исходного аналогового фильтра была неограничена.

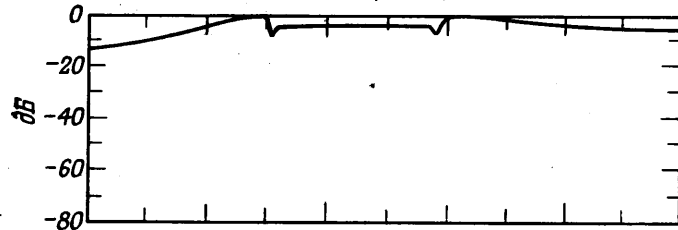
Последний пример, представленный на фиг. 4.31, иллюстрирует интересный результат использования билинейного преобразования для дискретизации аналоговых фильтров типа фильтра Баттерворта. Наверху показана амплитудная характеристика фильтра Баттерворта нижних частот с параметрами $n=6$ и $f_c=3500$ Гц. На частоте 5000 Гц амплитудная характеристика спадает до уровня -20 дБ. В середине фиг. 4.31 представлена характеристика, соответствующая цифровому фильтру, рассчитанному методом инвариантного преобразования импульсной характеристики. Она иллюстрирует эффект наложения, проявившийся в том, что на частоте 5000 Гц характеристика спадает лишь до -12 дБ. Для фильтра, рассчитанного методом билинейного преобразования, уже на частоте 4500 Гц характеристика спадает до уровня -60 дБ. Таким образом, цифровой фильтр Баттерворта, рассчитанный методом билинейного преобразования, значительно лучше своего аналогового прототипа. Это связано с нелинейной деформацией частотной шкалы, которая и привела к улучшению избирательности фильтра.

Необходимо отметить, что во всех приведенных примерах сопоставлялись только амплитудные характеристики исходных аналоговых и цифровых фильтров, рассчитанных методами инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования. Если для разработчика представляет интерес характеристика групповой задержки или импульсная характеристика цифрового фильтра, ему придется провести дополнительный анализ. Можно показать, что в общем случае при билиней-

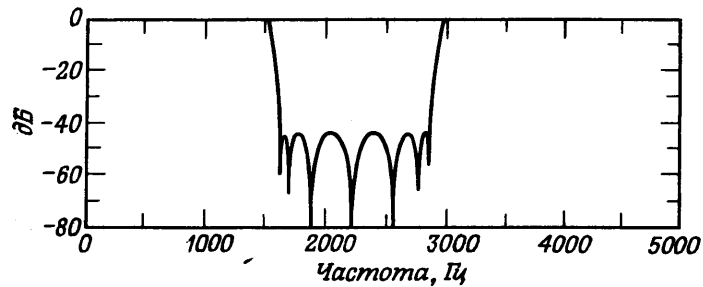
Аналоговый эллиптический фильтр

 $n=7, k=0,8$
 $A=100, \epsilon=0,083$


Инвариантное преобразование импульсной характеристики

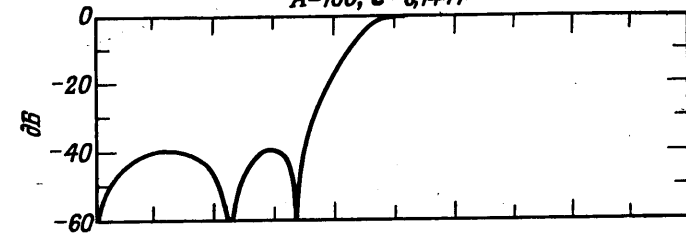


Билинейное преобразование (пересчитанные частоты)

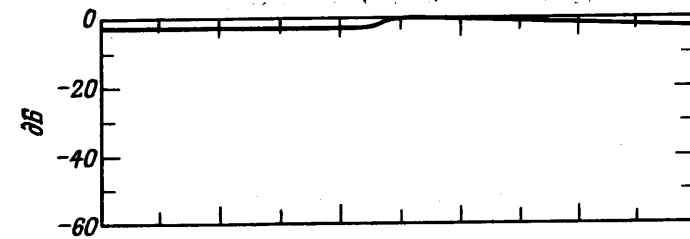


Фиг. 4.29. Сравнение методов инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования для эллиптического режкторного фильтра.

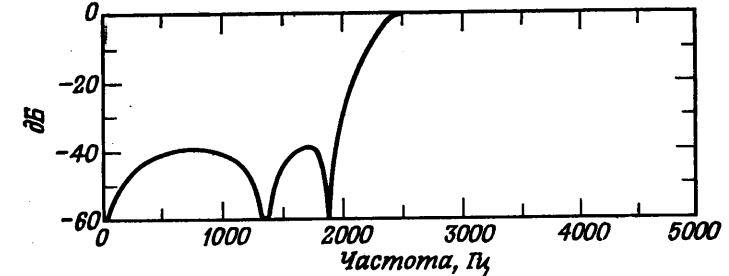
Аналоговый эллиптический фильтр

 $n=5, k=0,707$
 $A=100, \epsilon=0,1447$


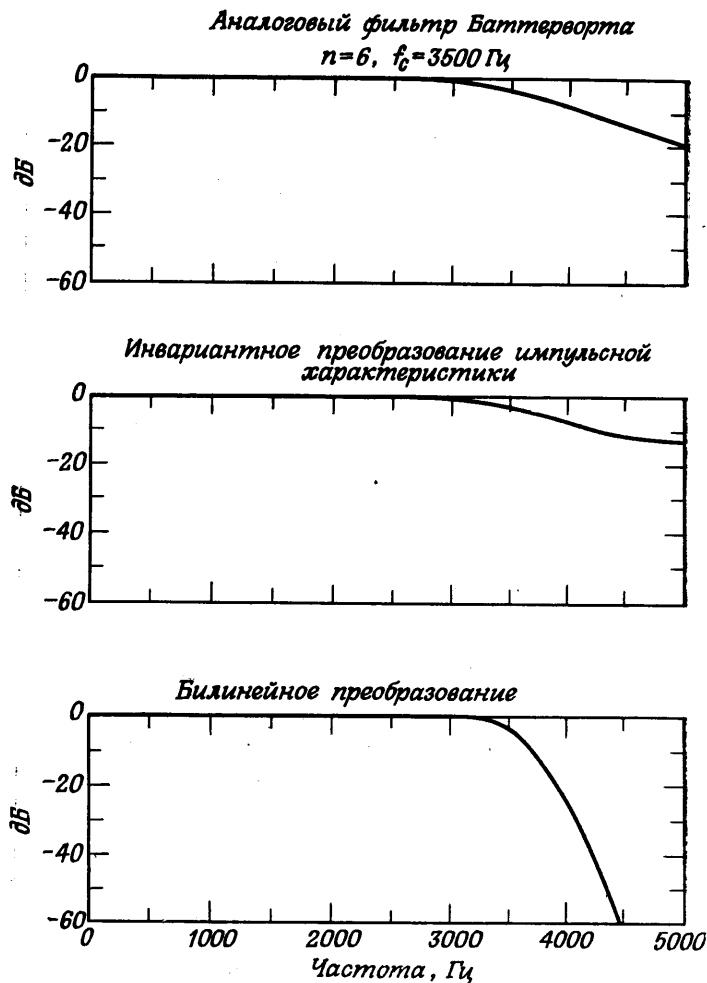
Инвариантное преобразование импульсной характеристики



Билинейное преобразование (пересчитанные частоты)



Фиг. 4.30. Сравнение методов инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования для эллиптического фильтра верхних частот.



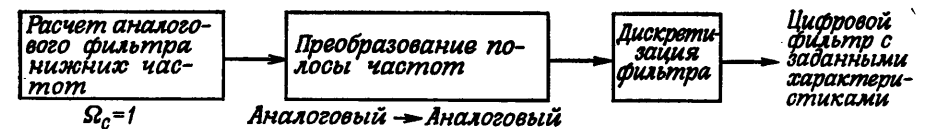
Фиг. 4.31. Сравнение методов инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования для широкополосного фильтра Баттлерворта нижних частот.

ном преобразовании свойства импульсной характеристики и характеристики групповой задержки аналогового фильтра не сохраняются. Так, в результате билинейного преобразования аналогового фильтра Бесселя свойство максимальной гладкости характеристики групповой задержки не сохраняется. Более того, поскольку амплитудная характеристика фильтров Бесселя существенно непостоянна в полосе пропускания, билинейное преобразование приведет к искажению как амплитудной характеристики, так и характеристики групповой задержки. В большинстве случаев, когда разработчика интересует прежде всего сохранение свойств временных характеристик аналогового фильтра, целесообразно использовать метод инвариантного преобразования импульсной характеристики. Почти во всех других случаях используется билинейное преобразование.

4.12. Частотные преобразования

В предыдущих разделах рассматривались методы расчета фильтров нижних частот непрерывного времени, а также методы их дискретизации. При расчете цифровых фильтров верхних частот, полосовых и режекторных используются два подхода, представленные на фиг. 4.32. Различие между ними заключается в следующем. В первом случае нормализованный аналоговый фильтр предварительно преобразуется в другой аналоговый фильтр, из которого затем путем дискретизации рассчитывается цифровой фильтр с заданными характеристиками. Во втором случае нормированный фильтр нижних частот дискретизируется сразу же, а затем путем преобразования его полосы формируется цифровой фильтр с заданными характеристиками. Поскольку выше уже были описаны и методы расчета аналоговых нормированных фильт-

Метод 1



Метод 2



Фиг. 4.32. Частотные преобразования фильтров нижних частот.

ров нижних частот, и методы их дискретизации, в данном разделе будут рассмотрены различные методы преобразования полосы для аналоговых и цифровых фильтров.

1. Преобразования полосы частот для аналоговых фильтров

Существует много различных методов преобразования фильтра нижних частот с частотой среза, равной 1 рад/с, в другой фильтр нижних частот (имеющий другую частоту среза), а также в фильтр верхних частот, полосовой или режекторный. Перечислим наиболее простые преобразования:

$$s \rightarrow \frac{s}{\Omega_u} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Фильтр нижних частот,} \quad (4.115)$$

$$s \rightarrow \frac{\Omega_u}{s} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Фильтр верхних частот,} \quad (4.116)$$

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Полосовой фильтр,} \quad (4.117)$$

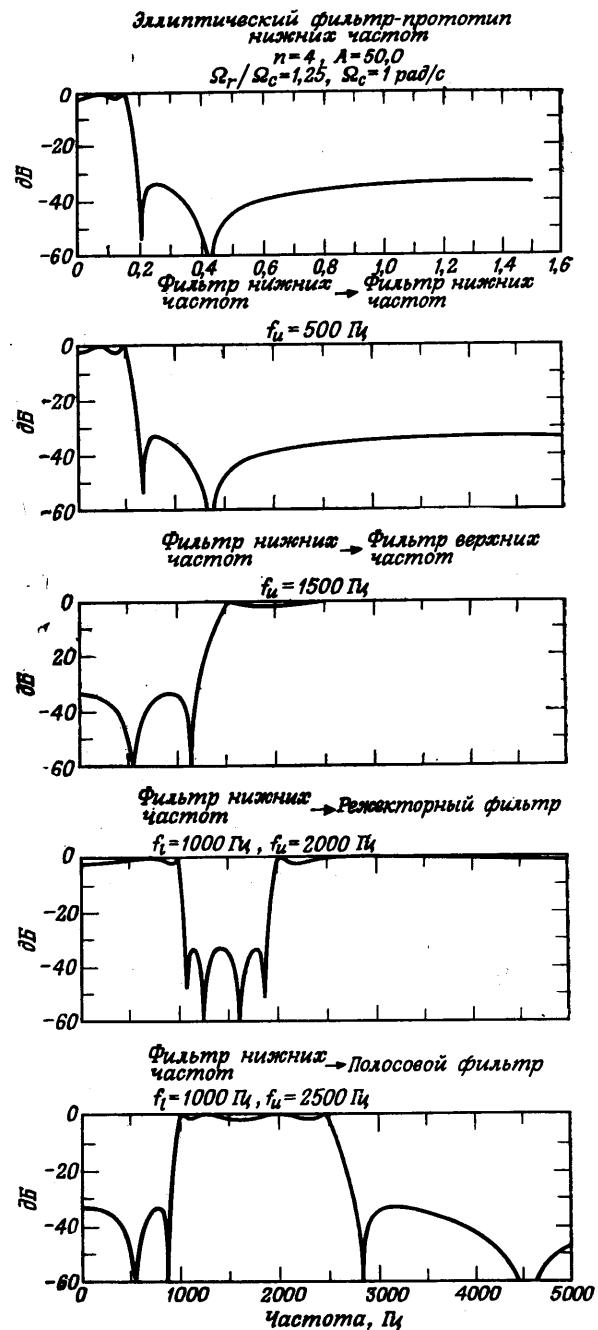
$$s \rightarrow \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Режекторный фильтр.} \quad (4.118)$$

Здесь Ω_l — нижняя частота среза, Ω_u — верхняя частота среза.

Примеры преобразования нормированного эллиптического фильтра нижних частот в другой фильтр нижних частот, в фильтр верхних частот, полосовой и режекторный с использованием соотношений (4.115) — (4.118) показаны на фиг. 4.33. Все эти соотношения имеют весьма нелинейный характер, однако при преобразовании стандартных фильтров нижних частот рассмотренных выше типов (за исключением фильтров Бесселя) эти нелинейности не создают никаких трудностей, поскольку частотные характеристики преобразуемых фильтров в интересующей нас полосе частот аппроксимируются ступенчатой функцией. Так, нелинейность отображения приводит к изменению взаимного расположения максимумов и минимумов пульсаций характеристик эллиптических фильтров, но не влияет на амплитуду этих пульсаций. Поэтому фильтры, рассчитанные методами преобразования полосы, сохраняют равновеликий характер пульсаций фильтра-прототипа.

2. Преобразования полосы для цифровых фильтров

По аналогии с фильтрами непрерывного времени существует несколько простых преобразований цифрового фильтра нижних частот (с частотой среза ω_c) в другой фильтр нижних частот (с другой частотой среза ω_u), а также в цифровой фильтр верхних частот, полосовой или режекторный. Ниже приведены формулы для



Фиг. 4.33. Преобразования полосы аналогового фильтра нижних частот.

этих преобразований:

$$1. z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Фильтр нижних частот.} \quad (4.119)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sin \{[(\omega_c - \omega_u)/2] T\}}{\sin \{[(\omega_c + \omega_u)/2] T\}}, \quad (4.120)$$

ω_u — заданная частота среза фильтра нижних частот.

$$2. z^{-1} \rightarrow -\left(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}\right) \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Фильтр верхних частот.} \quad (4.121)$$

Здесь

$$\alpha = -\frac{\cos \{[(\omega_c - \omega_u)/2] T\}}{\cos \{[(\omega_c + \omega_u)/2] T\}}, \quad (4.122)$$

ω_u — заданная частота среза фильтра верхних частот.

$$3. z^{-1} \rightarrow -\frac{\{z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)]z^{-1} + (k-1)/(k+1)\}}{\{[(k-1)/(k+1)]z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)]z^{-1} + 1\}} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Полосовой фильтр.} \quad (4.123)$$

Здесь

$$\alpha = \cos(\omega_0 T) = \frac{\cos \{[(\omega_u + \omega_l)/2] T\}}{\cos \{[(\omega_u - \omega_l)/2] T\}}, \quad (4.124)$$

$$k = \operatorname{ctg} \left[\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2} \right) T \right] \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_c T}{2} \right), \quad (4.125)$$

ω_0 — центральная частота полосового фильтра.

$$4. z^{-1} \rightarrow \frac{\{z^{-2} - [2\alpha/(1+k)]z^{-1} + (1-k)/(1+k)\}}{\{[(1-k)/(1+k)]z^{-2} - [2\alpha/(1+k)]z^{-1} + 1\}} \text{ Фильтр нижних частот} \rightarrow \text{Режекторный фильтр.} \quad (4.126)$$

Здесь

$$\alpha = \cos(\omega_0 T) = \frac{\cos \{[(\omega_u - \omega_l)/2] T\}}{\cos \{[(\omega_u + \omega_l)/2] T\}}, \quad (4.127)$$

$$k = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2} T \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_0 T}{2} \right), \quad (4.128)$$

ω_0 — центральная частота режекторного фильтра.

Ясно, что преобразования (4.119) — (4.128) соответствуют всепропускающим фильтрам, так как единичная окружность отображается в такую же окружность один или несколько раз. Поэтому, хотя частотная шкала при отображении и деформируется, амплитудная характеристика исходного фильтра нижних частот сохраняется. По этой причине эллиптический фильтр нижних частот, например, преобразуется в другой эллиптический фильтр.

Фиг. 4.34. Преобразования полюсы цифрового фильтра нижних частот (по Константинову).

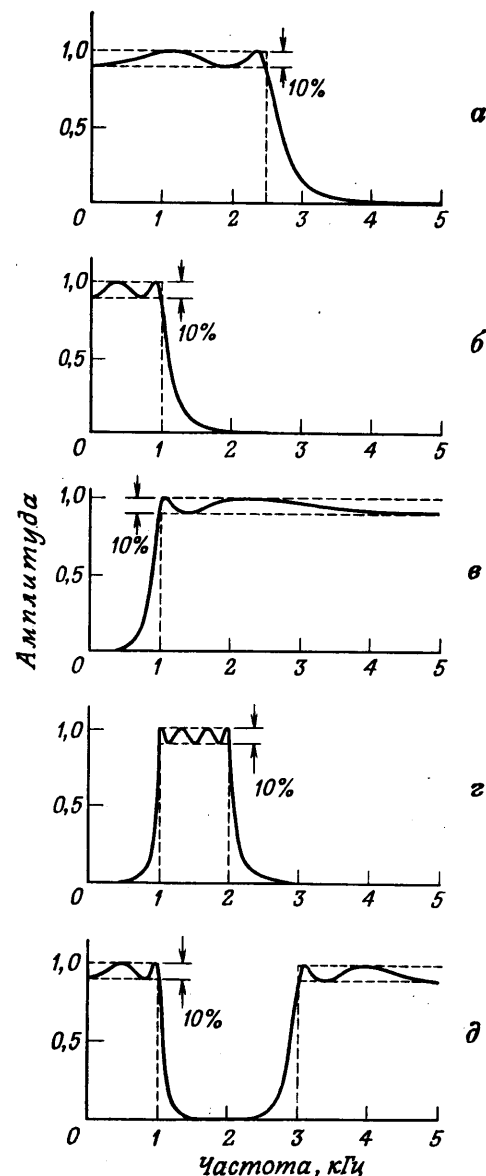
a — фильтр-прототип нижних частот, $f_c = \omega_c/2\pi = 2500$ Гц, $f_s = 10000$ Гц, $n = 4$;

b — фильтр нижних частот → фильтр нижних частот, $f_c = 1$ кГц;

в — фильтр нижних частот → фильтр верхних частот, $f_c = 1$ кГц;

г — фильтр нижних частот → полосовой фильтр, $f_l = 1$ кГц, $f_u = 2$ кГц;

д — фильтр нижних частот → режекторный фильтр, $f_l = 1$ кГц, $f_u = 2$ кГц.



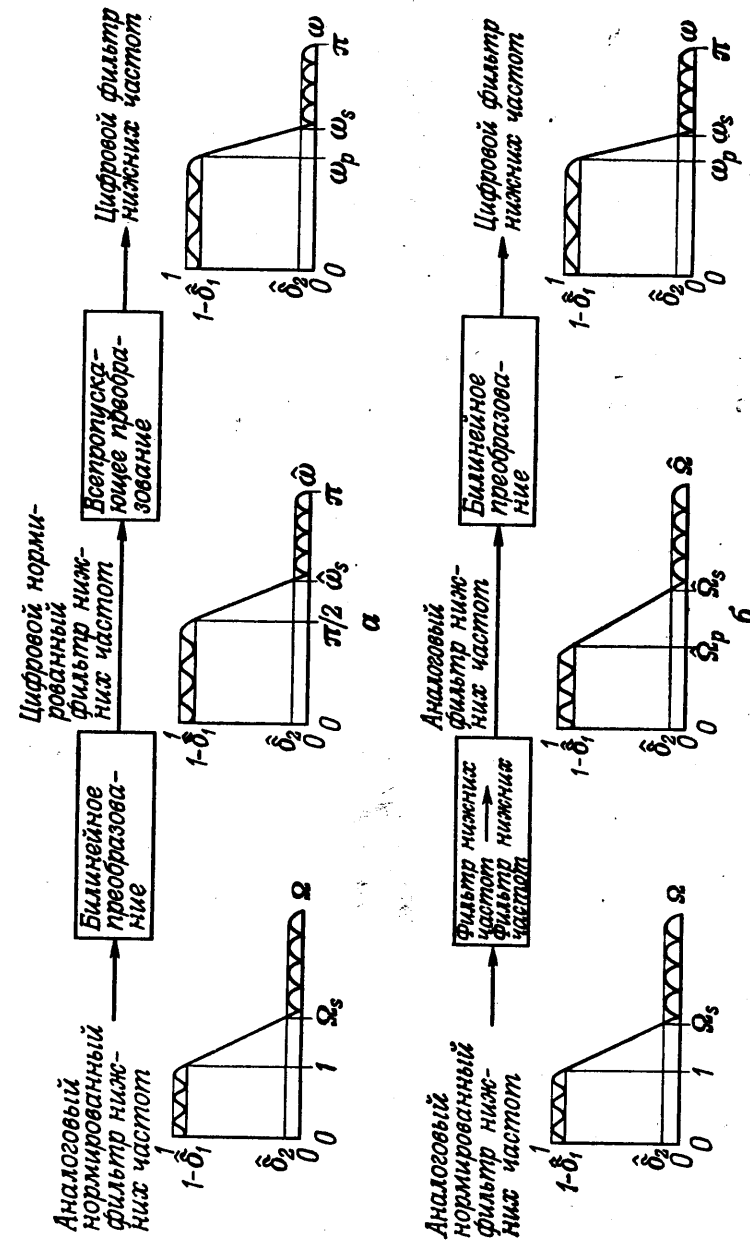
Некоторые свойства рассматриваемых преобразований иллюстрируются на нескольких примерах, приведенных на фиг. 4.34. В качестве фильтра-прототипа был взят фильтр Чебышева нижних частот (с частотой среза ω_c рад/с). Он был преобразован в другой фильтр нижних частот, фильтр верхних частот, а также в полосовой и режекторный фильтры. Прежде всего из приведенных кривых следует, что по существу каждый из новых фильтров образуется путем преобразования фильтра-прототипа нижних частот в другой соответствующий фильтр нижних частот с последующей простой заменой переменной z^{-1} на эту же переменную в первой или во второй степени (например, при переходе к фильтру верхних частот используется замена $z^{-1} \rightarrow -z^{-1}$). Кроме того, характер отображения можно понять, рассмотрев, в какие частоты отображаются при преобразовании критические частоты фильтра-прототипа нижних частот. Все эти преобразованные частоты сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значения частот при преобразованиях полюс цифровых фильтров

	Частоты фильтра-прототипа			
	0	$-\omega_c$	$+\omega_c$	$\omega_s/2$
Фильтр нижних частот	0	$-\omega_u$	$+\omega_u$	$\omega_s/2$
Фильтр верхних частот	$\omega_s/2$	ω_u	$-\omega_u$	0
Частоты фильтра, получаемого после преобразования				
Полосовой фильтр	$\pm \omega_0$	$\pm \omega_l$	$\pm \omega_u$	$\omega_s/2$
Режекторный фильтр	0 $\omega_s/2$	$\pm \omega_u$	$\pm \omega_l$	$\pm \omega_0$

Преобразования полюсы для цифровых фильтров просто использовать, так как они отображают рациональную передаточную функцию в новую рациональную передаточную функцию. Эти преобразования не вносят искажений в амплитудную шкалу, поэтому они успешно конкурируют с методами преобразования полюсы аналоговых фильтров-прототипов нижних частот. Действительно, было показано, что билинейное преобразование нормированного аналогового фильтра нижних частот с последующим всепропускающим преобразованием эквивалентно преобразованию полюсы аналогового фильтра с последующим билинейным преобразованием. Оба эти подхода иллюстрируются на фиг. 4.35 на примере расчета фильтра нижних частот. В первом слу-



Фиг. 4.35. Два метода расчета цифрового фильтра по характеристикам аналогового фильтра.

чае (фиг. 4.35, а) билинейное преобразование аналогового нормированного фильтра нижних частот дает нормированный цифровой фильтр нижних частот (частота среза его полосы пропускания $\hat{\omega}_p = \pi/2$), который затем преобразуется в другой цифровой фильтр нижних частот, удовлетворяющий заданным характеристикам. Во втором случае (фиг. 4.35, б) нормированный аналоговый фильтр нижних частот сначала преобразуется в другой, ненормированный аналоговый фильтр нижних частот, а затем методом билинейного преобразования рассчитывается цифровой фильтр, удовлетворяющий заданным характеристикам. С расчетной точки зрения оба эти метода приблизительно равноценны.

4.13. Прямые методы расчета цифровых фильтров

В предыдущих разделах были рассмотрены методы расчета цифровых фильтров, основанные на дискретизации фильтров непрерывного времени. Существуют также прямые методы расчета цифровых фильтров в частотной или временной областях, которые образуют вторую группу методов расчета цифровых фильтров. К ним относятся как методы расчета по заданному квадрату амплитудной характеристики, так и методы расчета во временной области. Ниже дается краткое описание прямых методов и рассматриваются возможности их применения.

1. Расчет по квадрату амплитудной характеристики

Обозначим z -преобразование импульсной характеристики БИХ-фильтра через $H(z)$. Оно равно

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{-i}} \quad (4.129)$$

Квадрат амплитудной характеристики фильтра легко найти следующим образом:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z) H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (4.130)$$

и записать как

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} b_i e^{-j\omega i} \sum_{k=0}^{m-1} b_k e^{j\omega k}}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{-j\omega i} \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{j\omega k}}, \quad (4.131)$$

или

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} c_i \cos(\omega i)}{\sum_{i=0}^{n-1} d_i \cos(\omega i)} \quad (4.132)$$

Коэффициенты $\{c_i\}$ и $\{d_i\}$ связаны с коэффициентами $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$. Выражение (4.132) часто записывают в несколько ином виде:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} e_i \cos^2(\omega i/2)}{\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cos^2(\omega i/2)} \quad (4.133)$$

Таким образом, квадрат амплитудной характеристики всегда можно представить как отношение двух тригонометрических функций от частоты ω .

Выражение (4.133) является основой многих методов расчета цифровых фильтров по заданному квадрату амплитудной характеристики. Кроме того, с помощью этого выражения цифровой фильтр удается связать с аналоговым, квадрат амплитудной характеристики которого равен отношению полиномов по Ω^2 . Действительно, используя подстановку

$$\Omega = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (4.134)$$

можно выражение (4.133) привести к виду, характерному для передаточной функции аналогового фильтра.

Перепишем выражение (4.133) в упрощенной форме:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + A_n^2(\omega)} \quad (4.135)$$

Здесь $A_n^2(\omega)$ — рациональный полином n -го порядка по тригонометрическим функциям. Соответствующий выбор функции $A_n^2(\omega)$ позволяет получить цифровые фильтры различных типов, обладающие заданными амплитудными характеристиками. Так, фильтр нижних частот Баттерворта соответствует функция

$$A_n^2(\omega) = \frac{\text{tg}^{2n}(\omega/2)}{\text{tg}^{2n}(\omega_c/2)}, \quad (4.136)$$

где ω_c — частота среза фильтра. Для фильтра Чебышева

$$A_n^2(\omega) = \varepsilon^2 T_n^2 \left[\frac{\text{tg}(\omega/2)}{\text{tg}(\omega_c/2)} \right], \quad (4.137)$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева n -го порядка, а ε — параметр пульсаций. Можно показать, что цифровые фильтры Баттерворта

и Чебышева, рассчитанные по квадрату амплитудной характеристики, достаточно просто связаны с фильтрами, полученными методом билинейного преобразования аналоговых фильтров Баттерворта и Чебышева, поэтому далее эти типы фильтров рассматриваться не будут.

Расчет БИХ-фильтров по заданному квадрату амплитудной характеристики можно легко распространить на некоторые другие типы фильтров, причем они необязательно должны быть фильтрами нижних частот. Применение рассматриваемого метода сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, для построения фильтра с заданными свойствами необходимо подобрать подходящий рациональный полином $A_n^2(\omega)$. Во-вторых, функцию квадрата амплитудной характеристики $|H(e^{j\omega})|^2$ приходится раскладывать на множители, чтобы найти ее полюсы и нули. Как правило, выполнить это разложение весьма непросто, что делает применение рассматриваемого метода расчета фильтра нежелательным.

2. Расчет БИХ-фильтров во временной области

Наряду с методами расчета фильтров, обладающих заданными частотными характеристиками, существуют методы расчета фильтров с заданными импульсными характеристиками. Пусть z -преобразование импульсной характеристики $h(k)$ фильтра равно

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{-i}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}, \quad (4.138)$$

причем требуется, чтобы импульсная характеристика аппроксимировала заданную последовательность $g(k)$ в диапазоне $0 \leq k \leq P-1$. Используя различные предположения, Баррас и Паркс, а также Брофи и Салазар и другие авторы показали, что можно найти такой набор коэффициентов a_i и b_i , что

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{P-1} [g(k) - h(k)]^2 w(k) \quad (4.139)$$

будет минимальной. Здесь $w(k)$ — положительная весовая функция последовательности ошибки. Поскольку характеристика $h(k)$ нелинейно зависит от параметров фильтра $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, в общем случае задача минимизации ϵ может быть решена только методом последовательных приближений. В частном случае, когда $P = n + m - 1$, искомые параметры фильтра, минимизирующие величину ϵ , можно найти, решив систему из $(n + m)$ линейных уравнений. Рассмотрим этот метод подробнее. Для этого (считая,

что $a_0 = b_0 = 1$) представим импульсную характеристику фильтра в виде

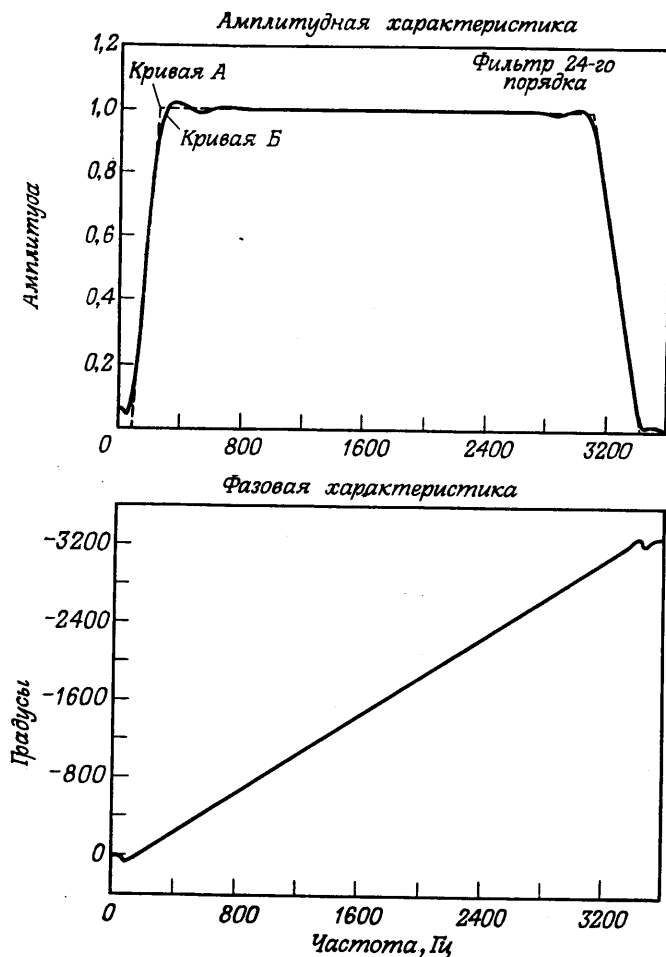
$$g(k) = -a_1 h(k-1) - a_2 h(k-2) - \dots - a_n h(k-n) + b_k, \quad 1 < k \leq m, \quad (4.140)$$

$$g(k) = -a_1 h(k-1) - a_2 h(k-2) - \dots - a_n h(k-n), \quad k > m. \quad (4.141)$$

В предположении, что $g(k) = h(k)$ при $k = 1, 2, \dots, m$, решим систему уравнений вида (4.141) относительно коэффициентов a_i , что дает $g(k) = h(k)$ при $k = m + 1, m + 2, \dots, m + n$. Решив систему уравнений вида (4.140) при определенных значениях a_i , найдем такие значения коэффициентов b_i , для которых $g(k) = h(k)$ при $k = 1, 2, \dots, m$. Эта процедура сводится к приравнению первых $(n + m + 1)$ членов степенного разложения передаточной функции (4.138) z -преобразованию заданной импульсной характеристики фильтра $g(k)$, усеченному за $(m + n)$ -м членом. Такой метод аппроксимации степенных рядов рациональной функцией часто называют аппроксимацией Паде. При аппроксимации заданной импульсной характеристики цифрового фильтра путем воспроизведения ее первых $(m + n + 1)$ отсчетов предполагается, что в целом импульсная и частотная характеристики получаемого в результате аппроксимации фильтра не будут существенно отличаться от заданных характеристик. Однако простого метода для нахождения хотя бы даже приближенно оценок отклонений любой из этих характеристик пока не существует. Приведем несколько конкретных примеров использования этого метода для расчета БИХ-фильтров (примеры взяты из статьи Брофи и Салазара).

На фиг. 4.36 и 4.37 представлены характеристики двух фильтров, рассчитанных с использованием аппроксимации Паде, которые предназначены для работы в системах передачи данных. Кривая *A* на фиг. 4.36 представляет собой требуемую амплитудную характеристику полосового фильтра. Частота дискретизации в данном и последующем примерах равна 7200 Гц. Этот фильтр должен обладать следующими характеристиками: ослабление на 3 дБ на частотах 200 и 3200 Гц, размах пульсаций в полосе пропускания менее 0,25 дБ, линейные фазовые характеристики в полосе пропускания и крутизна спада в полосе непропускания не менее 12 дБ на октаву. Кривой *B* представлена амплитудная характеристика фильтра 24-го порядка, рассчитанного методом аппроксимации Паде. Наибольшая абсолютная величина ошибки отсчетов импульсной характеристики фильтра равна 0,0018. Фазовая характеристика рассчитанного фильтра приведена на фиг. 4.36 внизу.

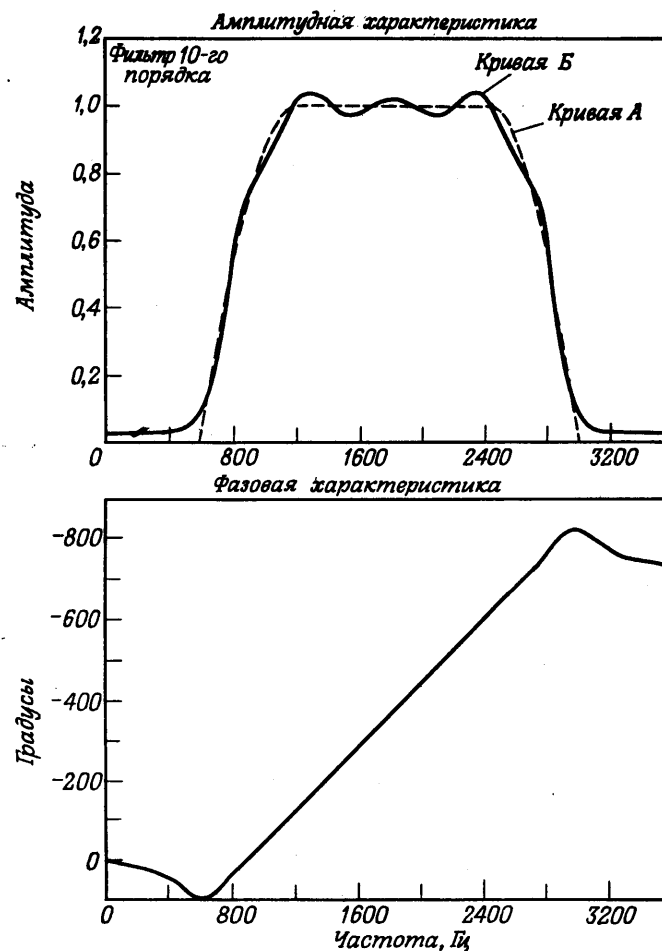
Аналогичные кривые для полосового фильтра 10-го порядка, рассчитанного методом аппроксимации амплитудной характери-



Фиг. 4.36. Расчет полосового фильтра с использованием аппроксимации методом Паде (по Брофи и Салазару).

стики в предположении, что она имеет спады косинусоидальной формы, представлены на фиг. 4.37.

Необходимо учитывать, что, так как при аппроксимации методом Паде фильтр рассчитывается только во временной области, получающаяся при этом аппроксимация амплитудной характеристики в частотной области, как правило, не обеспечивает в полосе непропускания ослабления, превышающего 40 дБ. Однако коэффициенты фильтра, найденные этим методом, часто можно использовать в качестве начальных значений при расчете БИХ-



Фиг. 4.37. Расчет полосового фильтра с использованием аппроксимации методом Паде (по Брофи и Салазару).

фильтров, обладающих заданными частотными свойствами, более сложными методами оптимизации. Эти методы будут рассмотрены в последующих разделах настоящей главы.

4.14. Применение методов оптимизации для расчета БИХ-фильтров

Перейдем к описанию последнего класса методов расчета БИХ-фильтров, называемых методами оптимизации. Отличительная черта этих методов заключается в том, что система уравнений,

составленная относительно коэффициентов фильтра, не может быть решена в явной форме. Поэтому для нахождения коэффициентов приходится использовать расчетные формулы математических методов оптимизации, минимизирующих, согласно выбранному критерию, некоторую ошибку. С помощью последовательных приближений можно в конечном счете свести ошибку к минимуму; можно также задать определенное число выполняемых итераций и после выполнения их считать расчет законченным. В данном разделе будет описано применение нескольких методов оптимизации для расчета фильтров.

1. Минимизация среднеквадратической ошибки

Пусть z -преобразование импульсной характеристики БИХ) фильтра имеет вид

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}}, \quad (4.142)$$

т. е. фильтр строится из последовательно соединенных блоков второго порядка. Обозначим заданную амплитудную характеристику фильтра через $H_d(e^{j\omega})$. Пусть ω_i , где $i = 1, 2, \dots, M$, — дискретный ряд необязательно равномерно расположенных частот, на которых вычисляются отклонения получаемой и заданной характеристик фильтра. Тогда, согласно Штейнлицу, квадрат суммарной ошибки на всех частотах, рассматриваемый в функции параметров фильтра, можно представить следующим образом:

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^M [|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2, \quad (4.143)$$

где θ — $(4K + 1)$ -мерный вектор искомых коэффициентов

$$\theta = (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_K, b_K, c_K, d_K, A). \quad (4.144)$$

Минимизация квадрата ошибки (4.143) сводится к нахождению оптимального значения вектора θ (обозначим его через θ^*), для которого

$$Q(\theta^*) \leq Q(\theta), \quad \theta \neq \theta^*. \quad (4.145)$$

Задачу минимизации можно решить, применив методы нелинейной оптимизации, скажем алгоритм Флетчера — Пауэла, при использовании которого предполагается, что градиент минимизируемой функции известен. Прежде чем перейти к рассмотрению способа расчета градиента, целесообразно исключить из вычислений коэффициент усиления A фильтра, поскольку он может быть рассчитан аналитически. Введем

$$\Phi = (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_K, b_K, c_K, d_K) \quad (4.146)$$

и

$$G(z, \Phi) = AH(z, \Phi), \quad (4.147)$$

получим

$$Q(A, \Phi) = \sum_{i=1}^M [|AH(e^{j\omega_i}, \Phi)| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2. \quad (4.148)$$

Оптимальное значение A (равное A^*) можно найти, продифференцировав правую часть (4.148) по A и приравняв производную к нулю, что дает

$$|A^*| = \frac{\sum_{i=1}^M |H(e^{j\omega_i}, \Phi)| |H_d(e^{j\omega_i})|}{\sum_{i=1}^M |H(e^{j\omega_i}, \Phi)|^2}. \quad (4.149)$$

Теперь задача сводится к минимизации функции ошибки

$$\hat{Q}(\Phi) = Q(A^*, \Phi). \quad (4.150)$$

Градиент функции $\hat{Q}(\Phi)$ по Φ равен

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \Phi_n} = \frac{\partial \hat{Q}(A^*, \Phi)}{\partial \Phi_n} + \frac{\partial Q(A^*, \Phi)}{\partial A^*} \frac{\partial A^*}{\partial \Phi_n}, \quad n = 1, 2, \dots, 4K. \quad (4.151)$$

Второй член в правой части (4.151) равен нулю, так как значение A^* минимизирует Q . Итак, формулу (4.151) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \Phi_n} = 2A^* \sum_{i=1}^M [A^* |H(e^{j\omega_i}, \Phi)| - |H_d(e^{j\omega_i})|] \frac{\partial |H(e^{j\omega_i}, \Phi)|}{\partial \Phi_n}. \quad (4.152)$$

Так как

$$|H(e^{j\omega_i}, \Phi)| = [H(e^{j\omega_i}, \Phi) H^*(e^{j\omega_i}, \Phi)]^{1/2}, \quad (4.153)$$

то

$$\frac{\partial |H(e^{j\omega_i}, \Phi)|}{\partial \Phi_n} = \frac{1}{|H(e^{j\omega_i}, \Phi)|} \operatorname{Re} \left[H^*(e^{j\omega_i}, \Phi) \frac{\partial H(e^{j\omega_i}, \Phi)}{\partial \Phi_n} \right]. \quad (4.154)$$

Формулу (4.154) можно использовать для вычислений. Итак, все вычисления, необходимые для расчета фильтров с использованием алгоритмов оптимизации типа алгоритма Флетчера — Пауэла, оказываются вполне выполнимыми.

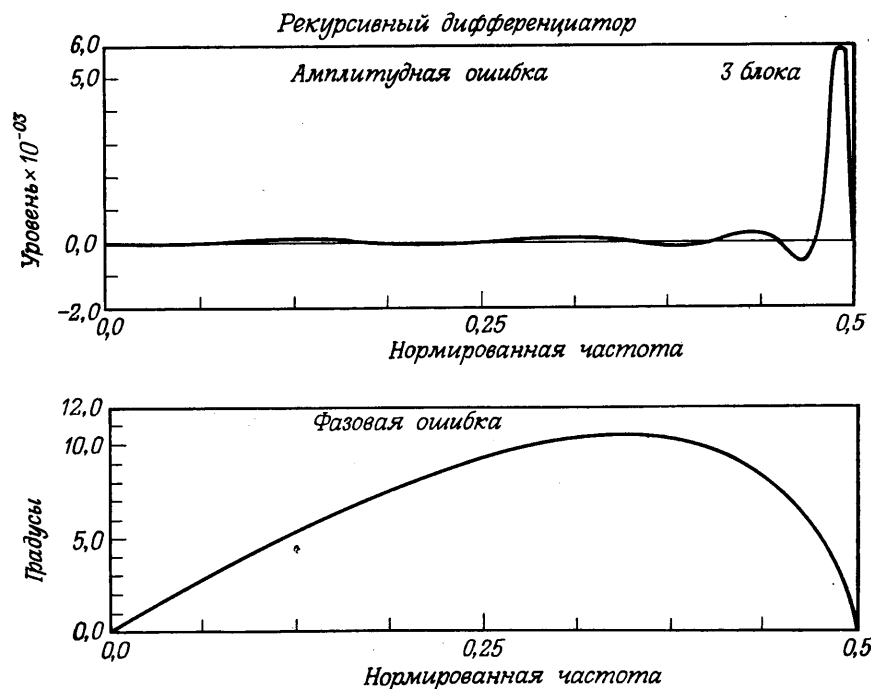
При использовании методов оптимизации учитывается поведение только амплитудной характеристики, поэтому некоторые полюсы или нули после завершения итераций могут оказаться за пределами единичного круга. В этом случае можно прежде всего заменить полюс с полярными координатами (ρ, θ) , оказав-

шийся вне единичного круга, на полюс с координатами $(1/\rho, \theta)$, находящийся внутри единичного круга. Амплитудная характеристика фильтра при такой замене остается неизменной, так как полюс заменяется на его зеркальное отображение. Однако после того, как все полюсы оказываются внутри единичного круга, появляется возможность с помощью дополнительного анализа еще больше оптимизировать квадрат ошибки. Такая ситуация возникает достаточно часто, и в этих случаях оптимизация должна производиться двумя этапами:

1. Использование программы оптимизации для минимизации ошибки $\hat{Q}(\varphi)$ без каких-либо ограничений на расположение нулей и полюсов.

2. После завершения итераций инвертирование всех полюсов и нулей, оказавшихся вне единичного круга. После этого продолжение программы оптимизации для нахождения нового минимума ошибки.

На фиг. 4.38 в качестве примера приведены кривые для широкополосного дифференциатора, рассчитанного Штейглицем с по-



Фиг. 4.38. Ошибка аппроксимации амплитудной и фазовой характеристик дифференциатора, рассчитанного с использованием критерия минимума среднеквадратической ошибки (по Штейглицу).

мощью описанного метода. При расчете использовалось $K = 3$ и

$$\omega_i = \pi(i-1)(0,05), \quad i = 1, 2, \dots, 21,$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{\omega}{\pi}.$$

На фиг. 4.38 приведены кривые ошибок аппроксимации амплитудной и фазовой характеристик дифференциатора.

2. Минимизация L_p -ошибки

Дечки показал, что от рассмотренного выше критерия минимума среднеквадратической ошибки можно перейти к критериям ошибки более высокого порядка. Более того, ошибку аппроксимации для характеристики групповой задержки фильтра можно определить так же, как для амплитудной характеристики.

Выразим z -преобразование импульсной характеристики фильтра через z -преобразования K последовательно включенных блоков 2-го порядка, представив полюсы и нули в полярных координатах:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{z^2 - 2r_{0k}z \cos(\theta_{0k}) + r_{0k}^2}{z^2 - 2r_{pk}z \cos(\theta_{pk}) + r_{pk}^2}. \quad (4.155)$$

Искомый вектор неизвестных параметров определим следующим образом:

$$\varphi = (r_{01}, \theta_{01}, r_{02}, \theta_{02}, \dots, r_{0K}, \theta_{0K}, r_{p1}, \theta_{p1}, r_{p2}, \theta_{p2}, \dots, r_{pK}, \theta_{pK}, A). \quad (4.156)$$

Амплитудная характеристика фильтра будет равна

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= a(\varphi, \omega) = \\ &= A \prod_{k=1}^K \frac{[1 - 2r_{0k} \cos(\omega - \theta_{0k}) + r_{0k}^2]^{1/2}}{[1 - 2r_{pk} \cos(\omega - \theta_{pk}) + r_{pk}^2]^{1/2}} [1 - 2r_{0k} \cos(\omega + \theta_{0k}) + \\ &+ r_{0k}^2]^{1/2} [1 - 2r_{pk} \cos(\omega + \theta_{pk}) + r_{pk}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.157)$$

а характеристика групповой задержки этого же фильтра будет описываться формулой

$$\begin{aligned} \tau(\varphi, \omega) &= \sum_{k=1}^K \left[\frac{1 - r_{pk} \cos(\omega - \theta_{pk})}{1 - 2r_{pk} \cos(\omega - \theta_{pk}) + r_{pk}^2} + \frac{1 - r_{pk} \cos(\omega + \theta_{pk})}{1 - 2r_{pk} \cos(\omega + \theta_{pk}) + r_{pk}^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1 - r_{0k} \cos(\omega - \theta_{0k})}{1 - 2r_{0k} \cos(\omega - \theta_{0k}) + r_{0k}^2} - \frac{1 - r_{0k} \cos(\omega + \theta_{0k})}{1 - 2r_{0k} \cos(\omega + \theta_{0k}) + r_{0k}^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.158)$$

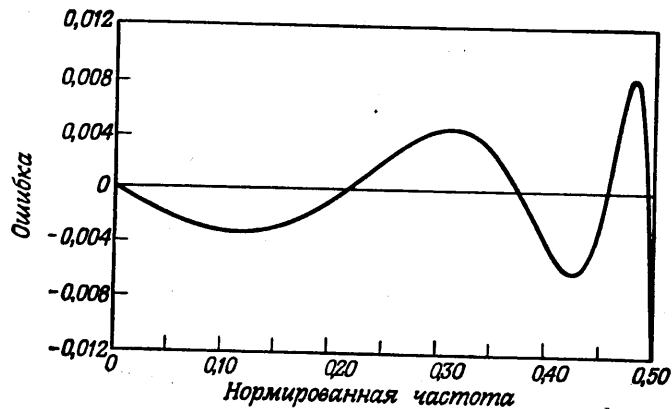
Задачу расчета БИХ-фильтра по заданной амплитудной характеристике $a_d(\omega)$ или характеристике групповой задержки $\tau_d(\omega)$ можно рассматривать как задачу минимизации ошибок L_p -аппрок-

симации, определяемых следующими формулами:

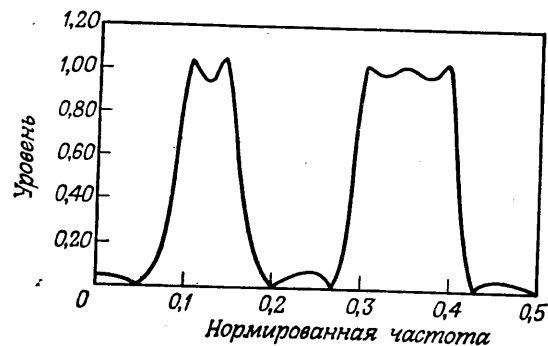
$$L_{2p}^a(\Phi) = \sum_{j=1}^J w_a(\omega_j) [a(\Phi, \omega_j) - a_d(\omega_j)]^{2p}, \quad (4.159)$$

$$L_{2p}^{\tau}(\Phi) = \sum_{j=1}^J w_{\tau}(\omega_j) [\tau(\Phi, \omega_j) - \tau_d(\omega_j)]^{2p}. \quad (4.160)$$

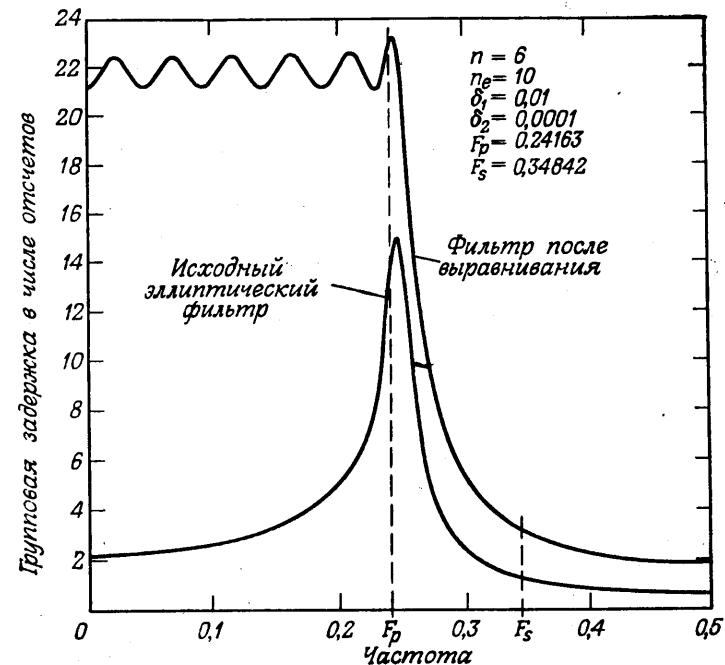
Эти формулы представляют ошибки аппроксимации амплитудной характеристики и характеристики групповой задержки соответственно в функции вектора параметров Φ . При $p = 1$ и $w_a(\omega_j) = 1$ (для всех j) минимизация L_p -ошибки будет идентична минимизации по критерию минимума среднеквадратической ошибки, рассмотренной в предыдущем разделе. Можно показать, что случай



Фиг. 4.39. Ошибка аппроксимации амплитудной характеристики дифференциатора, рассчитанного с использованием критерия ошибки 4-го порядка (по Дечки).



Фиг. 4.40. Многополосный фильтр, рассчитанный с использованием методов оптимизации (по Дечки).



Фиг. 4.41. Выравнивание характеристики групповой задержки фильтра нижних частот с использованием выравнивающего фильтра, рассчитанного методами оптимизации (по Дечки).

$p \rightarrow \infty$ будет соответствовать критерию Чебышева (т. е. минимаксному критерию). Итак, задача расчета коэффициентов фильтра с использованием L_p -критерия сводится к задаче минимизации ошибок $L_{2p}^a(\Phi)$ или $L_{2p}^{\tau}(\Phi)$ путем подбора вектора Φ . Можно показать, что если $2p \geq 2$ и весовая функция $w_{\tau}(\omega)$ [или $w_a(\omega)$] положительна, то ошибка $L_{2p}^a(\Phi)$ [или $L_{2p}^{\tau}(\Phi)$] имеет локальный минимум. Это дает возможность для нахождения вектора параметров Φ^* , минимизирующего соответствующую ошибку, использовать алгоритмы минимизации без ограничений типа алгоритма Флетчера — Пауэла.

На фиг. 4.39—4.41 приведены примеры использования критерия минимума L_p -ошибки, взятые из работы Дечки. На фиг. 4.39 представлена ошибка аппроксимации однокаскадного ($K = 1$) широкополосного дифференциатора, при расчете которого было взято $2p = 4$. В этом примере минимизировалась ошибка аппроксимации амплитудной характеристики, причем для любой из возможных частот величина ошибки не превышает 1%. На фиг. 4.40 показана амплитудная характеристика рассчитанного этим методом

фильтра, который был получен из фильтра 10-го порядка с двумя полосами пропускания и тремя полосами непропускания ($K = 5$). В полосе непропускания величина ошибки составляет приблизительно 0,1 (что обеспечивает ослабление на 20 дБ). Последний пример приведен на фиг. 4.41, где представлены характеристики групповой задержки исходного эллиптического фильтра и эллиптического фильтра, полученного после выравнивания его групповой задержки. Выравнивающая цепь состояла из включенных последовательно с исходным эллиптическим фильтром всепропускающих цепей, не оказывающих влияния на амплитудную характеристику фильтра. Порядок выравнивающей всепропускающей цепи был равен 10 ($K = 5$), индекс ошибки $2p = 10$. Как видно из фиг. 4.41, после выравнивания пульсации групповой задержки фильтра стали равновеликими.

3. Оптимизация в w -плоскости с использованием всепропускающих цепей

Весьма простая методика оптимизации, предложенная Дечки, может быть использована в случае, когда рассчитываемый БИХ-фильтр имеет равновеликие пульсации в полосе пропускания и обеспечивает аппроксимацию с равновеликими пульсациями произвольной характеристики в полосе непропускания или в полосе пропускания. Рассмотрим эту методику. Для этого запишем квадрат амплитудной характеристики фильтра в виде

$$H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 |T_n(z)|^2_{z=e^{j\omega}}}, \quad (4.161)$$

где $T_n(z)$ — рациональная передаточная функция, подобная, но не идентичная рациональной функции Чебышева, использованной при расчете эллиптических фильтров. Вместо того чтобы сразу найти функцию $T_n(z)$, целесообразно сначала перенести решение задачи аппроксимации из z -плоскости в некоторую новую плоскость (назовем ее w -плоскостью), такую, чтобы полоса пропускания (или непропускания) фильтра отображалась на всю мнимую ось в w -плоскости. В этом случае оказывается возможным достаточно просто записывать передаточные функции всепропускающих цепей в w -плоскости; используя эти всепропускающие функции, можно получить такую функцию $|T_n(w)|^2$, которая будет осциллировать между 0 и 1 при изменении w вдоль мнимой оси от 0 до ∞ . Таким образом, функция $|T_n(j\eta)|^2$ будет иметь в w -плоскости равновеликие пульсации. В зависимости от характера отображения эти равновеликие пульсации $T_n(w)$ можно отобразить либо в полосу пропускания фильтра в z -плоскости, либо в полосу непропускания. При этом поведение характеристики фильтра в другой

полосе будет полностью определяться еще не найденными значениями коэффициентов всепропускающего фильтра. Для расчета коэффициентов всепропускающего фильтра, которые обеспечили бы аппроксимацию с равновеликими пульсациями любой характеристики в полосе, где она не была задана, можно использовать методы последовательного приближения. Рассмотрим сначала методику получения функции $T_n(w)$.

Чтобы определить передаточную функцию, модуль которой постоянен вдоль всей мнимой оси, рассмотрим всепропускающую функцию вида

$$F(w) = \prod_{i=1}^n \frac{w_i + w}{w_i - w}, \quad (4.162)$$

где w_i либо действительные, либо образуют комплексно сопряженные пары. Так как $|F(j\eta)| = 1$, то $F(j\eta)$ можно записать в виде

$$F(j\eta) = e^{j\theta(\eta)}, \quad (4.163)$$

где

$$f(\eta) = 2 \sum_{i=1}^n \arctg \left(\frac{\eta - \eta_i}{\xi_i} \right), \quad (4.164)$$

причем $w_i = \xi_i + j\eta_i$.

$$(4.165)$$

Введем действительную функцию $|T_n(j\eta)|^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |T_n(j\eta)|^2 &= T_n(j\eta)T_n(-j\eta) = \frac{1}{4} [F(j\eta) + 1][F(-j\eta) + 1] = \\ &= \cos^2 \left[\frac{f(\eta)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Аналитически продолжая (4.166), получим

$$T_n(w)T_n(-w) = \frac{[\prod_{i=1}^n (w_i + w) + \prod_{i=1}^n (w_i - w)]^2}{4 \prod_{i=1}^n (w_i + w)(w_i - w)}. \quad (4.167)$$

Таким образом, найдена искомая функция $|T_n(w)|^2$, имеющая в w -плоскости равновеликие пульсации модуля вдоль оси $j\eta$ независимо от значений коэффициентов w_i всепропускающего фильтра. Рассмотрим теперь случай отображения из z -плоскости в w -плоскость, соответствующий равновеликим пульсациям в полосе пропускания при произвольной характеристике в полосе непропускания. Аналогично можно было бы рассмотреть и другой случай отображения, соответствующий равновеликим пульсациям в полосе непропускания при произвольной характеристике в полосе про-

пускания, но так как этот случай обычно представляет меньший интерес, то ниже он не рассматривается.

Для отображения полосы пропускания фильтра из z -плоскости на всю мнимую ось в w -плоскости воспользуемся следующим преобразованием:

$$w^2 = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_{pu} + 1}{z^2 - 2z \cos \omega_{pl} + 1}. \quad (4.168)$$

Обратное преобразование из w -плоскости в z -плоскость можно найти, решив (4.168) относительно z :

$$z = p \pm \sqrt{p^2 - 1}, \quad (4.169)$$

где

$$p = \frac{w^2 \cos \omega_{pl} - \cos \omega_{pu}}{w^2 - 1}. \quad (4.170)$$

С помощью преобразования (4.168) дуга единичной окружности из z -плоскости, соответствующая частотам $\omega_{pl} \leq \omega \leq \omega_{pu}$ (т. е. полосе пропускания фильтра), отображается на всю мнимую ось в w -плоскости (предполагается, что фильтр имеет единственную полосу пропускания и две или более полосы непропускания). Полосы пропускания фильтра из z -плоскости отображаются следующим образом:

$$0 \leq \omega \leq \omega_{sl} \leftrightarrow \sqrt{\frac{1 - \cos \omega_{pu}}{1 - \cos \omega_{pl}}} \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\cos \omega_{sl} - \cos \omega_{pu}}{\cos \omega_{sl} - \cos \omega_{pl}}},$$

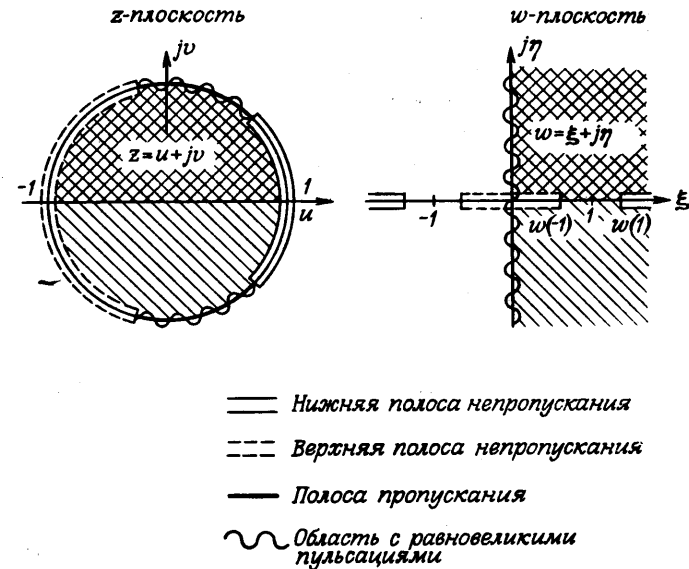
$$\omega_{su} \leq \omega \leq \pi \leftrightarrow \sqrt{\frac{\cos \omega_{su} - \cos \omega_{pu}}{\cos \omega_{su} - \cos \omega_{pl}}} \leq \xi \leq \sqrt{\frac{1 + \cos \omega_{pu}}{1 + \cos \omega_{pl}}}. \quad (4.171)$$

Здесь ξ — действительная часть w . Для фильтра нижних частот во всех приведенных выше формулах $\omega_{sl} = \omega_{pl} = 0$.

Преобразование z -плоскости в w -плоскость иллюстрируется на фиг. 4.42, где в каждой из плоскостей изображены область пропускания (с равновеликими пульсациями) и области непропускания.

Теперь остается лишь привести методику расчета коэффициентов w_i , входящих в формулу (4.167), которые дали бы возможность аппроксимировать произвольную амплитудную характеристику в полосе непропускания, а также методику получения передаточной функции $H(z)$, или, что то же самое, функции $H(w)$, по функции $T_n(w)$. Рассмотрим сначала вторую из этих двух задач как более простую.

Если нули функции $H(z)$ расположены на единичной окружности (как это обычно имеет место при аппроксимации с равновеликими пульсациями), то корни в w -плоскости будут действительными и иметь четную кратность, так как в этом случае оба



Фиг. 4.42. Отображение из z -плоскости в w -плоскость (по Дечки).

комплексно сопряженных нуля будут отображаться в одну и ту же точку на действительной оси в w -плоскости. Поэтому выражение (4.167) можно представить следующим образом:

$$T_n(w) T_n(-w) = \frac{\left[\prod_{i=1}^n (w_{0i} + w)^2 + \prod_{i=1}^n (w_{0i} - w)^2 \right]}{4 \prod_{i=1}^n (w_{0i}^2 - w^2)^2}, \quad (4.172)$$

где w_{0i} — преобразованные нули фильтра. Введя вспомогательные многочлены $A(w)$ и $B(w)$, равные

$$A(w) = \frac{1}{2} \left[\prod_{i=1}^n (w_{0i} + w)^2 + \prod_{i=1}^n (w_{0i} - w)^2 \right] \quad (4.173)$$

и

$$wB(w) = \frac{1}{2} \left[\prod_{i=1}^n (w_{0i} + w)^2 - \prod_{i=1}^n (w_{0i} - w)^2 \right], \quad (4.174)$$

запишем формулу (4.161) в виде

$$H(w) H(-w) = \frac{A^2(w) - w^2 B^2(w)}{(1 + \varepsilon^2) A^2(w) - w^2 B^2(w)}, \quad (4.175)$$

из которой после разложения на множители получим

$$H(w) = \frac{A(w) - wB(w)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 A(w) - wB(w)}} \quad (4.176)$$

Корни функции $H(w)$ располагаются в правой полуплоскости w , что гарантирует устойчивость искомого фильтра с передаточной функцией $H(z)$. [Кроме того, при расчетах удобнее находить корни функции $H(w)$ в w -плоскости и преобразовывать их затем обратно в z -плоскость, так как в w -плоскости они обычно легче разделяются, чем корни $H(z)$ в z -плоскости.]

Наконец приведем алгоритм расчета коэффициентов w_{0i} , обеспечивающих заданную форму амплитудной характеристики в полосе пропускания. Простой способ аппроксимации получается при использовании для описания амплитудной характеристики в полосе пропускания функции ее логарифма:

$$\alpha = -20 \lg |H(w)|_{w=\xi} =$$

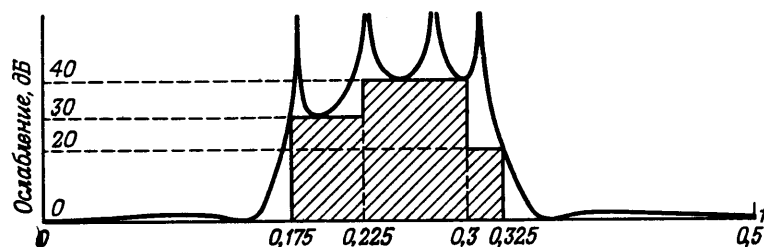
$$= 10 \lg \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{w_{0i} + w}{w_{0i} - w} \right) + \prod_{i=1}^n \left(\frac{w_{0i} - w}{w_{0i} + w} \right) \right] \right\}_{w=\xi}, \quad (4.177)$$

откуда

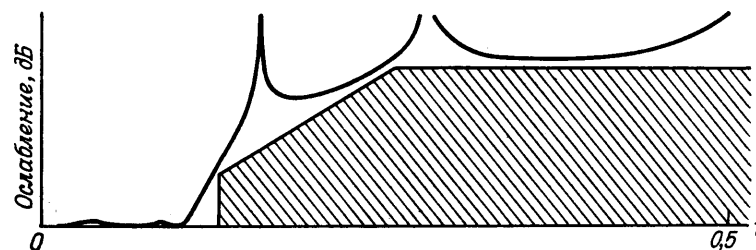
$$\alpha \approx 20 \lg \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) + \sum_{i=1}^n 20 \lg \left| \frac{w_{0i} + w}{w_{0i} - w} \right|_{w=\xi}. \quad (4.178)$$

При этом для расчета значений w_{0i} , таких, чтобы величина ошибки аппроксимации функции α , задаваемой формулой (4.178), была минимальной для всей полосы пропускания, можно использовать достаточно простые методы (например, алгоритм Ремеза).

Таким образом, выше было показано, что БИХ-фильтры с равновеликими пульсациями в полосе пропускания (или в полосе непропускания) и произвольной характеристикой в полосах непропускания (или в полосах пропускания) можно рассчитывать путем перенесения решения задачи аппроксимации из z -плоскости в w -плоскость, такую, чтобы полоса пропускания фильтра в z -плоскости отображалась на всю мнимую ось в w -плоскости. В этой новой w -плоскости синтезируется всепропускающая функция, модуль которой постоянен на всей мнимой оси. Затем из этой всепропускающей функции с помощью простой подстановки формируется передаточная функция, модуль которой имеет вдоль мнимой оси в w -плоскости равновеликие пульсации *независимо* от значений коэффициентов всепропускающей функции. Наконец, с помощью простой методики рассчитываются оптимальные значения коэффициентов всепропускающего фильтра, которые используются для аппроксимации в w -плоскости требуемой частотной характеристики в полосе непропускания. Проиллюстрируем применение этого метода на двух примерах, взятых из работы Дечки.



Фиг. 4.43. Амплитудная характеристика режекторного фильтра, рассчитанного в w -плоскости (по Дечки).



Фиг. 4.44. Амплитудная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного в w -плоскости (по Дечки).

На фиг. 4.43 и 4.44 изображены амплитудные характеристики (в логарифмическом масштабе) двух фильтров с равновеликими пульсациями в полосе пропускания и произвольными характеристиками в полосе непропускания. В примере, представленном на фиг. 4.43, заданный уровень пульсаций в полосе пропускания составлял 1 дБ, а характеристика в полосе непропускания должна была удовлетворять следующим условиям:

$$20 \lg |H(e^{-j\omega})| \leq \begin{cases} -30 \text{ дБ}, & 0,35\pi \leq \omega \leq 0,45\pi, \\ -40 \text{ дБ}, & 0,45\pi \leq \omega \leq 0,60\pi, \\ -20 \text{ дБ}, & 0,60\pi \leq \omega \leq 0,65\pi. \end{cases}$$

Порядок рассчитанного фильтра оказался равным восьми, причем этот фильтр удовлетворяет заданным характеристикам с точностью до 0,7 дБ. Второй пример, приведенный на фиг. 4.44, соответствует фильтру нижних частот с линейным (в логарифмическом масштабе) увеличением ослабления в полосе непропускания.

4. Расчет БИХ-фильтров методами линейного программирования

Методы линейного программирования могут быть использованы для расчета БИХ-фильтров, обеспечивающих аппроксимацию с равновеликими пульсациями заданной амплитудной характеристики. Если передаточная функция цифрового фильтра равна

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}, \quad (4.179)$$

то $H(z)H(z^{-1})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} H(z)H(z^{-1}) &= \frac{N(z)N(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})} = \\ &= \frac{\left(\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^m b_j z^j\right)}{\left(\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^n a_j z^j\right)} = \frac{\sum_{i=-m}^m c_i z^{-i}}{\sum_{i=-n}^n d_i z^{-i}}, \end{aligned} \quad (4.180)$$

где

$$c_i = c_{-i}, \quad (4.181a)$$

$$d_i = d_{-i}. \quad (4.181b)$$

Поэтому квадрат амплитудной характеристики фильтра [т. е. значения (4.180) на единичной окружности] равен отношению тригонометрических полиномов:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\hat{N}(\omega)}{\hat{D}(\omega)} = \frac{c_0 + \sum_{i=1}^m 2c_i \cos(\omega i)}{d_0 + \sum_{i=1}^n 2d_i \cos(\omega i)}. \quad (4.182)$$

Обе функции $\hat{N}(\omega)$ и $\hat{D}(\omega)$ линейно зависят от коэффициентов c_i и d_i . Рассмотрим, каким образом можно использовать методы линейного программирования для нахождения таких значений коэффициентов c_i и d_i , которые обеспечили бы аппроксимацию заданного квадрата амплитудной характеристики $F(\omega)$ функцией $|H(e^{j\omega})|^2$, причем максимум ошибки аппроксимации был бы минимизирован (т. е. чтобы аппроксимация имела равновеликие пульсации).

Итак, задача аппроксимации заданной функции квадрата амплитудной характеристики $F(\omega)$ сводится к нахождению таких

коэффициентов фильтра, при которых

$$-\varepsilon(\omega) \leq \frac{\hat{N}(\omega)}{\hat{D}(\omega)} - F(\omega) \leq \varepsilon(\omega). \quad (4.183)$$

Здесь $\varepsilon(\omega)$ — функция допуска для ошибки аппроксимации, позволяющая учитывать неодинаковый вес ошибок аппроксимации на различных частотах. Функции $F(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ обычно известны (или, как будет показано в приведенном ниже примере, зависят от некоторого параметра), поэтому неравенство (4.183) можно представить с помощью следующей системы неравенств, линейных относительно неизвестных c_i и d_i :

$$\begin{aligned} \hat{N}(\omega) - \hat{D}(\omega)F(\omega) &\leq \varepsilon(\omega)\hat{D}(\omega), \\ -\hat{N}(\omega) + \hat{D}(\omega)F(\omega) &\leq \varepsilon(\omega)\hat{D}(\omega), \end{aligned} \quad (4.184)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{N}(\omega) - \hat{D}(\omega)[F(\omega) + \varepsilon(\omega)] &\leq 0, \\ -\hat{N}(\omega) + \hat{D}(\omega)[F(\omega) - \varepsilon(\omega)] &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.185)$$

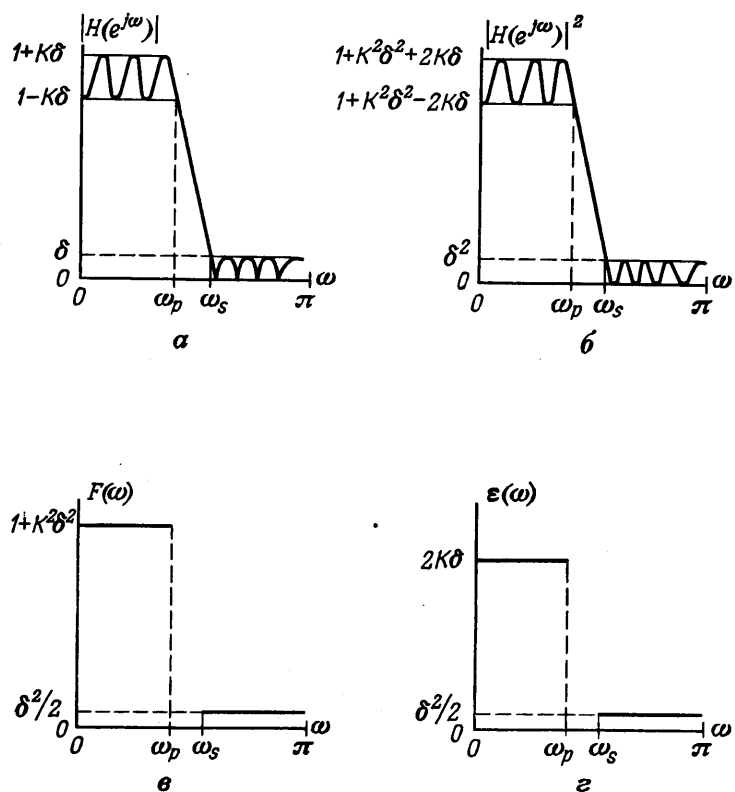
Эти, а также следующие дополнительные линейные неравенства:

$$-\hat{N}(\omega) \leq 0, \quad (4.186)$$

$$-\hat{D}(\omega) \leq 0 \quad (4.187)$$

полностью определяют задачу аппроксимации. Для решения системы линейных неравенств (4.185)–(4.187) из левой части каждого из них вычитается вспомогательная переменная w , которая затем минимизируется. Если значение w оказывается равным нулю, то это означает, что решение задачи аппроксимации существует, причем значения коэффициентов можно получить обычным методом линейного программирования. Если же оказывается, что $w > 0$, то это означает, что решения задачи аппроксимации не существует, поэтому для ее решения нужно изменить либо $F(\omega)$, либо $\varepsilon(\omega)$.

Рассмотрим в качестве примера расчет фильтра нижних частот с равновеликими пульсациями и коэффициентом передачи, равным 1 в полосе пропускания и 0 в полосе непропускания. Допустим, что максимальная ошибка аппроксимации равна δ в полосе непропускания и $K\delta$ (величина постоянной K выбирается разработчиком) в полосе пропускания. Заданная амплитудная характеристика такого фильтра нижних частот изображена на фиг. 4.45, а. Величина δ неизвестна, причем в процессе расчета она должна быть минимизирована (результатирующий фильтр в данном случае будет, очевидно, эллиптическим, но здесь он используется только для иллюстрации метода). Заданная функция квадрата амплитудной характеристики фильтра, равная квадрату функции, изобра-

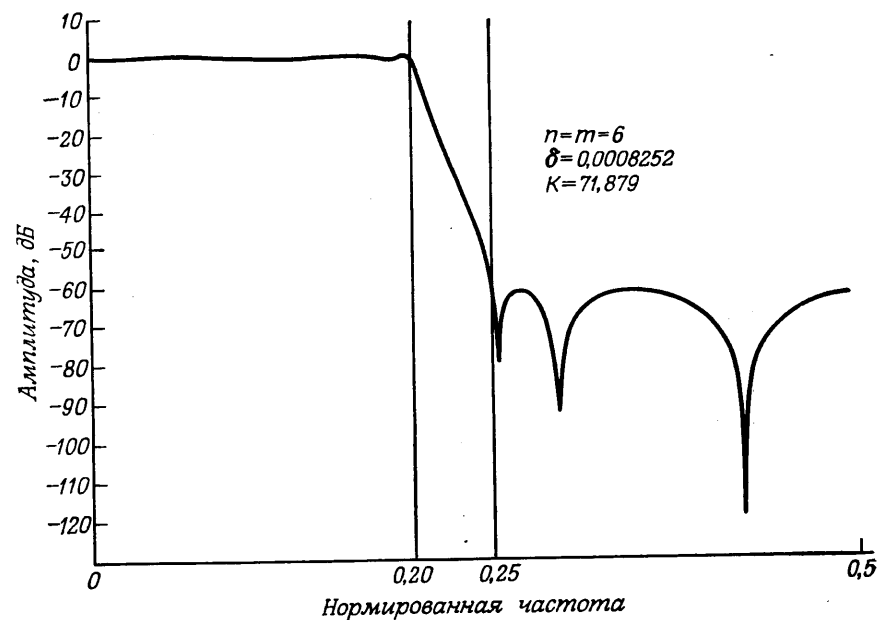


Фиг. 4.45. Исходные характеристики фильтра нижних частот, используемые при расчете его методом линейного программирования.

женной на фиг. 4.45, а, приведена на фиг. 4.45, б. Ее можно рассматривать как аппроксимацию с равновеликими пульсациями функции $F(\omega)$, изображенной на фиг. 4.45, в; функция амплитуды ошибки аппроксимации $\epsilon(\omega)$ представлена на фиг. 4.45, г. [Читатель может убедиться в том, что сумма $F(\omega) + \epsilon(\omega)$ дает верхнюю границу квадрата амплитудной характеристики, а разность $F(\omega) - \epsilon(\omega)$ — ее нижнюю границу.] Решив неравенства (4.185)–(4.187) при заданных $F(\omega)$ и $\epsilon(\omega)$, можно найти оценку δ . Для фильтров нижних частот величина δ ограничена по определению следующими пределами:

$$0 < \delta < \frac{1}{K+1}. \quad (4.188)$$

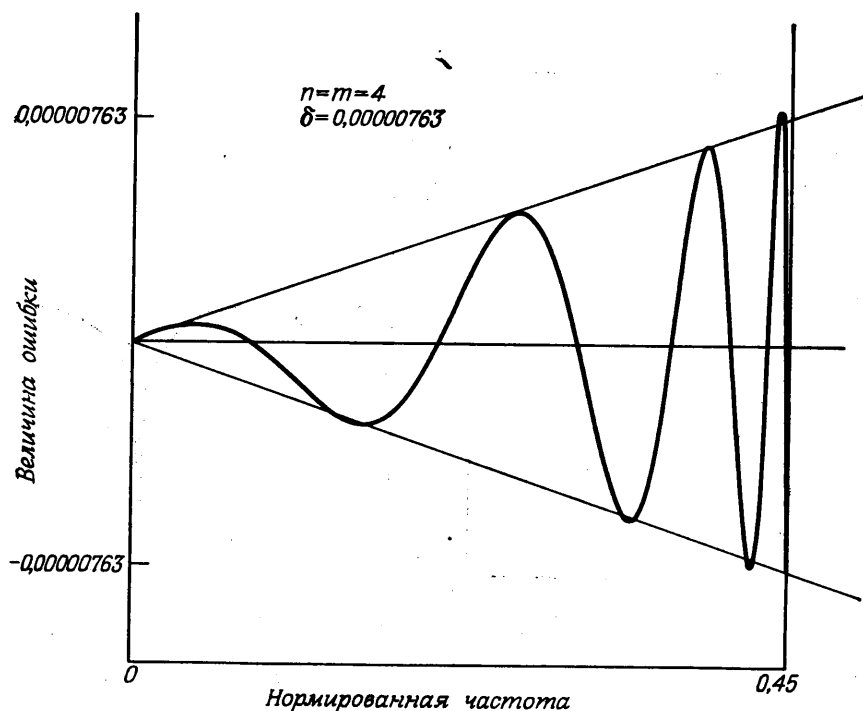
Это позволяет получить начальную оценку δ и тем самым задать функции $F(\omega)$ и $\epsilon(\omega)$ на фиг. 4.45. Метод линейного программиро-



Фиг. 4.46. Амплитудная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного методом линейного программирования.

вания дает возможность для выбранного значения δ определить, имеет ли заданная система неравенств какое-либо решение. Если решения не существует, величину δ следует увеличивать до тех пор, пока не будет получено решение. Если же система неравенств имеет решение, начальное значение δ следует заменить на минимальное значение δ , для которого решение еще существует. Поднимая методом последовательных приближений нижнюю границу (для которой решения не существует) и опуская верхнюю границу, можно с любой заданной точностью (по крайней мере теоретически) найти минимальное значение δ .

Хотя при использовании рассматриваемого метода и встречаются трудности, связанные с чувствительностью коэффициентов фильтра к выбору функции квадрата его амплитудной характеристики, тем не менее он часто и с успехом применялся для расчета цифровых фильтров. Так, на фиг. 4.46 представлена амплитудная характеристика (в логарифмическом масштабе) фильтра нижних частот, а на фиг. 4.47 — функция ошибки аппроксимации широкополосного дифференциатора, рассчитанных описанным методом. Фильтр нижних частот имеет шестой порядок ($n = m = 6$), граничные частоты полосы пропускания и полосы не пропуска-



Фиг. 4.47. Ошибка аппроксимации амплитудной характеристики дифференциатора, рассчитанного методом линейного программирования.

ния составляют 0,20 и 0,25 соответственно, $K = 71,879$, окончательное значение максимума ошибки аппроксимации $\delta = 0,0008252$.

Порядок дифференциатора равен четырем, амплитуда пульсаций в диапазоне частот $0 \leq f \leq 0,45$ составляет 0,00000763 (поведение характеристики в диапазоне $0,45 \leq f \leq 0,5$ не задавалось). Из фиг. 4.47 видно, что только пульсации относительной ошибки аппроксимации амплитудной характеристики дифференциатора являются равновеликими. Две прямые линии являются граничными для функции абсолютной ошибки. Наибольшее несовпадение с граничными линиями является результатом погрешности алгоритма линейного программирования при таких малых значениях δ .

4.15. Обзор методов расчета БИХ-фильтров

В данной главе были рассмотрены три класса методов расчета БИХ-фильтров: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчета цифровых фильтров в z -пло-

скости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. Вообще невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учетом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Поэтому воздержимся от спорных рекомендаций и отметим лишь, что большое число цифровых БИХ-фильтров рассчитывается методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в большинстве случаев разработчику приходится проектировать фильтры нижних частот или полосовые фильтры с заданными характеристиками, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны. При проектировании нестандартных БИХ-фильтров следует использовать другие методы. Если фильтр проектируется по характеристикам, заданным во временной области, для его расчета можно использовать метод инвариантного преобразования импульсной характеристики или описанный в разд. 4.13 метод расчета БИХ-фильтров во временной области. Для расчета фильтров с нестандартными характеристиками, задаваемыми в частотной области, в большинстве случаев наиболее подходящими будут алгоритмы оптимизации.

4.16. Сравнение КИХ- и БИХ-фильтров

Поскольку существует множество различных методов расчета КИХ- и БИХ-фильтров, практически невозможно, сопоставив те или иные характеристики получаемых фильтров, объективно сравнить оба типа фильтров. Если же ограничиться рассмотрением только оптимальных (в минимаксном смысле) КИХ-фильтров нижних частот и эллиптических БИХ-фильтров с аналогичными частотными характеристиками, то можно сделать некоторые количественные сравнения на основе числа умножений, приходящихся на каждый входной отсчет¹⁾ при стандартной реализации каждого из сравниваемых фильтров (т. е. при использовании прямой формы для КИХ-фильтра и каскадной формы для БИХ-фильтра). При реализации прямой формы КИХ-фильтра с импульсной характеристикой длины N (N нечетное) и линейной фазовой характеристикой на каждый входной отсчет приходится $[(N + 1)/2]$ умножений, тогда как при реализации каскадной формы эллиптического фильтра n -го порядка (все нули которого расположены на еди-

¹⁾ Число умножений, приходящееся на каждый входной отсчет, является полезной мерой сложности реализации фильтра с точки зрения объема вычислений, так как оно представляет количество операций умножения и сложения, используемых при аппаратурной и программной реализации фильтра.

ничной окружности) на каждый входной отсчет¹⁾ приходится $[(3n + 3)/2]$ умножений. (Здесь число в квадратных скобках [...] обозначает целую часть этого числа.)

Таким образом, два типа фильтров с эквивалентными характеристиками (т. е. удовлетворяющие одинаковым требованиям к уровню пульсаций в полосе пропускания δ_1 и в полосе непропускания δ_2 , а также к значениям граничных частот F_p и F_s) могут быть сопоставлены на основе эффективности их построения, учитывающей, для какого из фильтров на каждый из входных отсчетов приходится меньшее число умножений. Оба типа фильтров будут эквивалентны, если выполняется следующее условие:

$$\left(\frac{3n+3}{2}\right) = \left(\frac{N+1}{2}\right), \quad (4.189)$$

или

$$\frac{N}{n} \approx 3 + \frac{1}{n}. \quad (4.190)$$

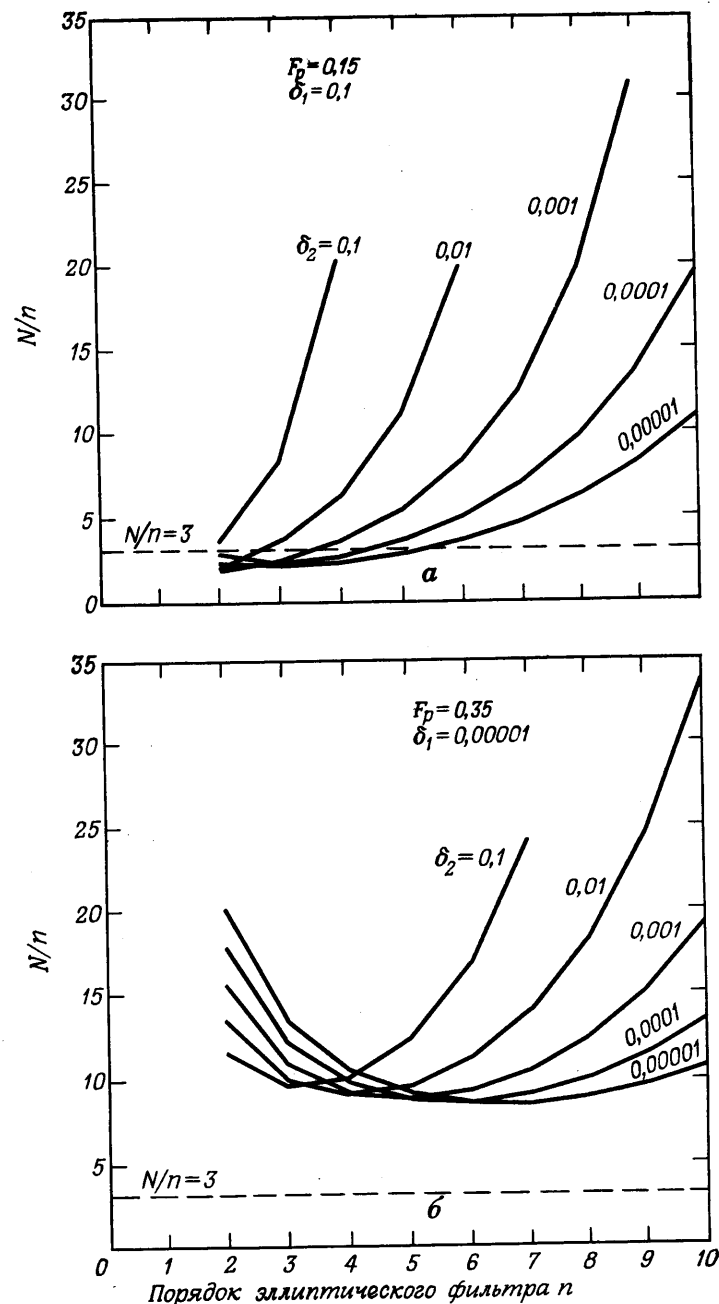
На фиг. 4.48 приведены две группы кривых зависимости отношения N/n от n при различных δ_2 для двух значений F_p и δ_1 . Фиг. 4.48, а соответствует случаю $F_p = 0,15$ и $\delta_1 = 0,1$ ($\delta_2 = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$); на фиг. 4.48, б представлены кривые при $F_p = 0,35$ и $\delta_1 = 0,00001$ (δ_2 принимает те же значения). Там же построены линии $N/n = 3$, соответствующие постоянной составляющей в правой части формулы эквивалентности фильтров (4.190). Как видно из фиг. 4.48, а, при некоторых значениях F_p , δ_1 и δ_2 величина отношения N/n находится ниже уровня эквивалентности; в этих случаях КИХ-фильтр оказывается эффективнее эллиптического фильтра. Однако вообще эллиптический фильтр намного эффективнее оптимального КИХ-фильтра, причем в случае, когда эллиптический фильтр имеет высокий порядок, отношение N/n часто может достигать сотен или даже тысяч.

Установлено, что КИХ-фильтр наиболее целесообразно использовать, если величина δ_1 большая, δ_2 малая, а переходная полоса достаточно широкая (т. е. переходное отношение мало). Необходимо также учитывать следующее:

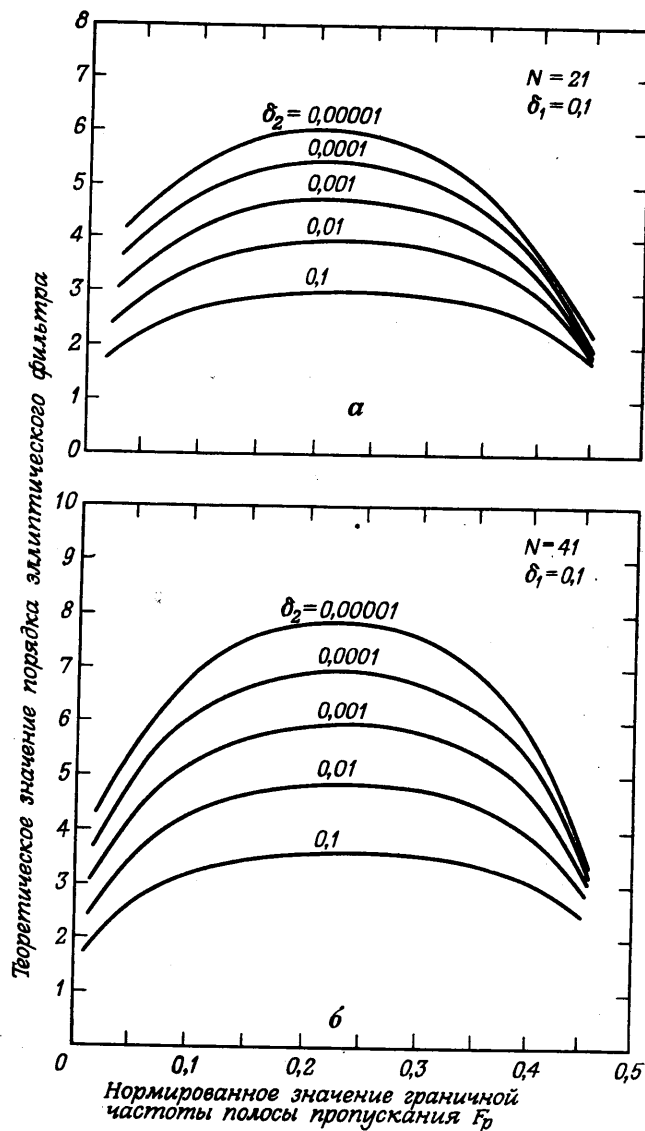
1. При $F_p \geq 0,3$ отношение N/n всегда превышает $(3 + 1/n)$ при любых значениях δ_1 , δ_2 и n .
2. При $n \geq 7$ отношение N/n всегда превышает $(3 + 1/n)$ при любых значениях δ_1 , δ_2 и F_p .
3. Чем меньше F_p , тем больше диапазон значений δ_1 , δ_2 и n , при которых N/n меньше, чем $(3 + 1/n)$.

На фиг. 4.49, а показана зависимость теоретического значения порядка эллиптического фильтра n (поэтому n не обязательно

¹⁾ Для БИХ-фильтра на входной отсчет приходится такое число умножений лишь при условии, что все масштабирования при переходе от блока к блоку осуществляются умножением на степень двойки и сводятся к сдвигу чисел. В противном случае потребуется $[(4n + 3)/2]$ умножений на отсчет.



Фиг. 4.48. Сравнение КИХ-фильтров и БИХ-фильтров нижних частот.



Фиг. 4.49. Сравнение КИХ-фильтров и БИХ-фильтров нижних частот.

равен целому числу), обеспечивающего заданные граничные частоты F_p и F_s при $\delta_1 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001$, от величины F_p для набора оптимальных КИХ-фильтров с $N = 21$. Аналогичные кривые, но для $N = 41$ приведены на фиг. 4.49, б. Теоретическое значение порядка, при котором оба фильтра эквивалентны, составляет $n = 6,3$ для фиг. 4.49, а и $n = 13$ для фиг. 4.49, б. Таким образом, во всех этих случаях, как и предполагалось в предыдущем разделе, эллиптический фильтр оказывается эффективнее эквивалентного ему КИХ-фильтра.

Итак, в тех случаях, когда требуется обеспечить заданную амплитудную характеристику, эллиптические фильтры вообще оказываются эффективнее оптимальных КИХ-фильтров. Однако КИХ-фильтры дополнительно имеют весьма полезное свойство — их фазовая характеристика строго линейна, так что характеристика групповой задержки таких фильтров не искажается. В то же время характеристика групповой задержки эллиптического фильтра имеет, как правило, весьма существенные искажения (особенно вблизи края полосы пропускания). В связи с этим возникает вопрос, имеющий теоретическое и практическое значение: в случаях, когда характеристика групповой задержки должна быть постоянной, более желательно использовать эллиптический фильтр с выравниванием групповой задержки или же эквивалентный ему оптимальный КИХ-фильтр (с постоянной групповой задержкой)? Ниже этот вопрос будет рассмотрен с различных точек зрения. Следует отметить, что оба сопоставляемых подхода не являются единственно возможными при построении цифрового фильтра, удовлетворяющего требованиям к амплитудной характеристике и характеристике групповой задержки. Например, используя новые методы оптимизации, можно рассчитать фильтр с неодинаковым числом нулей и полюсов. Для этих случаев проводимое ниже сравнение КИХ-фильтров и БИХ-фильтров будет непригодным.

4.17. Сравнение оптимальных КИХ-фильтров и эллиптических фильтров с выравниванием групповой задержки

В разд. 4.14 уже отмечалась возможность построения фильтра, выравнивающего с любой заданной точностью характеристику групповой задержки любого цифрового фильтра в некотором ограниченном диапазоне частот. Трудность выравнивания характеристики групповой задержки заключается в том, что общая задержка фильтра после выравнивания должна превышать наибольшую задержку того же фильтра до выравнивания. Для эллиптического фильтра максимум групповой задержки всегда расположен вблизи частоты среза полосы пропускания. Можно показать, что порядок всепропускающего выравнивающего фильтра n_e

должен удовлетворять следующему соотношению:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \tau_g(\omega) d\omega = 0,5n_e, \quad (4.191)$$

где $\tau_g(\omega)$ — характеристика групповой задержки этого фильтра, причем интегрирование в левой части (4.191) производится в пределах половины частоты дискретизации $0 \leq \omega \leq \pi$. Так как групповая задержка выравнивающего фильтра может только добавляться к задержке исходного фильтра, т. е. $\tau_g(\omega) \geq 0$, то для того, чтобы убедиться в справедливости соотношения (4.191), достаточно показать, что оно верно для всепропускающего фильтра первого порядка. Передаточная функция выравнивающего фильтра равна

$$H(z) = \frac{(1-z^{-1}/a)}{1-az^{-1}}, \quad (4.192)$$

где a и $1/a$ — координаты полюса и нуля этой функции в z -плоскости соответственно. Характеристика групповой задержки обычно определяется следующим образом:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d[\arg H(e^{j\omega})]}{d\omega}, \quad (4.193)$$

где $\arg H(e^{j\omega})$ — фазовая характеристика всепропускающего фильтра. С учетом соотношений (4.191) и (4.192) для выравнивающего фильтра 1-го порядка получим

$$\tau_g(\omega) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a \cos \omega}. \quad (4.194)$$

Интегрирование правой части (4.194) в пределах от 0 до π с последующим нормированием по 2π дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a \cos \omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \arctg \left[\frac{(1-a^2) \operatorname{tg}(\omega/2)}{(1-a)^2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5.$$

Значение соотношения (4.191) заключается в том, что с его помощью минимальный порядок выравнивающего фильтра, необходимый для выравнивания заданной характеристики групповой задержки, можно оценить, определив площадь между линией $\tau = \tau_{\max}$ и кривой $\tau_g(\omega)$ и поделив ее на π [здесь τ_{\max} — максимальное значение $\tau_g(\omega)$ в полосе пропускания исходного фильтра]. В действительности порядок выравнивающего фильтра должен превышать величину оценки, получаемой из (4.191), так как это соотношение справедливо при условии, что задержка в выравнивающем фильтре идеально компенсирует неравномерность групповой задержки исходного фильтра. По мере увеличения порядка вырав-

нивающего фильтра относительно найденной оценки максимум ошибки аппроксимации групповой задержки будет монотонно уменьшаться.

В табл. 4.2—4.4 приведены характеристики трех групп эллиптических фильтров, которые выравнивались с помощью всепропускающих фильтров. В таблицы включены заданные значения δ_1 , δ_2 , F_p и F_s , требуемый порядок эллиптического фильтра n , требуемая длина импульсной характеристики БИХ-фильтра N , порядок выравнивающего фильтра n_e , среднее по полосе пропускания значение задержки в фильтре после выравнивания τ_g (в числе отсчетов), уровень пульсаций групповой задержки в полосе пропускания после выравнивания e , а также число умножений на каждый входной отсчет для оптимального КИХ-фильтра и каждого из эллиптических фильтров после выравнивания.

Из приведенных данных видно, что если необходимо обеспечить выравнивание характеристики групповой задержки с погрешностью порядка 3%, то при использовании эллиптического фильтра с выравниванием потребуется выполнять на 30% больше умножений на каждый входной отсчет, чем при использовании оптимального КИХ-фильтра, хотя эллиптический фильтр до выравнивания в подавляющем большинстве случаев эффективнее оптимального КИХ-фильтра. Таким образом, по крайней мере для случаев, когда, помимо аппроксимации с равновеликими пульсациями амплитудной характеристики требуется постоянство характеристики групповой задержки, оптимальный КИХ-фильтр будет всегда эффективнее эллиптического фильтра с выравниванием. Следует также отметить, что задержка в оптимальном КИХ-фильтре, равная $(N-1)/2$ отсчетам, оказывается *всегда* меньше задержки в эллиптическом фильтре с выравниванием.

Во всех примерах, приведенных в табл. 4.2—4.4, порядок исходных эллиптических фильтров не превышал шести. Можно было бы ожидать, что относительная эффективность эллиптических фильтров более высокого порядка по сравнению с оптимальными КИХ-фильтрами будет выше, чем при малых порядках. Поэтому, возможно, в этих случаях фильтр с выравниванием будет более эффективен, чем КИХ-фильтр. Однако проверить это предположение не удается в связи с тем, что при больших величинах порядка эллиптических фильтров пик групповой задержки τ_{\max} в полосе пропускания намного больше, чем при малых величинах порядка, так что требуемый порядок выравнивающего фильтра становится настолько большим, что его практически не имеет смысла рассматривать, если требуется выравнивание групповой задержки во всей полосе пропускания. Для иллюстрации этого положения на фиг. 4.50 приведена характеристика групповой задержки эллиптического фильтра нижних частот 10-го порядка, для которого $F_p = 0,25$. Оценка требуемой величины n_e с исполь-

Таблица 4.2

Сравнение цифровых оптимальных КИХ-фильтров и эллиптических фильтров с выравниванием

Группа 1. $\delta_1=0,01$, $\delta_2=0,0001$

F_p	F_s	n	N	n_e	$\bar{\tau}_g$	e	N_1^1	N_2^1
0,0502	0,20273	5	21	2	28,7	12,1	11	11
				4	42,7	3,4		13
0,09846	0,25119	5	21	2	14,5	11,6	11	11
				4	22,2	4,1		13
				6	29,4	0,8		15
0,14722	0,29803	6	21	4	17,6	13,1	11	14
				6	23,0	6,3		16
				8	28,5	2,6		18
0,19507	0,34314	6	21	4	13,8	16,0	11	14
				6	17,8	8,7		16
				8	22,0	4,2		18
0,24163	0,38601	6	21	6	14,5	11,1	11	16
				8	18,3	7,0		18
				10	21,8	3,6		20
0,28664	0,42571	5	21	6	11,6	8,4	11	15
				8	14,5	3,8		17
				10	17,3	1,6		19
0,33014	0,46052	5	21	6	10,7	14,7	11	15
				8	13,1	8,3		17
				10	15,7	4,5		19
0,37254	0,48698	4	21	6	8,7	19,1	11	13
				8	11,1	6,5		15
				10	13,4	3,2		17
0,41665	0,49917	3	21	8	9,6	6,3	11	14
				10	11,8	3,2		16

1) N_1 — число умножений на входной отсчет для оптимального КИХ-фильтра;
 N_2 — число умножений на входной отсчет для эллиптического фильтра с выравниванием.

Таблица 4.3

Сравнение цифровых оптимальных КИХ-фильтров и эллиптических фильтров с выравниванием

Группа 2. $F_p=0,25$, $\delta_1=0,02$, $\delta_2=0,001$

F_s	n	N	n_e	$\bar{\tau}_g$	e	N_1^1	N_2^1
0,4893	2	11	2	3,3	1,2	6	6
			4	5,6	0,1		8
0,44816	3	13	2	4,5	9,4	7	8
			4	7,3	1,0		10
0,39146	4	19	2	5,9	25,1	10	9
			4	8,8	8,0		11
			6	11,9	2,2		13
0,34153	5	29	2	8,4	37,4	15	11
			4	10,6	21,6		13
			6	13,7	11,6		15
			8	16,9	5,6		17
			10	20,3	2,4		19
0,30639	6	45	4	13,8	34,7	23	14
			6	16,0	25,0		16
			8	18,7	16,9		18
			10	22,0	11,7		20
			12	25,5	7,9		22
			14	29,4	5,2		24
			16	32,8	3,2		26
			18	36,3	1,8		28

1) N_1 — число умножений на входной отсчет для оптимального КИХ-фильтра;
 N_2 — число умножений на входной отсчет для эллиптического фильтра с выравниванием.

Таблица 4.4

Сравнение цифровых оптимальных КИХ-фильтров и эллиптических фильтров с выравниванием

Группа 3. $F_p=0,25$, $\delta_1=0,02$, $\delta_2=0,0001$

F_s	n	N	n_e	$\bar{\tau}_g$	e	N_1^1	N_2^1
0,49661	2	11	2	3,3	1,2	6	6
			4	5,6	0,1		8
0,47564	3	11	2	4,5	9,1	6	8
			4	7,3	1,0		10

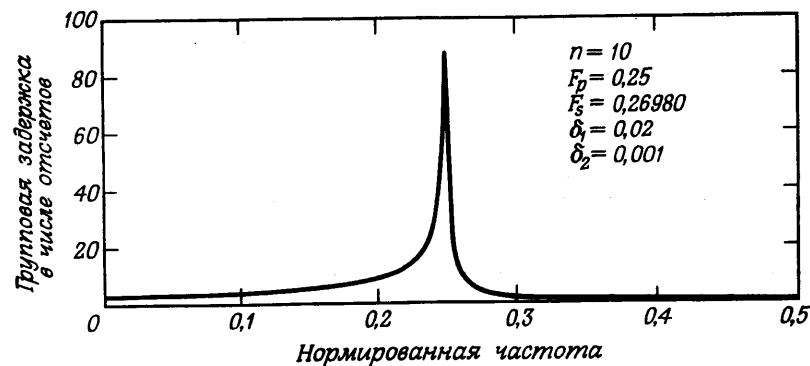
Продолжение табл. 4.4

F_e	n	N	n_e	$\bar{\tau}_g$	ϵ	$N_1^{(1)}$	$N_2^{(1)}$
0,43591	4	17	2	5,8	23,3	9	9
			4	8,8	7,0		11
			6	11,8	1,7		13
0,38983	5	21	2	8,0	33,4	11	11
			4	10,3	18,0		13
			6	13,5	8,7		15
			8	16,7	3,7		17
			10	20,0	1,4		19
0,34878	6	31	4	12,8	28,9	16	14
			6	15,5	19,2		16
			8	18,2	11,8		18
			10	22,0	7,7		20
			12	25,3	4,3		22
			14	28,8	2,2		24

1) N_1 — число умножений на входной отсчет для оптимального КИХ-фильтра;
 N_2 — число умножений на входной отсчет для эллиптического фильтра с выравниванием.

зованием соотношения (4.191) дает $n_e = 45$. Так как фактическое значение порядка выравнивающего фильтра должно быть еще больше, то ясно, что построить такой выравнивающий фильтр не удастся.

Представляет интерес еще один вопрос, касающийся рассмотренной в данном разделе методики выравнивания характеристик



Фиг. 4.50. Характеристика групповой задержки эллиптического фильтра нижних частот 10-го порядка.

групповой задержки БИХ-фильтров, а именно какая из двух схем, в одной из которых используется эллиптический фильтр с последующим выравнивающим фильтром, а другая состоит из оптимального БИХ-фильтра, обеспечит наилучшую аппроксимацию заданных амплитудной характеристики и характеристики групповой задержки? Ясно, что оптимальный БИХ-фильтр будет не хуже составного; вопрос, таким образом, состоит в том, насколько лучшую аппроксимацию он обеспечит. Точно ответить на этот вопрос не удастся, поэтому ограничимся лишь несколькими замечаниями, основанными на опыте проектирования эллиптических фильтров с выравниванием:

1. Чтобы эллиптический фильтр обеспечивал достаточное ослабление в полосе непропускания, его нули должны располагаться на единичной окружности.

2. Нули выравнивающего фильтра должны располагаться вне единичного круга (из условия получения положительной задержки).

3. Положение полюсов эллиптического фильтра ограничивается требованиями, предъявляемыми к переходной полосе фильтра нижних частот.

4. Полюсы выравнивающего фильтра должны располагаться вблизи окружности фиксированного радиуса, причем равномерно в полосе пропускания.

Если не ограничивать расположение нулей оптимального БИХ-фильтра единичной окружности, то для реализации каждого из блоков 2-го порядка потребуется по четыре умножения на входной отсчет в отличие от трех умножений для каждого из блоков эллиптического фильтра плюс два умножения для каждого из блоков выравнивающего фильтра. Таким образом, представляется маловероятным, что оптимальный БИХ-фильтр будет существенно эффективнее эллиптического БИХ-фильтра с выравниванием.

ЛИТЕРАТУРА

Общие вопросы

- Steiglitz K., The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing, *Information and Control*, 8, No. 5, 455—476 (Oct. 1965).
- Kaiser J. F., Design Methods for Sampled Data Filters, *Proc. First Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 221—236 (Nov. 1963).
- Kaiser J. F., Digital Filters, Ch. 7 in: *System Analysis by Digital Computer*, Kuo F. F., Kaiser J. F., eds., Wiley, N. Y., 1966.
- Gibbs A. J., On the Frequency Domain Responses of Causal Digital Filters, Ph. D. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1969.
- Gibbs A. J., An Introduction to Digital Filters, *Australian Telecomm. Research*, 3, No. 2, 3—14 (Nov. 1969).
- Gibbs A. J., The Design of Digital Filters, *Australian Telecomm. Research*, 4, No. 1, 29—34 (1970).
- Rader C. M., Gold B., Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, *Proc. IEEE*, 55, No. 2, 149—171 (Feb. 1967).

8. Golden R. M., Kaiser J. F., Design of Wideband Sampled Data Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 43, No. 4, 1533—1546, Part 2 (July 1964).
9. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1962.
10. Storer J. E., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1957.
11. Thiran J. P., Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 659—663 (Nov. 1971).
12. Thiran J. P., Equal-Ripple Delay Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 664—667 (Nov. 1971).
13. Fettweis A., A Simple Design of Maximally Flat Delay Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 2, 112—114 (June 1972).
14. Daniels R. W., *Approximation Methods for the Design of Passive, Active, and Digital Filters*, McGraw-Hill, 1974.

Частотные преобразования

1. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1962.
2. Constantinides A. G., Spectral Transformation for Digital Filters, *Proc. IEE*, 117, No. 8, 1585—1590 (1970).

Методы проектирования во временной области

1. Burrus C. S., Parks T. W., Time Domain Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Audio.*, 18, 137—141 (1970).
2. Shanks J. L., Recursion Filters for Digital Processing, *Geophys.*, 32, 33—51 (Feb. 1967).
3. Brophy F., Salazar A. C., Considerations of the Padé Approximant Technique in the Synthesis of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 6, 500—505 (Dec. 1973).
4. Evans A. G., Fischl R., Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 1, 61—65 (Feb. 1973).
5. Brophy F., Salazar A. C., Recursive Digital Filter Synthesis in the Time Domain, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-22, No. 1, 45—55 (Feb. 1974).

Методы оптимизации

1. Steiglitz K., Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, 123—129 (1970).
2. Deczky A. G., Synthesis of Recursive Digital Filters using the Minimum P-Error Criterion, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 4, 257—263 (Oct. 1972).
3. Helms H. D., Digital Filters with Equiripple or Minimax Responses, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 19, No. 1, 87—94 (1971).
4. Deczky A., Computer Aided Synthesis of Digital Filters in the Frequency Domain, ScD. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1973.
5. Bandler J. W., Bardakjian B. J., Least pth Optimization of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 5, 460—470 (Oct. 1973).
6. Thajchayapong P., Rayner P. J., Recursive Digital Filter Design by Linear Programming, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 2, 107—112 (April 1973).
7. Rabiner L. R., Graham N.Y., Helms H. D., Linear Programming Design of IIR Digital Filters with Arbitrary Magnitude Function, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-22, No. 2, 117—123 (April 1974).
8. Fletcher R., Powell M. J. D., A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer J.*, 6, No. 2, 163—168 (1963).

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

5.1. Введение

Во всех предыдущих главах при рассмотрении цифровых фильтров предполагалось, что и коэффициенты фильтров, и переменные представляются с неограниченной точностью. Для того чтобы понять, какими свойствами будет обладать реальный фильтр, построенный в виде специализированного устройства или на базе ЦВМ, необходимо учесть эффекты, вызванные конечной разрядностью всех используемых регистров. К таким эффектам относятся:

1. Шум аналого-цифрового преобразования.
2. Некоррелированный шум округления.
3. Погрешности характеристик фильтров, обусловленные квантованием коэффициентов фильтров.
4. Коррелированный шум округления, проявляющийся в виде предельных циклов.

Учитывая методы представления чисел в фильтре, способы квантования, используемые для сокращения разрядности чисел до нужной величины, а также особенности структурной схемы фильтра, в каждом конкретном случае можно оценить, как перечисленные эффекты скажутся на характеристиках фильтра. В этой главе каждый из этих эффектов рассмотрен в общем виде и дан детальный анализ некоторых частных случаев.

Можно указать на несколько серьезных причин, по которым целесообразно подробно рассмотреть лишь некоторые частные случаи. Одна из них состоит в том, что число возможных комбинаций методов представления чисел, способов квантования и структур фильтра весьма велико (например, если каждый из перечисленных факторов имеет соответственно 5, 3 и 9 вариантов, то общее число комбинаций будет равно 135). Вторая причина состоит в том, что многие из возможных вариантов представляют чисто теоретический интерес, так как они никогда не используются в реальных системах. Так, например, обычно стараются не использовать представления чисел в прямом коде (с модулем и знаком), поскольку при выполнении простых операций типа сложения возникают характерные для такого представления трудности.