

ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕИНЫХ СИСТЕМ

2.1. Введение

Теория дискретных линейных систем связана с описанием и обработкой временных и частотных последовательностей. В данной главе и в большей части всей книги будем считать, что квантование элементов последовательности по уровню отсутствует. Это предположение о бесконечно малом шаге квантования, отличающееся как к отсчетам сигналов, так и к коэффициентам линейных систем, будет использовано при изложении общей теории дискретных (во времени, но не по уровню) систем. После этого будут рассмотрены различные эффекты, возникающие в дискретных системах с определенной точностью квантования по уровню из-за конечной длины слова.

Операции по обработке сигналов, рассматриваемые в книге, могут быть выполнены путем моделирования на вычислительной машине или с помощью специализированной цифровой аппаратуры. В последующих главах обсуждаются структура вычислительных машин, предназначенных специально для обработки сигналов, а также способы аппаратурного построения эффективных цифровых систем.

2.2. Последовательности

Дискретные сигналы определяются лишь для дискретных значений независимой переменной — времени. Обычно время квантуется равномерно, т. е. $t = nT$, где T — интервал между отсчетами. Математически дискретные сигналы представляются в виде непрерывной последовательности чисел. Для описания последовательностей может быть использовано одно из следующих обозначений:

$$\{h(n)\}, N_1 \leq n \leq N_2, \quad (2.1a)$$

$$\{h(nT)\}, N_1 \leq n \leq N_2, \quad (2.1б)$$

$$h(n), N_1 \leq n \leq N_2, \quad (2.1в)$$

$$h(nT), N_1 \leq n \leq N_2. \quad (2.1г)$$

Обозначения (2.1а) и (2.1в) могут применяться при неравномерном расположении отсчетов, тогда как (2.1б) и (2.1г) явно предполагают их равномерное размещение.

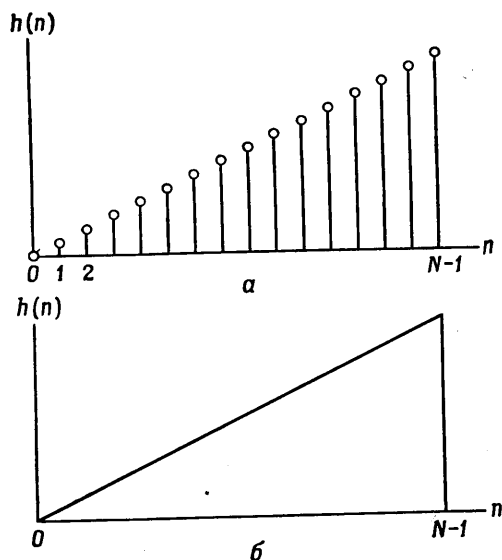
Последовательность может быть получена несколькими способами. Проще всего взять набор чисел и расположить их в виде последовательности. Например, числа $0, 1, 2, \dots, (N-1)$ образуют «пилообразную» последовательность $h(n) = n, 0 \leq n \leq N-1$. Другой способ состоит в использовании некоторого рекуррентного соотношения. Например, равенство $h(n) = h(n-1)/2$ с начальным условием $h(0) = 1$ дает последовательность $h(n) = (1/2)^n, 0 \leq n \leq \infty$. Третий способ — взять равноотстоящие отсчеты непрерывного колебания и из их величин образовать последовательность, т. е. положить $h(nT) = h(t)|_{t=nT}, -\infty \leq n \leq \infty$, где T — интервал дискретизации. Обычно для получения последовательностей методом дискретизации непрерывных колебаний используют аналого-цифровые преобразователи (АЦП). [АЦП и цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП) рассматриваются в гл. 5.] Первые два метода получения последовательностей не связаны с временем, тогда как третий существенно от него зависит. Отсюда видно, что для описания последовательностей пригодны в том или ином смысле все обозначения (2.1).

Часто полезным и информативным является графическое изображение последовательностей. Для получения графического изображения в книге будут использованы два способа (фиг. 2.1). [В качестве типичного примера на фиг. 2.1 изображена последовательность $h(n) = n, 0 \leq n \leq N-1$]. При использовании первого способа (фиг. 2.1, а) n_0 -й элемент последовательности изображается отрезком соответствующей длины, проведенным от оси абсцисс из точки $n = n_0$. Во многих случаях нет смысла изображать каждую выборку, достаточно провести только огибающую последовательности, как показано на фиг. 2.1, б.

Ниже приведены (и графически изображены на фиг. 2.2) некоторые важные последовательности, часто используемые при цифровой обработке сигналов. На фиг. 2.2, а показан цифровой единичный импульс (или единичный отсчет) $u_0(n)$, который определяется следующим образом:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

В дискретных системах этот импульс играет такую же роль, как аналоговый единичный импульс (или дельта-функция Дирака) $\delta(t)$ в аналоговых системах. Важное различие между ними состоит в том, что первый является физически реализуемым сигналом, тогда как второй рассматривается только как обобщенная функция (или распределение). На фиг. 2.2, б изображен единич-



Фиг. 2.1. Способы графического представления последовательностей.

ный импульс, задержанный на n_0 отсчетов, который определяется как

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

На фиг. 2.2, в представлен единичный скачок $u_{-1}(n)$, задаваемый следующим образом:

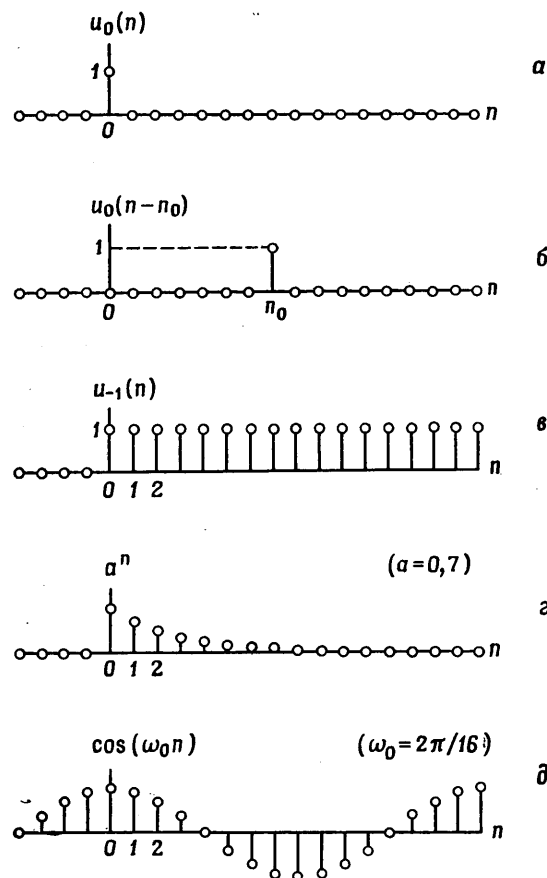
$$u_{-1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Нетрудно показать, что единичный скачок связан с единичным импульсом соотношением

$$u_{-1}(n) = \sum_{l=-\infty}^n u_0(l). \quad (2.5)$$

На фиг. 2.2, г и д изображены убывающая экспонента $g(n)$ и косинусоида $h(n)$, определяемые соответственно как

$$g(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$



Фиг. 2.2. Некоторые важные последовательности, используемые при цифровой обработке сигналов.

и

$$h(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{n_0}\right) \quad \text{для всех } n. \quad (2.7)$$

Особенно важной последовательностью является комплексная экспонента $e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$. Поскольку эта последовательность является комплексной, для ее изображения необходимы отдельные графики вещественной и мнимой частей. Позднее мы увидим, что многие из вышеупомянутых последовательностей играют важную роль в теории цифровой обработки сигналов.

2.3. Представление произвольных последовательностей

Произвольные последовательности легко выразить через основную последовательность (единичный импульс), используя задержку и масштабирование. Рассмотрим числовую последовательность ..., $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, ..., где $a(n)$ — величина n -го элемента. Такая последовательность описывается равенством

$$\{a(n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) u_0(n-m). \quad (2.8)$$

Ниже приведен метод описания дискретных линейных систем с постоянными параметрами (ЛПП-систем), основанный на данном представлении произвольных последовательностей и учитывающий свойства ЛПП-систем.

2.4. Линейные системы с постоянными параметрами

Дискретная система по существу является алгоритмом преобразования одной последовательности (называемой *входной*) в другую (называемую *выходной*). Простое представление дискретной системы дано на фиг. 2.3. Входная последовательность обозначена через $x(n)$, а выходная — через $y(n)$. Функционально они связаны соотношением

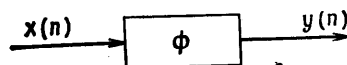
$$y(n) = \phi [x(n)], \quad (2.9)$$

где вид оператора $\phi(\cdot)$ зависит от свойств конкретной системы.

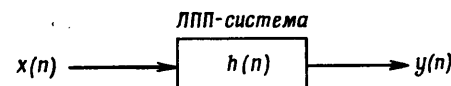
Линейная система определяется следующим образом. Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ — некоторые входные последовательности, а $y_1(n)$ и $y_2(n)$ — соответствующие им отклики линейной системы, то при подаче на вход последовательности $ax_1(n) + bx_2(n)$ на выходе образуется последовательность $ay_1(n) + by_2(n)$ (a и b — произвольные постоянные).

Система с постоянными параметрами характеризуется тем, что если входной последовательности $x(n)$ соответствует выходная последовательность $y(n)$, то входной последовательности $x(n - n_0)$ при любых n_0 соответствует на выходе последовательность $y(n - n_0)$.

Покажем теперь, что в линейной системе с постоянными параметрами входная и выходная последовательности связаны соотношением



Фиг. 2.3. Представление дискретной системы.



Фиг. 2.4. Представление линейной системы с постоянными параметрами.

шением типа свертки. Допустим, что $x(n)$ — входная, а $y(n)$ — выходная последовательности ЛПП-системы, и пусть $h(n)$ — отклик системы на единичный импульс. [Последовательность $h(n)$ называют *импульсной характеристикой системы* или *откликом на единичный отсчет*.] Используя формулу (2.8), $x(n)$ можно записать в виде

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) u_0(n-m). \quad (2.10)$$

Поскольку $h(n)$ является откликом системы на последовательность $u_0(n)$, а параметры системы постоянны, $h(n-m)$ будет откликом на последовательность $u_0(n-m)$. Из свойства линейности следует, что откликом на последовательность $x(m) u_0(n-m)$ должна быть последовательность $x(m) h(n-m)$. Поэтому отклик на $x(n)$ будет равен

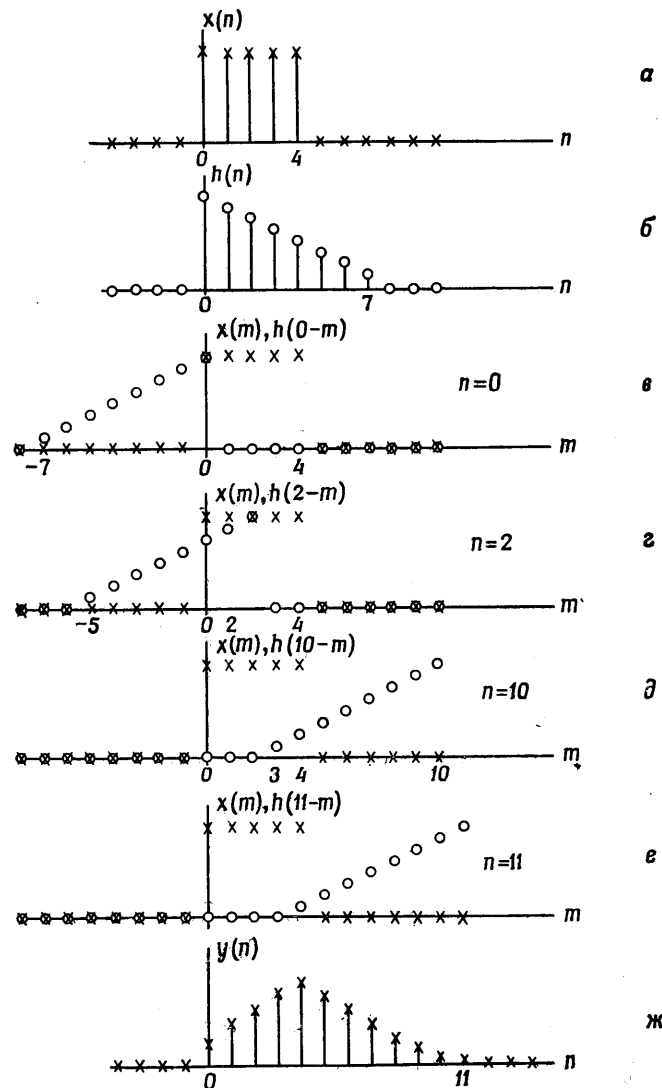
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m). \quad (2.11a)$$

Он имеет вид свертки, что и требовалось доказать. Простой заменой переменных равенство (2.11a) может быть преобразовано к виду

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m). \quad (2.11b)$$

Таким образом, последовательность $h(n)$ полностью описывает ЛПП-систему, что и отражено на фиг. 2.4.

На фиг. 2.5 показано, как процесс вычисления свертки осуществляется на практике. На фиг. 2.5, а изображена входная последовательность $x(n)$, отличная от нуля при $0 \leq n \leq 4$. На фиг. 2.5, б приведен пример импульсной характеристики $h(n)$, отличной от нуля при $0 \leq n \leq 7$. На фиг. 2.5, в—е представлены $x(m)$ и $h(n-m)$ для $n = 0, 2, 10$ и 11 . Очевидно, что при $n < 0$ и $n > 11$ последовательности $x(m)$ и $h(n-m)$ не перекрываются и $y(n)$ равно нулю. На фиг. 2.5, ж приведена последовательность $y(n)$, являющаяся искомым сверткой.



Фиг. 2.5. К образованию дискретной свертки.

2.5. Физическая реализуемость. Устойчивость

ЛПП-систему называют *физически реализуемой*, если величина отклика при $n = n_0$ зависит только от отсчетов входной последовательности с номерами $n \leq n_0$. Для ЛПП-системы это означает, что импульсная характеристика $h(n)$ равна нулю при $n < 0$. Как мы увидим в гл. 3 и 4, существует несколько систем, имеющих важное значение, но физически нереализуемых. К ним относятся идеальный фильтр нижних частот и идеальный дифференциатор. Поэтому значительная часть теории фильтров посвящена методам аппроксимации физически нереализуемых систем реализуемыми системами.

ЛПП-система называется *устойчивой*, если при любой ограниченной входной последовательности выходная последовательность также ограничена. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является следующее требование к импульсной характеристике:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.12)$$

Необходимость и достаточность условия (2.12) нетрудно показать. Предположим сначала, что условие (2.12) не удовлетворяется, т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty. \quad (2.13)$$

Рассмотрим ограниченную последовательность

$$x(n) = \begin{cases} +1 & \text{при } h(-n) \geq 0, \\ -1 & \text{при } h(-n) < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Согласно формулам (2.11), при $n=0$ отклик равен

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \infty. \quad (2.15)$$

Таким образом, последовательность $y(0)$ не ограничена, так что неравенство (2.12) является необходимым условием устойчивости системы. Для доказательства достаточности предположим, что условие (2.12) выполняется, а на вход поступает ограниченная последовательность $x(n)$, т. е.

$$|x(n)| \leq M. \quad (2.16)$$

родного и частного. Однородное решение получается путем подстановки нулей вместо всех членов, содержащих элементы входной последовательности $x(n)$, и определения отклика при нулевой входной последовательности. Именно этот класс решений описывает основные свойства заданной системы. Частное решение получают, подбирая вид последовательности $y(n)$ на выходе при заданной входной последовательности $x(n)$. Для определения произвольных постоянных однородного решения используются начальные условия. В качестве примера решим этим методом уравнение (2.19). Однородное уравнение имеет вид

$$y(n) + 3y(n-1) = 0. \quad (2.20)$$

Известно, что характеристическими решениями однородных уравнений, соответствующих линейным разностным уравнениям с постоянными коэффициентами, являются решения вида $A\alpha^n$. Поэтому, подставив в уравнение (2.20) $A\alpha^n$ вместо $y(n)$, получим

$$\begin{aligned} A\alpha^n + 3A\alpha^{n-1} &= 0, \\ A\alpha^{n-1}(\alpha + 3) &= 0, \\ \alpha &= -3, \\ y_0(n) &= A(-3)^n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Частное решение, соответствующее входной последовательности $x(n) = n^2 + n$, попробуем найти в виде

$$y_{\text{ч}}(n) = Bn^2 + Cn + D. \quad (2.22)$$

Из уравнения (2.19) получаем

$$Bn^2 + Cn + D + 3B(n-1)^2 + 3C(n-1) + 3D = n^2 + n. \quad (2.23)$$

Поскольку коэффициенты при равных степенях n должны совпадать, B , C и D должны быть равны

$$B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{5}{8}, \quad D = \frac{9}{32}. \quad (2.24)$$

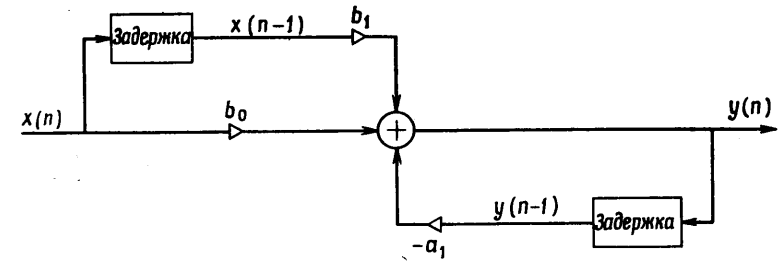
Таким образом, общее решение имеет вид

$$y(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{5n}{8} + \frac{9}{12} + A(-3)^n. \quad (2.25)$$

Коэффициент A определяется из начального условия $y(-1) = 0$, откуда $A = -9/32$ и

$$y(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{5n}{8} + \frac{9}{32} [1 - (-3)^n]. \quad (2.26)$$

Выборочная проверка решения (2.26) при $n \geq 0$ показывает полное его совпадение с приведенным выше прямым решением. Оче-



Фиг. 2.7. Схема реализации простого разностного уравнения первого порядка.

видное преимущество решения (2.26) состоит в том, что оно позволяет весьма просто определить $y(n)$ для любого конкретного $n = n_0$.

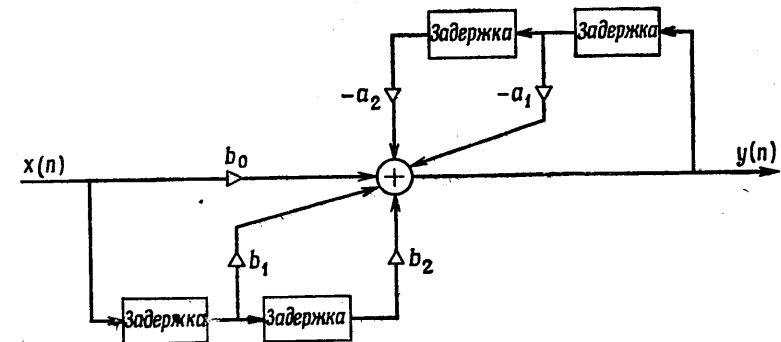
Важное значение разностных уравнений состоит в том, что они непосредственно определяют способ построения цифровой системы. Так, разностное уравнение первого порядка самого общего вида

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad (2.27)$$

можно реализовать с помощью схемы, изображенной на фиг. 2.7. Блок «задержка» осуществляет задержку на один отсчет. Рассмотренная форма построения системы, в которой для входной и выходной последовательностей используются отдельные элементы задержки, называется прямой формой 1. Ниже мы обсудим различные методы построения этой и других цифровых систем.

Разностное уравнение второго порядка самого общего вида

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \quad (2.28)$$



Фиг. 2.8. Схема реализации разностного уравнения второго порядка.

может быть реализовано с помощью схемы, приведенной на фиг. 2.8. В этой схеме для входной и выходной последовательностей также используются отдельные элементы задержки.

Из последующего изложения материалов этой главы станет ясно, что системы первого и второго порядка могут быть использованы при реализации систем более высокого порядка, так как последние могут быть представлены в виде последовательно или параллельно соединенных систем первого и второго порядка.

2.7. Частотная характеристика

В предыдущих разделах рассматривался отклик ЛПП-систем на произвольные входные последовательности. В данном разделе для описания ЛПП-систем в частотной области будет использован специальный класс входных последовательностей, имеющих вид $x(n) = e^{j\omega n}$. Как будет показано, этот класс последовательностей является набором собственных функций ЛПП-систем дискретного времени, т. е. для них выходная последовательность совпадает с входной, умноженной на некоторый комплексный коэффициент, зависящий только от ω .

Рассмотрим класс входных последовательностей вида

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.29)$$

Если такая последовательность поступает на вход ЛПП-системы с импульсной характеристикой $h(n)$, то на выходе [см. (2.11a)] появится последовательность

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} = \quad (2.30)$$

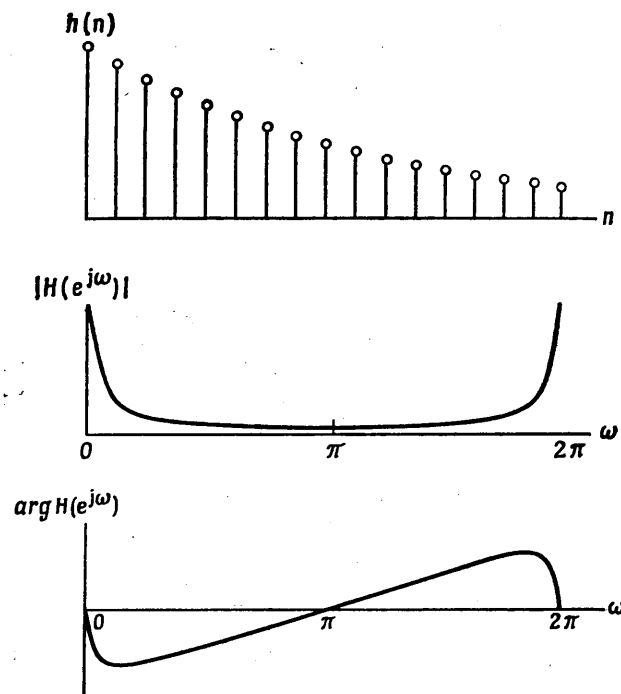
$$= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} = \quad (2.31)$$

$$= x(n) H(e^{j\omega}). \quad (2.32)$$

Таким образом, для выбранного класса входных последовательностей отклик совпадает с входной последовательностью с точностью до комплексного множителя $H(e^{j\omega})$, который выражается через импульсную характеристику системы следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (2.33)$$

Поскольку последовательность вида $e^{j\omega n}$ функционально эквивалентна дискретизованной синусоиде с частотой ω , то множитель $H(e^{j\omega})$ называют *частотной характеристикой* системы, так как он представляет коэффициент передачи ЛПП-системы для каждого значения ω .



Фиг. 2.9. Импульсная и частотная характеристики системы первого порядка.

Вычислим в качестве примера частотную характеристику ЛПП-системы с импульсной характеристикой $h(n) = a^n u_{-1}(n)$ ($|a| < 1$). Частотная характеристика имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n. \quad (2.34)$$

Так как $|a| < 1$, то сумма геометрической прогрессии (2.34) будет равна

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.35)$$

На фиг. 2.9 графически представлены $h(n)$, а также модуль и фаза $H(e^{j\omega})$ как функции частоты ω в диапазоне $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Отметим некоторые свойства частотной характеристики. Нетрудно заметить, что частотная характеристика является периодической функцией ω , причем ее период равен 2π . Эта периодичность связана со спецификой дискретизованного колебания: входная последовательность с частотой $(\omega + 2m\pi)$ ($m = \pm 1$,

$\pm 2, \dots$) не отличается от входной последовательности с частотой ω , т. е.

$$\hat{x}(n) = e^{j(\omega + 2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n). \quad (2.36)$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ — периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π . Обычно для этой цели используют интервал $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Другим важным свойством частотной характеристики является то, что для действительных $h(n)$ (как обычно и бывает на практике) модуль $H(e^{j\omega})$ симметричен, а фаза $H(e^{j\omega})$ антисимметрична на интервале $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Аналогично действительная часть $H(e^{j\omega})$ симметрична, а мнимая — антисимметрична на том же интервале. Поэтому при действительных импульсных характеристиках интервал частот, на котором задают частотную характеристику, обычно сокращают до $0 \leq \omega \leq \pi$.

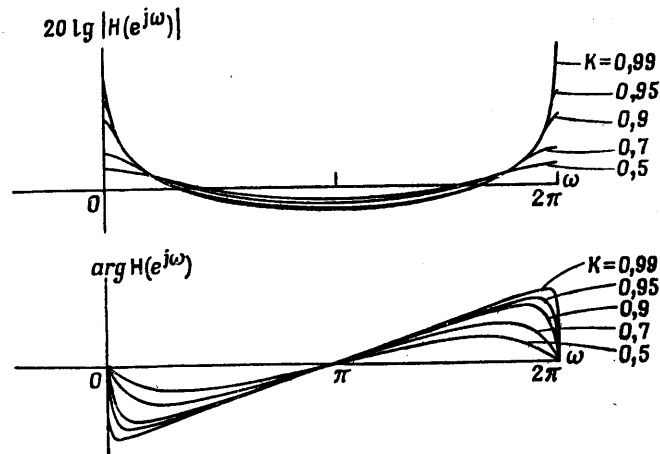
2.8. Частотная характеристика систем первого порядка

Рассмотрим разностное уравнение системы первого порядка

$$y(n) = x(n) + Ky(n-1) \quad (2.37)$$

с начальным условием $y(-1) = 0$. Легко установить, что ее импульсная характеристика равна

$$h(n) = \begin{cases} K^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.38)$$



Фиг. 2.10. Частотные характеристики нескольких систем первого порядка.

Используя формулу (2.33), найдем частотную характеристику системы первого порядка

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - Ke^{-j\omega}}. \quad (2.39)$$

Представив $H(e^{j\omega})$ в виде

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg H(e^{j\omega})}, \quad (2.40)$$

получим

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + K^2 - 2K \cos \omega)^{1/2}}, \quad (2.41)$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = \omega - \arctg \frac{K \sin \omega}{1 - K \cos \omega}. \quad (2.42)$$

Графики $\lg |H(e^{j\omega})|$ и $\arg H(e^{j\omega})$ для различных значений K приведены на фиг. 2.10. Во всех случаях $H(e^{j\omega})$ является характеристикой фильтра нижних частот. В разд. 2.18 будет показано, каким образом $|H(e^{j\omega})|$ и $\arg H(e^{j\omega})$ могут быть получены из геометрических представлений.

2.9. Частотная характеристика систем второго порядка

Разностное уравнение системы второго порядка можно записать в виде

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2). \quad (2.43)$$

[В общем случае уравнение второго порядка содержит также члены вида $b_1 x(n-1)$ и $b_2 x(n-2)$, однако для простоты изложения эти члены опущены.] Если снова ввести нулевые начальные условия $y(-1) = 0$ и $y(-2) = 0$, то нетрудно показать, что импульсная характеристика системы может принять одну из двух форм¹⁾:

$$h(n) = \alpha_1 (p_1)^n + \alpha_2 (p_2)^n \quad (I), \quad (2.44)$$

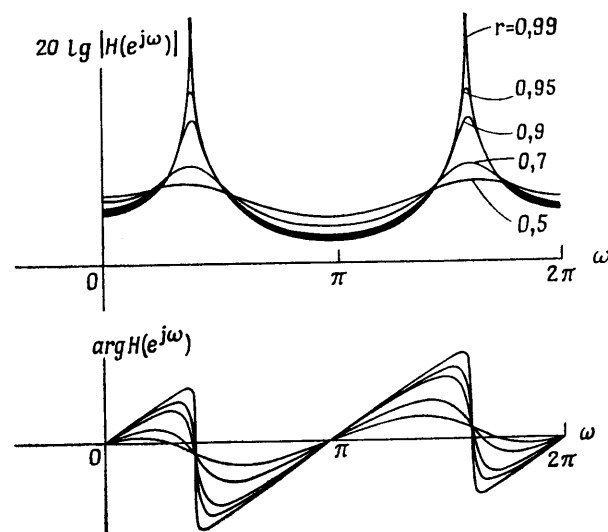
где p_1 и p_2 — действительные числа, либо

$$h(n) = \alpha_1 r^n \sin(bn + \varphi) \quad (II). \quad (2.45)$$

Импульсная характеристика вида (2.44) описывает две системы первого порядка и убывает как p_1^n и p_2^n . Выражение (2.45) описывает систему второго порядка, импульсная характеристика которой является затухающей синусоидой. Импульсная характеристика имеет такой вид, когда коэффициенты разностного уравнения (2.43) удовлетворяют следующему условию:

$$a_2 < -\frac{a_1^2}{4}, \quad (2.46)$$

¹⁾ Предполагается, что корни однородного уравнения не совпадают. В противном случае требуются лишь незначительные изменения.



Фиг. 2.11. Частотные характеристики нескольких систем второго порядка.

из которого следует, что $a_2 < 0$. Легко показать, что если условие (2.46) выполняется, то

$$r = \sqrt{-a_2}, \quad (2.47)$$

$$\cos b = \frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}, \quad (2.48)$$

$$\varphi = b, \quad (2.49)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sin b}. \quad (2.50)$$

Частотную характеристику, соответствующую импульсной характеристике (2.45), можно записать следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r(\cos b)e^{-j\omega} + r^2e^{-2j\omega}}. \quad (2.51)$$

Амплитудные (в логарифмическом масштабе) и фазовые характеристики системы второго порядка, соответствующие фиксированному значению $b = \pi/4$ и различным r , приведены на фиг. 2.11. Из графиков видно, что такая система является простым цифровым резонатором.

2.10. Дискретный ряд Фурье

Поскольку частотная характеристика дискретной системы является периодической функцией частоты ω , равенство (2.33) можно рассматривать как разложение $H(e^{j\omega})$ в ряд Фурье, причем коэффициенты разложения являются одновременно отсчетами импульсной характеристики системы. Согласно теории рядов Фурье, коэффициенты $h(n)$ могут быть выражены через $H(e^{j\omega})$ следующим образом:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.52)$$

Таким образом, равенства (2.33) и (2.52) представляют собой пару преобразований Фурье. Из соотношения (2.52) видно, что $h(n)$ по существу является суперпозицией синусоид $e^{j\omega n}$ с амплитудами $H(e^{j\omega n})$. Пара преобразований (2.33) и (2.52) справедлива для любой последовательности с конечной суммой (2.33), поэтому произвольную входную последовательность также можно представить в виде

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.53)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}. \quad (2.54)$$

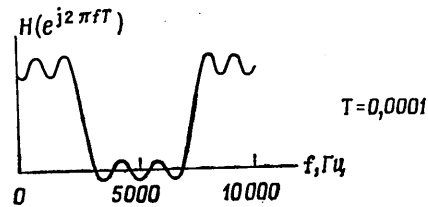
Согласно формулам (2.31) и (2.32), отклик на последовательность $e^{j\omega n}$ равен $H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$, поэтому откликом на входную последовательность (2.53) будет

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.55)$$

(для суммирования откликов использовано свойство линейности системы). Из равенства

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (2.56)$$

нетрудно увидеть, что (2.55) является одним из двух соотношений, представляющих собой пару преобразований Фурье для последовательности $y(n)$. Таким образом, показано, что и для дискретных систем свертка во временной области соответствует умножению в частотной области. Итак, частотная характеристика $H(e^{j\omega})$



Фиг. 2.12. Частотная характеристика системы с частотой дискретизации 10 кГц.

представляет собой отклик системы на ограниченный класс входных последовательностей вида $e^{j\omega n}$, $0 \leq \omega < 2\pi$. Однако с учетом соотношения (2.53), показывающего, что произвольные последовательности являются суперпозицией таких экспонент, она является важным средством описания отклика системы почти на любые входные последовательности.

2.11. Замечания о единицах измерения частоты

Часто возникает необходимость выразить спектральный состав последовательности $h(nT)$ в единицах частоты, связанных с интервалом дискретизации T . В этом случае равенства (2.33) и (2.52) преобразуются к виду

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega n T}, \quad (2.57)$$

$$h(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega \quad (2.58)$$

Функция $H(e^{j\omega T})$ периодична по частоте ω с периодом, равным $2\pi/T$. Частота ω в (2.57) и (2.58) выражается в радианах в секунду. Характеристику (2.57) можно выразить и через частоту f , измеряемую в герцах, если ω заменить на $2\pi f$.

Если, например, $T = 0,0001$ с (частота дискретизации $1/T = 10\,000$ Гц), то $H(e^{j2\pi fT})$ является периодической функцией f с периодом 10 000 Гц, а $H(e^{j\omega T})$ — периодической функцией ω с периодом 20 000 рад/с. Пример типичной частотной характеристики для действительной последовательности, имеющей интервал дискретизации $T = 0,0001$ с, приведен на фиг. 2.12. Поскольку последовательность действительная, частотная характеристика обладает свойствами симметрии, обсуждавшимися ранее.

2.12. Соотношение между непрерывными и дискретными системами

Как уже отмечалось, последовательность $x(nT)$ часто получают путем дискретизации непрерывного колебания $x(t)$ с периодом T секунд. В этих случаях важно представлять, каким образом спектр последовательности $X(e^{j\omega T})$ связан с преобразованием Фурье $X_H(j\Omega)$ непрерывного колебания $x(t)$. В данном разделе устанавливается связь между ними и обсуждаются следствия, вытекающие из нее.

Пара преобразований Фурье для непрерывного колебания $x(t)$ имеет вид

$$X_H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad (2.59)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2.60)$$

Аналогичные соотношения для дискретизованного колебания имеют вид

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega n T}, \quad (2.61)$$

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega. \quad (2.62)$$

Поскольку $x(nT) = x(t)|_{t=nT}$, то можно связать $X_H(j\Omega)$ и $X(e^{j\omega T})$, вычислив интеграл (2.60) для $t = nT$, причем интеграл с бесконечными пределами следует заменить бесконечной суммой интегралов на интервалах длиной $2\pi/T$. Таким образом,

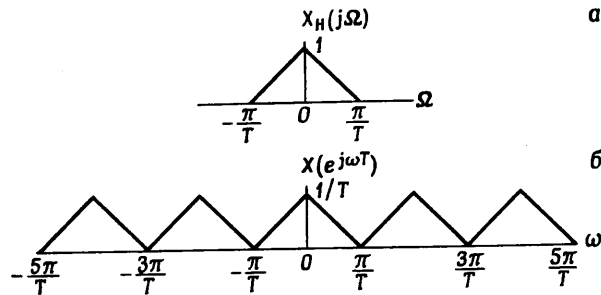
$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi/T}^{(2m+1)\pi/T} X_H(j\Omega) e^{j\Omega n T} d\Omega. \quad (2.63)$$

Изменив в (2.63) порядок действий и заменив Ω на ω , получим

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_H\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right) \right] e^{j\omega n T} d\omega. \quad (2.64)$$

Приравнявая подынтегральные выражения в (2.64) и (2.62), получаем искомое соотношение

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_H\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right). \quad (2.65)$$

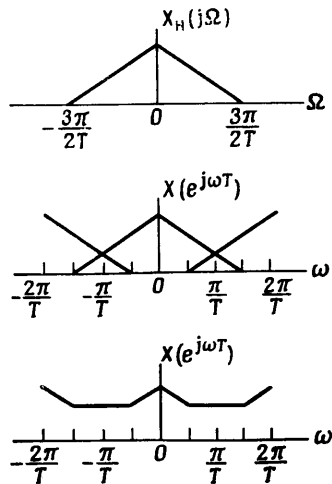


Фиг. 2.13. Связь между спектрами непрерывного и дискретизованного колебаний при правильном выборе частоты дискретизации.

Из этой формулы видно, что периодическая спектральная функция последовательности состоит из суммы бесконечного числа спектральных компонент непрерывного колебания. Если спектр непрерывного колебания ограничен по полосе диапазоном частот $|\Omega| \leq \pi/T$, т. е. $X_H(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > \pi/T$, из соотношения (2.65) следует, что в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi/T$

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} X_H(\omega). \quad (2.66)$$

В этом случае спектр последовательности непосредственным образом связан со спектром непрерывного колебания (фиг. 2.13, а, б).



Фиг. 2.14. Эффекты наложения в спектре дискретизованного колебания при недостаточной частоте дискретизации.

Если же $X_H(j\Omega)$ не ограничен диапазоном $|\Omega| \leq \pi/T$, то соотношение между спектрами дискретизованного и непрерывного колебаний оказывается более сложным. Типичный пример показан на фиг. 2.14, а—в. Спектр непрерывного колебания (фиг. 2.14, а) ограничен полосой $|\Omega| \leq 3\pi/(2T)$. Из формулы (2.65) следует, что члены с $m = 0, \pm 1$ дают вклад в $X(e^{j\omega T})$ в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi/T$ (фиг. 2.14, б). Поэтому в отличие от предыдущего примера спектр последовательности (фиг. 2.14, в) связан со спектром исходного колебания значительно более сложным образом. Причина заключается в том, что частота дискретизации $1/T$ была недостаточно большой и высокочастотные составляющие спектра $X_H(j\Omega)$ попали в область более низких частот в спектре $X(e^{j\omega T})$. Такое смещение спектральных составляющих из одного диапазона частот в другой называют *наложением спектров*, а последовательность, соответствующую спектру фиг. 2.14, в, — *представлением колебания $x(t)$ с наложением*. Ясно, что наложения можно избежать, дискретизируя непрерывные колебания с достаточно высокой частотой.

2.13. z-преобразование

Одним из наиболее полезных методов представления последовательностей и работы с ними является z-преобразование. Для последовательности $x(n)$, заданной при всех n , оно определяется следующим образом:

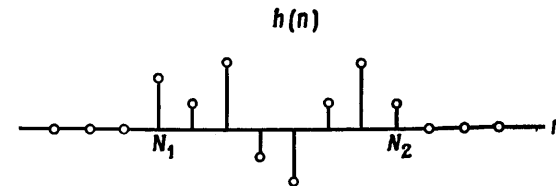
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (2.67)$$

где z — комплексная переменная. Ясно, что комплексная функция (2.67) определена лишь для тех значений z , при которых степенной ряд сходится. Детальное обсуждение его сходимости выходит за рамки данной книги (его можно найти в соответствующих учебниках), поэтому ниже просто перечислены общие результаты, необходимые для понимания излагаемых в книге вопросов.

1. Последовательности конечной длины

Если $x(n)$ отлична от нуля только в интервале $N_1 \leq n \leq N_2$ ($N_1 < N_2$), где N_1 и N_2 конечны, то $X(z)$ сходится в z -плоскости везде, за исключением, быть может, точек $z = 0$ или $z = \infty$. ЛПН-систему, импульсная характеристика которой является последовательностью конечной длины, называют системой с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ) или, что то же самое, КИХ-фильтром. В гл. 3 будет показано, что на последовательностях конечной длины основан важный класс методов проектирования цифровых фильтров.

Типичная импульсная характеристика $\{h(n)\}$ конечной длины изображена на фиг. 2.15. Легко показать, что если все ее элементы



Фиг. 2.15. Последовательность конечной длины.

конечны, то ЛПП-система с такой импульсной характеристикой всегда устойчива, так как проверка на устойчивость [см. формулу (2.12)] сводится к суммированию конечного числа ограниченных слагаемых. Кроме того, такую систему всегда можно сделать физически реализуемой, введя необходимую задержку импульсной характеристики (например, на $-N_1$ отсчетов, если $N_1 < 0$).

В отличие от определения, данного выше, системой (фильтром) с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) называют систему (фильтр), длина импульсной характеристики которой не ограничена слева (т. е. $N_1 = -\infty$) или справа (т. е. $N_2 = \infty$), или с обеих сторон. Как будет показано в гл. 4, последовательности бесконечной длины составляют основу другого большого класса методов проектирования цифровых фильтров.

2. Физически реализуемые последовательности

Если $x(n)$ отличается от нуля только при $0 \leq N_1 \leq n < \infty$, то $X(z)$ сходится везде вне круга радиуса R_1 . Величина R_1 зависит от положения особых точек $X(z)$, называемых полюсами системы. Как будет показано, при $R_1 < 1$ соответствующая система является устойчивой. Физически реализуемые последовательности весьма важны, так как на их основе строятся большинство реальных систем.

3. Нереализуемые последовательности

Если $x(n)$ имеет ненулевые значения в области $-\infty < n < N_1 \leq 0$, то ряд $X(z)$ сходится во всех точках, лежащих в круге радиуса R_1 , причем R_1 определяется положением особых точек $X(z)$. В практических задачах нереализуемые последовательности обычно не встречаются, но при рассмотрении некоторых теоретических вопросов они могут представлять интерес.

Получим теперь z -преобразования некоторых полезных последовательностей.

Пример 1. Найти z -преобразование единичного импульса.

Решение. Поскольку $x(n) = 0$ при любых n , за исключением $n = 0$, где $x(n) = 1$, то

$$X(z) = 1.$$

$X(z)$ сходится на всей z -плоскости, так как единичный импульс является последовательностью конечной длины.

Пример 2. Найти z -преобразование единичного скачка.

Решение. Поскольку $x(n) = 0$ везде, кроме $n \geq 0$, где $x(n) = 1$, то

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

причем $X(z)$ сходится при $|z| > 1$, так как $X(z)$ имеет единственную особую точку $z = 1$.

Пример 3. Найти z -преобразование комплексной экспоненты

$$x(n) = 0, \quad n < 0; \quad x(n) = e^{jn\omega}, \quad n \geq 0.$$

Решение. Вычисляя z -преобразование, получим

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{j\omega})^n = \frac{1}{1-z^{-1} e^{j\omega}},$$

причем $X(z)$ сходится при $|z| > 1$, так как единственной особой точкой $X(z)$ является $z = e^{j\omega}$.

Пример 4. Найти z -преобразование простой экспоненциальной последовательности

$$x(n) = 0, \quad n < 0; \quad x(n) = a^n, \quad n \geq 0.$$

Решение. Подставив $x(n)$ в (2.67), получим

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}.$$

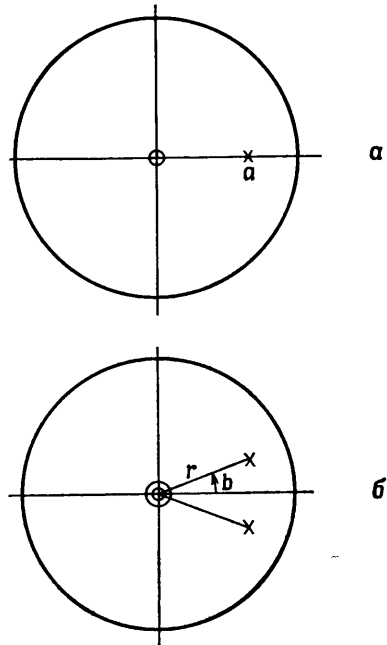
$X(z)$ сходится при $|z| > a$, так как имеет только одну особую точку $z = a$.

2.14. Соотношение между z -преобразованием и фурье-преобразованием последовательности

z -преобразование последовательности можно рассматривать как способ ее однозначного представления в комплексной z -плоскости. Из определения (2.67) видно, что z -преобразование, вычисленное на единичной окружности, т. е. при $z = e^{j\omega}$, дает

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}, \quad (2.68)$$

что совпадает с преобразованием Фурье исходной последовательности. Ниже будет также показано, что если все особые точки



Фиг. 2.16. Расположение нулей и полюсов для систем первого и второго порядка.

такого изображения расположения нулей и полюсов, а также используя дополнительное предположение о физической реализуемости системы, можно однозначно (с точностью до постоянного множителя) восстановить z -преобразование.

Пример 5. Найдем z -преобразование системы со следующей импульсной характеристикой:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{r^n \sin[(n+1)b]}{\sin b}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Решение. Используя определение z -преобразования, получим

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left\{ \frac{\sin[(n+1)b]}{\sin b} \right\} z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n z^{-n}}{\sin b} \left[\frac{e^{jb(n+1)} - e^{-jb(n+1)}}{2j} \right] = \end{aligned}$$

$X(z)$ расположены внутри круга единичного радиуса, то система с соответствующей импульсной характеристикой является устойчивой. Поэтому единичная окружность в z -плоскости играет весьма важную роль. Например, имеется немало важных нереализуемых систем (таких, как идеальный фильтр нижних частот или идеальный дифференциатор), z -преобразования которых сходятся только на единичной окружности, т. е. эти системы имеют фурье-преобразование, но не имеют z -преобразования.

Обычным способом графического изображения информации, содержащейся в z -преобразовании, является задание особых точек (полюсов) и нулей функции $X(z)$. Так, например, z -преобразование, рассмотренное в примере 4, может быть представлено так же, как на фиг. 2.16, где крестиками изображены полюсы, а кружками — нули функции $X(z)$. С помощью

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} (rz^{-1}e^{jb})^n \frac{e^{jb}}{2j \sin b} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rz^{-1}e^{-jb})^n e^{-jb}}{2j \sin b} = \\ &= \frac{1}{2j \sin b} \left(\frac{e^{jb}}{1 - rz^{-1}e^{jb}} - \frac{e^{-jb}}{1 - rz^{-1}e^{-jb}} \right), \\ H(z) &= \frac{1}{1 - 2r(\cos b)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \end{aligned}$$

$H(z)$ сходится при $|z| > r$. Расположение нулей и полюсов такого резонатора в z -плоскости показано на фиг. 2.16, б. Он имеет пару комплексно сопряженных полюсов в точках $z = re^{\pm jb}$ и двойной нуль при $z = 0$.

Как уже упоминалось, зная расположение нулей и полюсов функции $X(z)$, ее можно восстановить. Так, если известно, что функция $X(z)$ имеет N полюсов в точках $z = p_1, p_2, \dots, p_N$ и M нулей в точках $z = z_1, z_2, \dots, z_M$, то она может быть записана в виде отношения произведений

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}, \quad (2.69)$$

где A — произвольная постоянная. Перемножив сомножители, получим, что наиболее общей формой $X(z)$ является дробно-рациональная функция от z^{-1} , т. е.

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}. \quad (2.70)$$

Полученное выражение весьма часто используется при синтезе фильтров.

2.15. Обратное z -преобразование

Весьма важно уметь перейти не только от последовательности к ее z -преобразованию, но и, наоборот, от z -преобразования к последовательности. Способ обратного перехода называется *обратным* z -преобразованием и формально определяется соотношением

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X(z) z^{n-1} dz. \quad (2.71)$$

В правой части этого равенства стоит контурный интеграл в z -плоскости по любому замкнутому контуру в области сходимости, охватывающему начало координат. Например, контуром интегрирования может быть окружность радиуса $C_1 > R_1$, где R_1 — радиус сходимости z -преобразования (т. е. мы предполагаем, что последовательность $x(n)$ физически реализуема).

Обратное z -преобразование можно найти несколькими способами:

1. Прямым вычислением интеграла (2.71) с использованием теоремы о вычетах.

2. Разложением $X(z)$ на простые дроби.

3. Обычным делением числителя $X(z)$ на его знаменатель.

4. Разложением в степенной ряд.

Первый способ основан на известной теореме из теории функций комплексного переменного, утверждающей, что контурный интеграл (2.71) может быть вычислен непосредственно через вычеты:

$$x(n) = \sum \operatorname{res} X(z) z^{n-1} \Big|_z \text{ внутри } C_1. \quad (2.72)$$

Рассмотрим пример 4, в котором $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$. Из равенства (2.72) при $n \geq 0$ получаем $x(n) = \operatorname{res} z^{n-1}/1 - az^{-1} \Big|_{z=a}$, т. е. $x(n) = a^n$, $n \geq 0$. При $n < 0$ кратный полюс z -преобразования находится в точке $z = 0$. Прямое вычисление вычета в полюсе $z = 0$ дает $x(n) = 0$ при $n < 0$.

При использовании второго способа z -преобразование записывают в виде дроби (2.69) и представляют суммой

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}}. \quad (2.73)$$

С учетом того, что каждое слагаемое $\alpha_i/(1 - p_i z^{-1})$ имеет обратное z -преобразование вида $\alpha_i (p_i)^n$, получим

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i (p_i)^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Способы 3 и 4 здесь не рассматриваются. Читатель может ознакомиться с ними в пособиях по z -преобразованию.

2.16. Свойства z -преобразования

z -преобразование весьма полезно при исследовании дискретных ЛПП-систем. Чтобы полностью использовать возможности z -преобразования, необходимо знать его основные свойства,

связанные с линейностью, задержкой последовательностей, сверткой, перемножением последовательностей, задержкой физически реализуемых последовательностей.

1. Линейность

z -преобразование линейно. Это означает, что если $X_1(z)$ и $X_2(z)$ являются z -преобразованиями последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$, то при любых действительных a и b z -преобразование последовательности $ax_1(n) + bx_2(n)$ равно $aX_1(z) + bX_2(z)$.

2. Задержка

Если последовательность $x_1(n)$ имеет z -преобразование $X_1(z)$, то z -преобразование последовательности $x_1(n - n_0)$ при любых n_0 равно $z^{-n_0} X_1(z)$. Это свойство z -преобразования особенно полезно при переходе от представления ЛПП-системы разностным уравнением к представлению ее z -преобразованием и наоборот. Например, разностное уравнение

$$y(n) = x(n) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) \quad (2.75)$$

можно представить z -преобразованием

$$Y(z) = X(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z) \quad (2.76)$$

или

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \quad (2.77)$$

где

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n},$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}.$$

Свойство, связанное с задержкой последовательности, использовано здесь для того, чтобы выразить z -преобразования последовательностей $y(n-1)$ и $y(n-2)$ через z -преобразование последовательности $y(n)$.

3. Свертка последовательностей

Если $x(n)$ и $y(n)$ являются входной и выходной последовательностями дискретной ЛПП-системы с импульсной характеристикой $h(n)$, то

$$Y(z) = X(z) H(z), \quad (2.78)$$

где $X(z)$, $H(z)$ и $Y(z)$ являются соответственно z -преобразованиями последовательностей $x(n)$, $h(n)$ и $y(n)$. Таким образом, операция свертки последовательностей приводит к перемножению их z -преобразований. Нетрудно заметить, что $H(z)$ можно выразить из соотношения (2.78) в виде

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (2.79)$$

Так, на примере уравнения (2.75) ясно, что $H(z)$, или, что то же самое, $h(n)$, может быть получена из разностного уравнения системы и наоборот. Для системы, описываемой уравнением (2.75), $H(z)$ имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}. \quad (2.80)$$

Не следует недооценивать важности равенства (2.78) как практического средства, позволяющего без вычисления свертки найти выходную последовательность системы по ее импульсной характеристике и входной последовательности. Рассчитывая отклик $y(n)$ путем перемножения двух преобразований и вычисления обратного преобразования, часто удается свести сложную задачу к более простой. В качестве примера рассмотрим входную последовательность $x(n) = u_{-1}(n) a^n$, поступающую на вход ЛПП-системы с импульсной характеристикой $h(n) = u_{-1}(n) b^n$. z -преобразования последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ равны

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a,$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b.$$

Умножив $X(z)$ на $H(z)$, получим

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}, \quad |z| > \max[a, b].$$

Полагая, что $a \neq b$, можно разложить $Y(z)$ на простые дроби:

$$Y(z) = \frac{-a/(b-a)}{1 - az^{-1}} + \frac{b/(b-a)}{1 - bz^{-1}}.$$

С учетом соотношения (2.72) получим

$$y(n) = \left(\frac{-a}{b-a} a^n + \frac{b}{b-a} b^n \right) u_{-1}(n).$$

4. Перемножение последовательностей

Если последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют z -преобразования $X_1(z)$ и $X_2(z)$, то последовательность $x_3(n) = x_1(n) x_2(n)$ имеет z -преобразование

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv. \quad (2.81)$$

В область сходимости $X_3(z)$ входят все z , для которых справедливо следующее условие: если некоторая точка v принадлежит области сходимости $X_1(z)$, то z/v принадлежит области сходимости $X_2(z)$. В формуле (2.81) контур интегрирования является замкнутой кривой, лежащей внутри пересечения областей сходимости функций $X_1(v)$ и $X_2(z/v)$.

Соотношение (2.81) называют *теоремой о комплексной свертке*, так как оно представляет z -преобразование произведения $[x_1(n) \times x_2(n)]$ в виде комплексной свертки z -преобразований соответствующих последовательностей. Воспользовавшись подстановками $z = e^{j\omega}$ и $v = e^{j\theta}$, выразим преобразование Фурье от произведения последовательностей через преобразования Фурье от каждой из них. Оно имеет вид

$$X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (2.82)$$

и является широко известной сверткой двух преобразований Фурье. Это соотношение потребуется при рассмотрении проектирования фильтров методом весовых функций и анализе различных систем модуляции.

Важным следствием равенства (2.81) является так называемая теорема Парсеваля, связывающая энергию сигнала с энергией его спектра. Обобщенную форму этой теоремы можно получить, определяя последовательность $y(n)$ как

$$y(n) = x(n) w^*(n).$$

Из равенства (2.81) следует, что z -преобразование этой последовательности равно

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) W^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right) v^{-1} dv.$$

Вычисляя $Y(z)$ в точке $z = 1$, получаем

$$Y(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) W\left(\frac{1}{v^*}\right) \frac{dv}{v}$$

и, выбирая в качестве контура интегрирования единичную окружность (т. е. полагая $v = e^{j\omega}$), приходим к соотношению

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) W^*(e^{j\omega}) d\omega.$$

Важный частный случай имеет место при $w(n) = x(n)$, когда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Это равенство известно как теорема Парсеваля.

5. Задержка физически реализуемых последовательностей. Одностороннее z-преобразование

При решении большинства практических задач обычно имеют дело с физически реализуемыми последовательностями, поэтому полезно ввести «одностороннее» z-преобразование, определяемое как

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}. \quad (2.83)$$

При этом предполагается, что поведение последовательности $x(n)$ до точки $n=0$ не известно и его можно не учитывать. Для многих последовательностей свойства одностороннего z-преобразования аналогичны свойствам обычного z-преобразования. Основным исключением является свойство, связанное со сдвигом (задержкой) последовательностей. Рассмотрим, например, последовательность $x_1(n)$ с односторонним z-преобразованием $X_1(z)$ и задержанную последовательность $x_2(n) = x_1(n-1)$. Одностороннее z-преобразование от $x_2(n)$ равно

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n-1) z^{-n}. \quad (2.84)$$

Положив $m = n - 1$, получим равенство

$$X_2(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m) z^{-m-1}, \quad (2.85)$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$X_2(z) = z^{-1} [x_1(-1)z + \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) z^{-m}] = \quad (2.86)$$

$$= z^{-1} [X_1(z)] + x_1(-1). \quad (2.87)$$

Задержка на один отсчет по-прежнему приводит к умножению одностороннего z-преобразования на z^{-1} , но при этом необходимо учесть значения последовательности $x_1(n)$ при $n < 0$, т. е. важную роль начинают играть начальные условия.

В качестве другого примера рассмотрим z-преобразование последовательности $x_3(n) = x_1(n-2)$, равное

$$X_3(z) = z^{-2} [X_1(z)] + x_1(-2) + x_1(-1)z^{-1}. \quad (2.88)$$

Из выражений (2.87) и (2.88) можно получить формулу для случая задержки последовательности на произвольное число n_0 отсчетов ($n_0 > 0$). Она имеет вид

$$Y(z) = z^{-n_0} X_1(z) + x_1(-n_0) + x_1(-n_0+1)z^{-1} + \dots + x_1(-1)z^{-(n_0-1)}, \quad (2.89)$$

причем

$$y(n) = x(n - n_0).$$

2.17. Решение разностных уравнений с применением одностороннего z-преобразования

Разностные уравнения обычно определены при $n \geq 0$ и имеют набор начальных условий. Поэтому нетрудно понять, каким образом можно использовать одностороннее z-преобразование для нахождения отклика системы на заданную входную последовательность. В качестве примера рассмотрим разностное уравнение первого порядка

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (2.90)$$

с начальным условием $y(-1) = K$. Пусть на вход поступает последовательность $x(n) = e^{j\omega n} u_{-1}(n)$. Чтобы найти одностороннее z-преобразование $y(n)$, умножим обе части равенства (2.90) на z^{-n} и просуммируем от 0 до ∞ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} + a \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1) z^{-n}. \quad (2.91)$$

Воспользуемся свойством, связанным с задержкой последовательности, описанным в разд. 2.16. Имеем

$$Y(z) = X(z) + az^{-1} Y(z) + ay(-1), \quad (2.92)$$

откуда

$$Y(z) = \frac{X(z) + ay(-1)}{1 - az^{-1}}. \quad (2.93)$$

Поскольку

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}},$$

то

$$Y(z) = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - e^{j\omega} z^{-1})}. \quad (2.94)$$

Разложив второе слагаемое на простые дроби, получим

$$Y(z) = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{a/(a - e^{j\omega})}{1 - az^{-1}} + \frac{-e^{j\omega}/(a - e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}. \quad (2.95)$$

Вычислим обратное z-преобразование от (2.95):

$$y(n) = \left[a^{n+1} K + \frac{a^{n+1}}{a - e^{j\omega}} - \frac{e^{j\omega(n+1)}}{a - e^{j\omega}} \right] u_{-1}(n). \quad (2.96)$$

Первое слагаемое в скобках представляет собой составляющую отклика, определяемую начальными условиями, а второе — переход-

ную характеристику системы. При $a < 1$ оба эти члена экспоненциально убывают. Третье слагаемое описывает вынужденные колебания в системе.

Вышеизложенное нетрудно обобщить на системы более высокого порядка. В общем случае разностное уравнение L -го порядка имеет вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^L a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^L b_i y(n-i) \quad (2.97)$$

с начальными условиями $\{y(-1), y(-2), \dots, y(-N)\}$. [Замечание. Здесь предполагается, что входная последовательность $x(n) = 0$ при $n < 0$.] Вычисляя односторонние z -преобразования от обеих частей уравнения (2.97), получим

$$Y(z) = \sum_{i=0}^L a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^L b_i [z^{-i} Y(z) + y(-i) + y(-i+1)z^{-1} + \dots + y(-1)z^{-(i-1)}]. \quad (2.98)$$

Теперь можно получить выражение для $Y(z)$ через $X(z)$ и начальные условия и, взяв обратное z -преобразование, найти отклик $y(n)$.

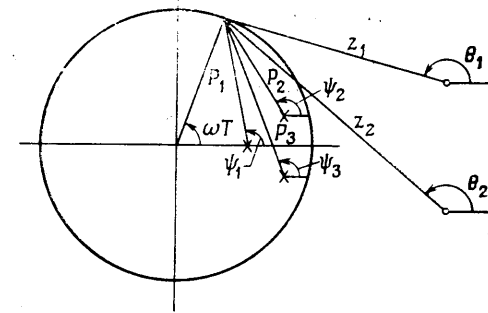
2.18. Геометрическая интерпретация преобразования Фурье

Выше было отмечено [см. формулу (2.69)], что z -преобразование последовательности всегда может быть записано в виде дроби, числитель которой равен произведению членов, описывающих нули $X(z)$, а знаменатель — произведению членов, представляющих полюсы z -преобразования $X(z)$, т. е.

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}. \quad (2.99)$$

Преобразование Фурье последовательности (или передаточную функцию системы) можно получить, вычисляя $X(z)$ на единичной окружности, т. е. при $z = e^{j\omega}$. Таким образом,

$$X(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i e^{-j\omega})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i e^{-j\omega})}. \quad (2.100)$$



Фиг. 2.17. Геометрическая интерпретация измерения частотной характеристики.

Записав комплексную функцию $X(e^{j\omega})$ как $|X(e^{j\omega})| e^{j \arg X(e^{j\omega})}$, найдем

$$|X(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{i=1}^M |1 - z_i e^{-j\omega}|}{\prod_{i=1}^N |1 - p_i e^{-j\omega}|} = |A| \frac{\prod_{i=1}^M |e^{j\omega} - z_i|}{\prod_{i=1}^N |e^{j\omega} - p_i|}, \quad (2.101)$$

$$\arg X(e^{j\omega}) = \arg A + \sum_{i=1}^M \arg(1 - z_i e^{-j\omega}) - \sum_{i=1}^N \arg(1 - p_i e^{-j\omega}). \quad (2.102)$$

Геометрическая интерпретация соотношений (2.100) — (2.102) дана на фиг. 2.17. Из точки $z = e^{j\omega}$, находящейся на единичной окружности, во все нули и полюсы проведены векторы. По их величине определяется модуль передаточной функции на заданной частоте ω , а по их углам — фаза. В примере на фиг. 2.17 имеются три полюса ($N = 3$) и два нуля ($M = 2$), а коэффициент A равен 1, поэтому (фиг. 2.17)

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{z_1 z_2}{p_1 p_2 p_3},$$

$$\arg X(e^{j\omega}) = \theta_1 + \theta_2 - (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3).$$

Для определения передаточной функции на всех частотах $0 \leq \omega \leq \pi$ необходимо перемещать z по единичной окружности против часовой стрелки из точки $z = +1$ до точки $z = -1$.

2.19. Построение цифровых фильтров (структурные схемы фильтров)

Цифровые фильтры с заданной передаточной функцией можно построить различными способами. В любом реальном цифровом фильтре шум и погрешности, появляющиеся при квантовании (см. гл. 5), существенно зависят от структуры фильтра. Прежде всего все фильтры можно разделить на два больших класса: рекурсивные и нерекурсивные. Для *рекурсивных фильтров* соотношение между входной последовательностью $\{x(n)\}$ и откликом фильтра $\{y(n)\}$ может быть записано следующим образом:

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots],$$

т. е. текущий отсчет отклика $y(n)$ определяется не только текущим и предшествующими значениями входной последовательности, но и предшествующими отсчетами отклика. В *нерекурсивных фильтрах* связь между входной последовательностью и откликом имеет вид

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots],$$

т. е. текущий отсчет отклика зависит от текущего и предшествующих значений входной последовательности. В данном и следующем разделах приведено несколько возможных способов построения цифровых фильтров.

Как уже отмечалось, z -преобразование, соответствующее цифровому фильтру, можно выразить в виде дробно-рационального полинома от переменной z^{-1} , т. е.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}, \quad (2.103)$$

причем

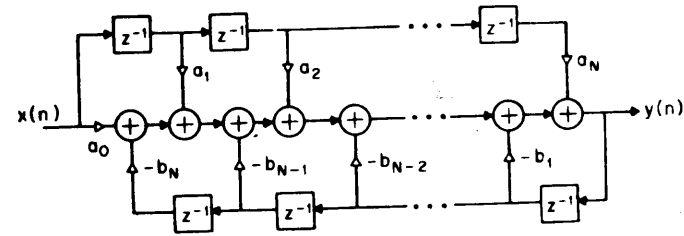
$$b_0 \stackrel{\Delta}{=} 1.$$

(Предполагается, что степени числителя и знаменателя одинаковы.) Приведя равенство (2.103) к общему знаменателю, получим

$$Y(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}, \quad (2.104)$$

или

$$\sum_{i=0}^N b_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} X(z). \quad (2.105)$$



Фиг. 2.18. Прямая форма 1.

Если рассматривать члены вида $z^{-k}Y(z)$ как обратные z -преобразования последовательностей $y(n-k)$, то, взяв обратные z -преобразования обеих частей равенства (2.105), можно получить искомое разностное уравнение

$$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i). \quad (2.106)$$

Поскольку $b_0 = 1$, уравнение (2.106) можно решить относительно $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i). \quad (2.107)$$

Простая структура реализации данного разностного уравнения показана на фиг. 2.18. Она носит название прямой формы 1. В ней для образования цепей, соответствующих числителю и знаменателю формулы (2.103), используются отдельные элементы задержки. Характерными чертами этой структуры являются ее простота и непосредственная связь с z -преобразованием. Однако, как показано в гл. 5, если полюсы $H(z)$ расположены близко друг от друга или от единичной окружности, как это имеет место для частотно-избирательных фильтров, то при использовании фильтров данной структуры возникает трудноразрешимая проблема чувствительности характеристик фильтра к погрешностям коэффициентов. По этой причине в большинстве практических случаев прямую форму 1 стараются не применять.

Если записать формулу (2.103) в несколько ином виде, а именно как

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \right)}_{H_1(z)} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \right)}_{H_2(z)}, \quad (2.108)$$

то можно получить другую структуру цифрового фильтра. Цифровой фильтр, соответствующий формуле (2.108), состоит из двух последовательно соединенных фильтров с коэффициентами передачи соответственно $H_1(z)$ и $H_2(z)$. Первый из фильтров имеет только полюсы, а второй — только нули. Если записать

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \quad (2.109)$$

и

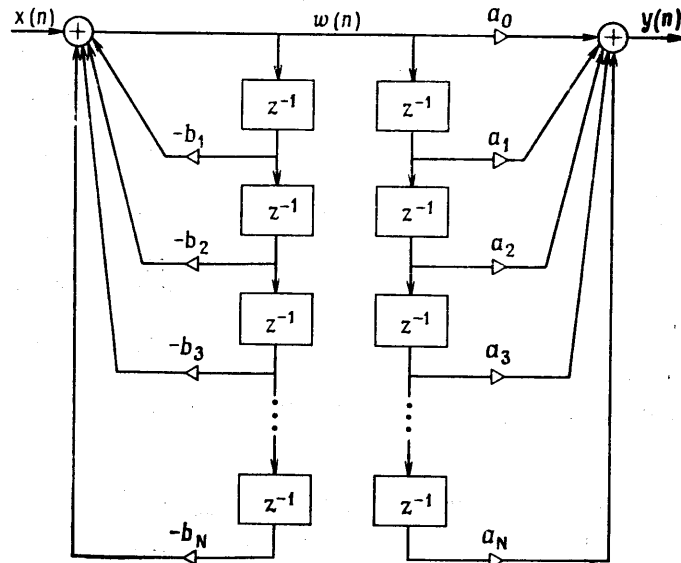
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}, \quad (2.110)$$

то получается пара разностных уравнений (в предположении, что $b_0 = 1$)

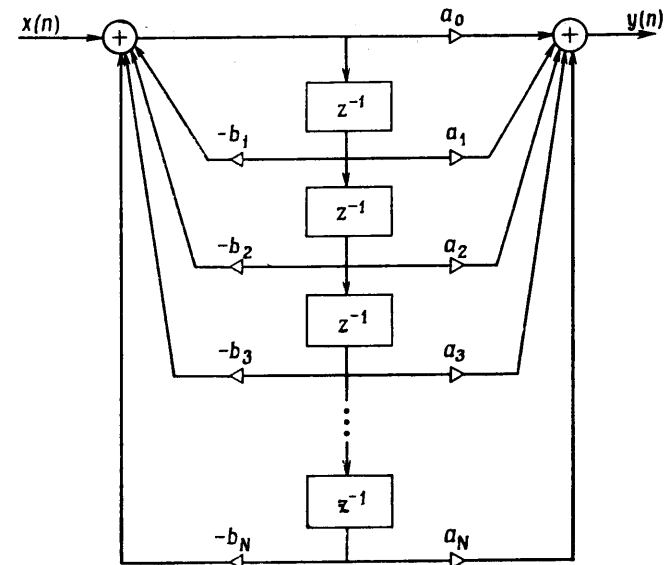
$$w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N b_i w(n-i), \quad (2.111)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i w(n-i), \quad (2.112)$$

которые можно реализовать, как показано на фиг. 2.19. Поскольку в цепях, соответствующих $H_1(z)$ и $H_2(z)$, сигнал $w(n)$ задерживается одинаково, то для построения фильтра достаточно



Фиг. 2.19. Прямая форма 2 (неканоническая).



Фиг. 2.20. Прямая форма 2.

использовать один набор элементов задержки (фиг. 2.20). Такую структуру называют прямой формой 2 или канонической формой, так как в ней используется минимальное количество сумматоров, умножителей и элементов задержки. (Некоторые другие схемы также обладают этим свойством, поэтому называть структуру фиг. 2.20 канонической не рекомендуется.)

Прямая форма 2 имеет такие же достоинства и недостатки, как и прямая форма 1; они будут рассмотрены позднее.

Записав формулу (2.103) в виде

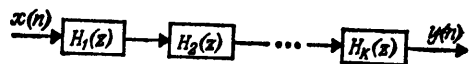
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 \prod_{i=1}^K H_i(z), \quad (2.113)$$

получим третью структуру построения цифрового фильтра. Множители $H_i(z)$ соответствуют либо блокам второго порядка, т. е.

$$H_i(z) = \frac{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}, \quad (2.114)$$

либо блокам первого порядка, т. е.

$$H_i(z) = \frac{1 + a_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1}}, \quad (2.115)$$



Фиг. 2.21. Последовательная (каскадная) форма.

а K равно целой части числа $(N + 1)/2$. Схему, реализующую формулу (2.113), называют каскадной (или последовательной) формой (фиг. 2.21). Каждый из блоков второго порядка, образующих последовательную форму, можно реализовать в прямой форме 1 или в прямой форме 2. Использование блоков второго порядка (и, возможно, одного блока первого порядка) при построении фильтра определяется тем, что для получения комплексного полюса или нуля фильтр с действительными коэффициентами должен включать блок второго порядка. Поскольку не все нули и полюсы комплексные, то некоторые авторы предпочитают описывать последовательную структуру с помощью z -преобразования вида

$$H(z) = a_0 \left[\prod_{i=1}^{K_1} H_{1i}(z) \right] \left[\prod_{i=1}^{K_2} H_{2i}(z) \right], \quad (2.116)$$

где $H_{1i}(z)$ соответствует системе первого порядка, определяемой формулой (2.115), а $H_{2i}(z)$ — системе второго порядка, определяемой равенством (2.114). Величина K_2 равна наибольшему числу комплексных нулей или полюсов, а $K_1 = N - 2K_2$.

При проектировании последовательностей структуры, как правило, бывает трудно решить, какие полюсы с какими нулями нужно объединять в пары. Еще более сложной задачей является выбор последовательности, в которой располагаются отдельные блоки первого и второго порядка. Если, например, передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^5 N_i(z)}{\prod_{i=1}^5 D_i(z)},$$

то одной из возможных последовательных форм является

$$H(z) = \frac{N_1(z)}{D_2(z)} \frac{N_3(z)}{D_5(z)} \frac{N_4(z)}{D_1(z)} \frac{N_5(z)}{D_4(z)} \frac{N_2(z)}{D_3(z)},$$

где в пары объединены N_1 и D_2 , N_3 и D_5 , N_4 и D_1 , N_5 и D_4 , N_2 и D_3 . Эта запись означает, что блок N_1/D_2 включен первым, за ним следуют блоки N_3/D_5 , N_4/D_1 , N_5/D_4 и, наконец, N_2/D_3 . В предположении неограниченной точности представления всех

переменных порядок блоков и способ группирования нулей с полюсами не имеют значения. Однако для реальных устройств эти вопросы имеют весьма важное значение. Более подробно они рассмотрены в гл. 5. Еще одна трудность, связанная с особенностями последовательной формы, состоит в необходимости введения масштабирующих множителей между отдельными блоками. Эти множители не позволяют переменным фильтра принимать слишком большие или слишком малые значения. Вопросы масштабирования также будут рассмотрены в гл. 5.

Четвертую структурную схему цифрового фильтра можно получить, разложив правую часть формулы (2.103) на простые дроби:

$$H(z) = C + \sum_{i=1}^K H_i(z), \quad (2.117)$$

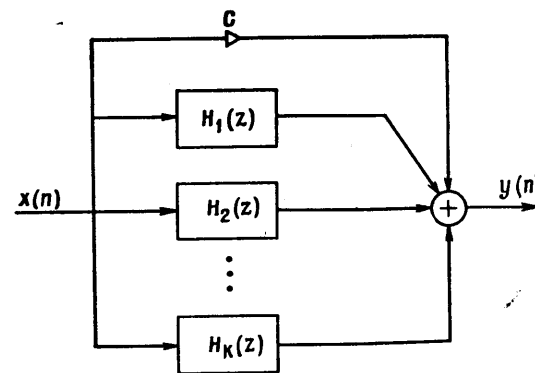
где слагаемые $H_i(z)$ соответствуют или блокам второго порядка

$$H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}, \quad (2.118)$$

или блокам первого порядка

$$H_i(z) = \frac{a_{0i}}{1 + b_{1i}z^{-1}}, \quad (2.119)$$

причем K равно целой части от $(N + 1)/2$, и, как следует из формулы (2.103), $C = a_N/b_N$. На фиг. 2.22 приведена структурная схема, реализующая соотношение (2.117). Ее называют параллельной формой. Блоки первого и второго порядка, описываемые формулами (2.118) и (2.119), строятся по схеме одной из рассмотренных выше прямых форм.



Фиг. 2.22. Параллельная форма.

Хотя рассмотренные структурные схемы фильтров не исчерпывают всех возможных структур, при моделировании на ЦВМ и аппаратной реализации фильтров они применяются наиболее часто. Другие структуры можно получить множеством способов. Так, например, можно построить параллельно-последовательную структуру, в которой часть передаточной функции реализуется в параллельной форме, а остальная часть — в последовательной. Кроме того, для всех рассмотренных структур можно получить обращенные схемы, изменив направление прохождения всех сигналов (т. е. направив все стрелки на схемах в обратную сторону) и поменяв местами точки разветвления с точками суммирования сигналов. Полученные таким образом структуры будут иметь те же передаточные функции, но в них будут по-иному проявляться эффекты конечной разрядности чисел.

Выбор наилучшей из этих многочисленных структурных схем как при аппаратной реализации, так и при моделировании на ЦВМ определяется экономическими соображениями. Последние в свою очередь зависят от свойств структур при ограниченной точности представления переменных и коэффициентов фильтров. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса отнесено в гл. 5.

2.20. Структурные схемы фильтров без полюсов

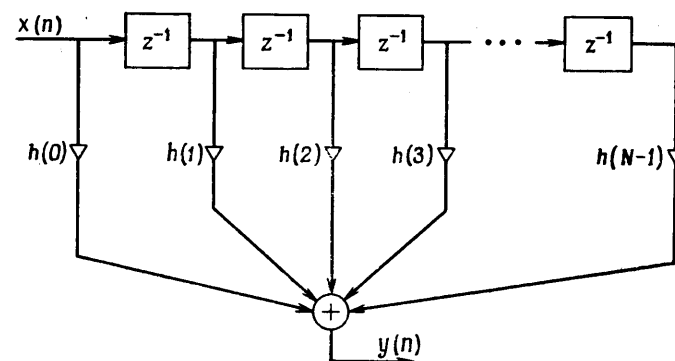
В важном частном случае знаменатель дроби (2.103) может быть постоянным (для простоты приравняем его к единице). При этом разностное уравнение, описывающее систему, становится нерекурсивным, т. е. текущее значение отклика $y(n)$ зависит только от текущего и конечного числа предшествующих значений входной последовательности. В этом случае правую часть (2.103) обычно преобразуют таким образом, чтобы выразить $H(z)$ непосредственно через импульсную характеристику фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}. \quad (2.120)$$

Здесь верхний предел суммирования заменен на $N-1$, чтобы уравнение описывало физически реализуемый фильтр, длина импульсной характеристики которого равна N отсчетам. Разностное уравнение, соответствующее выражению (2.120), имеет вид

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1), \quad (2.121)$$

т. е. является нерекурсивным уравнением. Для построения фильтров с конечными импульсными характеристиками рассматриваемого типа обычно применяют несколько структурных схем. Чаще



Фиг. 2.23. Прямая форма фильтра с конечной импульсной характеристикой.

всего используют прямую форму, описанную в разд. 2.19. Для данного частного случая существует только одна прямая форма (фиг. 2.23). Из-за сходства этой структуры с линией задержки с отводами ее часто называют фильтром с многоотводной линией задержки (или иногда трансверсальным фильтром). Ниже будет показано, что аппаратная реализация структуры, показанной на фиг. 2.23, довольно проста. Для нее требуются только один умножитель, один накапливающий сумматор и два блока циркулирующей памяти на регистрах сдвига.

При построении фильтров, не имеющих полюсов, весьма удобной оказывается и последовательная структура. В этом случае z -преобразование импульсной характеристики фильтра (2.120) представляется в виде произведения z -преобразований, соответствующих системам первого и второго порядка, т. е.

$$H(z) = \prod_{n=1}^{N_M} H_n(z), \quad (2.122)$$

где

$$H_n(z) = a_{0n} + a_{1n}z^{-1} + a_{2n}z^{-2} \text{ (система второго порядка)}$$

или

$$H_n(z) = a_{0n} + a_{1n}z^{-1} \text{ (система первого порядка),}$$

причем N_M равно целой части $(N+1)/2$.

Для построения фильтров без полюсов довольно часто применяют еще несколько структур, которые не имеют аналогов с фильтрами общего вида, содержащими и нули, и полюсы. Наиболее распространенная из них основана на так называемом методе быстрой свертки, когда свертка вычисляется с помощью обратного преобразования Фурье от произведения преобразований Фурье входной

последовательности и импульсной характеристики системы. В последующих разделах этот метод будет рассмотрен более подробно.

Применяя для представления полиномиальной передаточной функции (2.120) классические интерполяционные формулы, можно получить другие структурные схемы реализации этой функции. Например, при использовании интерполяционной формулы Лагранжа

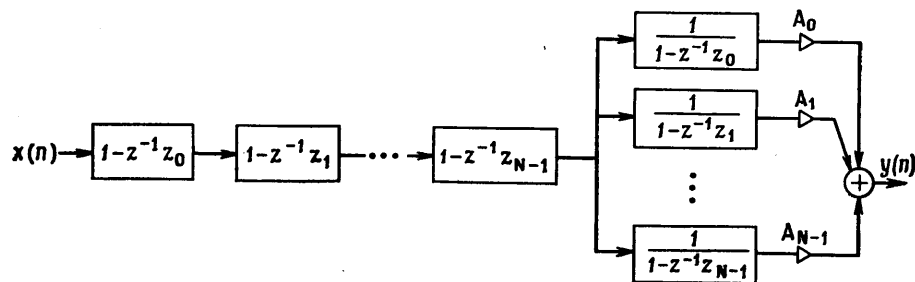
$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z^{-1}z_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{A_m}{1 - z^{-1}z_m}, \quad (2.123)$$

где

$$A_m = \frac{H(z_m)}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}, \quad (2.124)$$

причем массив $\{z_n\}$, $0 \leq n \leq N-1$, образован N произвольными точками на z -плоскости, в которых вычислены значения $H(z_n)$ z -преобразования (2.120), используемые при расчете коэффициентов (2.124). Как следует из формулы (2.123), полученная структура состоит из N последовательно соединенных блоков первого порядка (имеющих нули в точках $z = z_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$), последовательно к которым подключена группа из N параллельно соединенных блоков первого порядка (они имеют полюсы в точках $z = z_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$). Структурная схема, реализующая формулу (2.123), изображена на фиг. 2.24.

Нетрудно показать, что эта структура позволяет реализовать любое z -преобразование вида (2.120). Прежде всего *каждый* из полюсов параллельно соединенных блоков структуры компенсирует один из нулей последовательно соединенных блоков, что дает эквивалентный фильтр с $N-1$ нулями. Далее, значение $H(z)$ в каждой из точек z_n равно заданной величине $H(z_n)$. Так как $H(z)$



Фиг. 2.24. Структурная схема Лагранжа общего вида.

является многочленом $(N-1)$ -й степени, то он полностью определяется своими значениями в N различных точках. Следовательно, выражения (2.123) и (2.120) полностью эквивалентны.

Следует отметить, что с точки зрения числа элементов задержки структура Лагранжа не является канонической, так как в ней используется $2N$ элементов задержки (по N в параллельной и последовательной частях структуры). Важность данной и аналогичных структур определяется теми частными случаями, в которых они применяются (см. ниже). При изучении чувствительности характеристик структуры фиг. 2.24 к ограничению точности представления коэффициентов фильтра выявляются ее дополнительные преимущества.

Важным является частный случай структуры Лагранжа, когда последовательность z_n состоит из точек, равномерно распределенных по единичной окружности, т. е.

$$z_n = e^{j(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.125)$$

При этом член правой части (2.123), содержащий произведения, имеет вид

$$\prod_{n=0}^{N-1} [1 - z^{-1}e^{j(2\pi/N)n}] = (1 - z^{-N}), \quad (2.126)$$

а равенство (2.124) превращается в

$$A_m = \frac{1}{N} \{H[e^{j(2\pi/N)m}]\}. \quad (2.127)$$

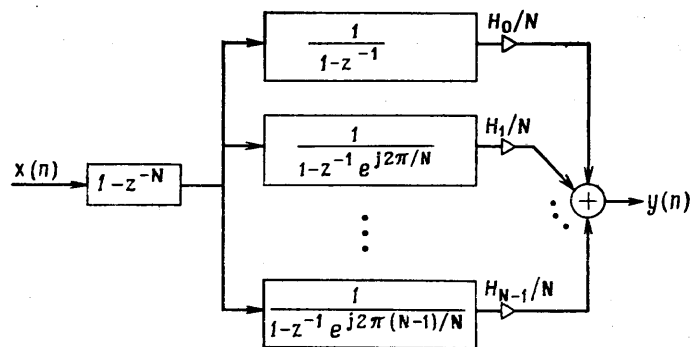
Справедливость соотношения (2.126) подтверждается тем, что корни уравнения $z^{-N} = 1$ совпадают с N главными значениями корня N -й степени из единицы, т. е. с числами, выбранными согласно условию (2.125). Равенство (2.127) получается путем подстановки условия (2.125) в формулу (2.124), что дает

$$\begin{aligned} A_m &= H(z_m) \lim_{z \rightarrow z_m} \left[\frac{1 - z^{-1}z_m}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z^{-1}z_n)} \right] = \\ &= H(z_m) \lim_{z \rightarrow z_m} \left(\frac{1 - z^{-1}z_m}{1 - z^{-N}} \right) = \frac{H(z_m)}{N}. \end{aligned}$$

Получаемая при условии (2.125) структурная схема фильтра (фиг. 2.25) описывается z -преобразованием

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[e^{j(2\pi/N)n}]}{1 - z^{-1}e^{j(2\pi/N)n}}. \quad (2.128)$$

Она называется структурой на основе частотной выборки, поскольку коэффициенты фильтра равны отсчетам передаточной функции



Фиг. 2.25. Структура фильтра с частотной выборкой.

фильтра $[H(e^{j\omega})]$, взятым в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности.

Структура с частотной выборкой имеет несколько интересных свойств. Так, при выполнении в параллельной части структуры арифметических операций с конечной точностью полностью скомпенсировать нули, сгруппированные в (2.128) в члене $(1 - z^{-N})$, с помощью полюсов не удается. Поэтому в итоге фильтр будет иметь и нули, и полюсы, а длина его импульсной характеристики станет неограниченной. Значение данной структуры состоит в том, что она позволяет весьма эффективно создавать фильтры, у которых большинство коэффициентов для умножителей $\{H[e^{j(2\pi/N)n}]\}$ равно нулю. Цепи, для которых $\{H[e^{j(2\pi/N)n}]\} = 0$, можно отбросить. Так, например, для узкополосного фильтра, у которого отличны от нуля лишь несколько коэффициентов, структура оказывается весьма эффективной. В ней для получения одного выходного отсчета достаточно выполнить небольшое число умножений.

Применяя другие интерполяционные формулы, можно получить и другие структуры фильтров без полюсов. Так, например, можно получить структуры Ньютона, Эрмита, Тэйлора и т. д. Поскольку преимущества и недостатки таких структур изучены еще недостаточно, в настоящей книге они рассматриваться не будут.

2.21. Дискретное преобразование Фурье

Выше было рассмотрено несколько методов описания последовательностей или дискретных систем. К ним относятся дискретная свертка, преобразование Фурье и z -преобразование. В тех случаях, когда последовательность периодична (а также, как будет показано, когда она имеет конечную длительность), ее можно

представить рядом Фурье. Итак, рассмотрим периодическую¹⁾ последовательность $x_p(n)$ с периодом в N отсчетов. Ее можно записать следующим образом:

$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}, \quad (2.129)$$

причем частоты спектральных составляющих, образующих $x_p(n)$, могут принимать только значения $\omega_k = 2\pi k/N$, $-\infty < k < \infty$, поскольку периоды других частот не кратны N . В равенстве (2.129) коэффициенты $X_p(k)$ представляют амплитуды синусоид с частотами ω_k . Запись вида (2.129) избыточна вследствие периодичности функции $e^{j\omega}$, так как комплексные экспоненты с частотами $\omega_k = 2\pi k/N$ и $\omega_{k \pm mN} = (2\pi/N)(k \pm mN)$, $0 < m < \infty$, не отличаются друг от друга, т. е.

$$e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)(k \pm mN)n}, \quad 0 < m < \infty. \quad (2.130)$$

Следовательно, равенство (2.129) можно переписать в виде

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}, \quad (2.131)$$

подчеркивающим наличие всего N различных комплексных экспонент с периодом в N отсчетов. Для удобства перепишем равенство (2.131) в общепринятом виде

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}, \quad (2.132)$$

где деление на N не изменяет способа представления. Чтобы выразить коэффициенты $X_p(k)$ через $x_p(n)$, умножим обе части равенства (2.132) на $e^{-j(2\pi/N)mn}$ и просуммируем результаты по n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)mn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)n(k-m)}. \quad (2.133)$$

Меняя в правой части (2.133) порядок суммирования и используя формулу

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)n(k-m)} = \begin{cases} N & \text{при } k=m, \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad (2.134)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) u_0(k-m) \quad (2.135)$$

¹⁾ Все периодические последовательности отмечены индексом p .

или [после перестановки левой и правой частей равенства (2.135) и замены индекса m на k]

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nh}. \quad (2.136)$$

Соотношение (2.136) носит название дискретного преобразования Фурье (ДПФ), а (2.132) — обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ).

Из определений (2.132) и (2.136) видно, что обе последовательности $x_p(n)$ и $X_p(k)$ периодичны с периодом в N отсчетов. Ясно также [см. (2.136)], что $X_p(k)$ полностью определяются одним периодом $x_p(n)$. Отсюда возникает интересный вопрос: как связаны z -преобразование конечной последовательности, образованной из одного периода периодической последовательности, и ДПФ всей периодической последовательности? Иначе говоря, рассмотрим последовательность конечной длины

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases} \quad (2.137)$$

причем последовательность $x_p(n)$ имеет период в N отсчетов, т. е. $x(n)$ представляет собой один период периодической последовательности $x_p(n)$. z -преобразование $x(n)$ равно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}. \quad (2.138)$$

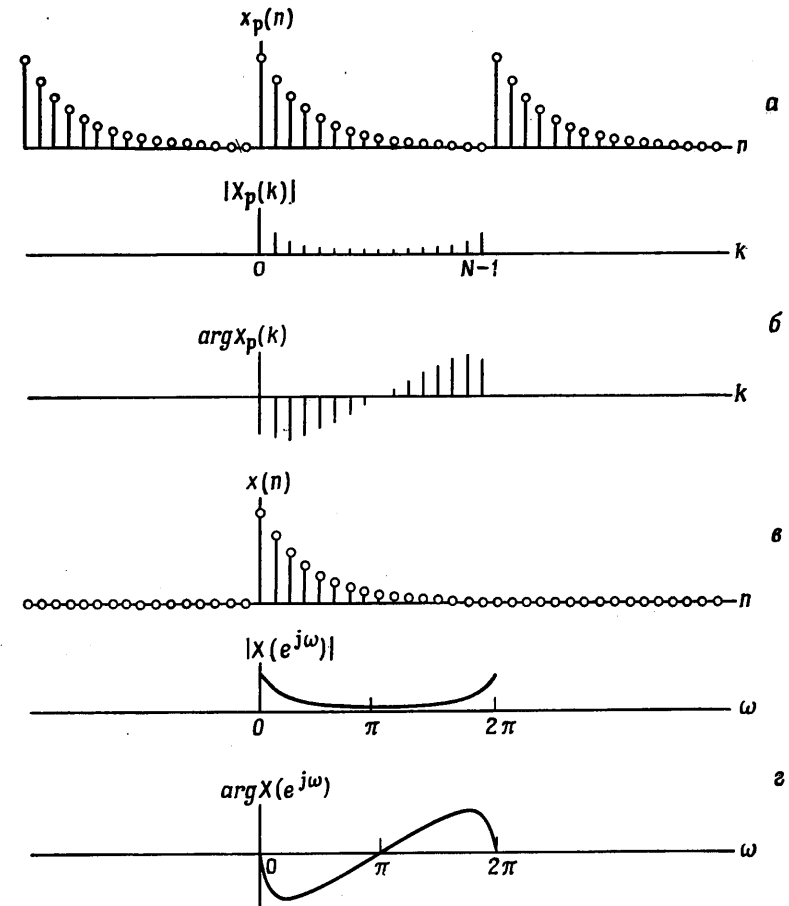
Вычисляя сумму (2.138) при $z = e^{j(2\pi/N)h}$, т. е. в точке на единичной окружности с полярным углом $2\pi k/N$, находим

$$X(z)|_{z=e^{j(2\pi/N)h}} = X[e^{j(2\pi/N)h}] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nh}. \quad (2.139)$$

Сравнивая суммы (2.139) и (2.136) и учитывая, что $x_p(n) = x(n)$ на интервале $0 \leq n \leq N-1$, получаем

$$X_p(k) = X[e^{j(2\pi/N)h}]. \quad (2.140)$$

Итак, коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины равны значениям z -преобразования этой же последовательности в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Еще более важный вывод состоит в том, что коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины однозначно представляют саму последовательность, так как по ним можно точно восстановить исходную последовательность, используя обратное ДПФ. Итак, хотя ДПФ и ОДПФ вводятся для периодических последовательностей, важно, что через них можно представлять последовательности конечной длины.



Фиг. 2.26. Последовательности, иллюстрирующие свойства ДПФ.

Для иллюстрации приведенных положений рассмотрим периодическую последовательность (фиг. 2.26, а) с периодом N , определяемую как

$$x_p(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$x_p(n + mN) = x_p(n), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Согласно определению (2.136), ее ДПФ равно

$$\begin{aligned} X_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j(2\pi/N)nh} = \sum_{n=0}^{N-1} [ae^{-j(2\pi/N)h}]^n = \\ &= \frac{1 - a^N}{1 - ae^{-j(2\pi/N)h}}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

Модули и фазы элементов последовательности $X_p(k)$ для случая $a = 0,9$ и $N = 16$ изображены на фиг. 2.26, б. Последовательность конечной длины $x(n)$ (фиг. 2.26, в) определяется как

$$x(n) = \begin{cases} a^n & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases}$$

т. е. она состоит из одного периода последовательности $x_p(n)$. Ее z -преобразование равно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}.$$

Вычисляя значения $X(z)$ на единичной окружности, получим

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^N e^{-j\omega N}}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Модуль и фаза полученной функции для $0 \leq \omega \leq 2\pi$ изображены на фиг. 2.26, г. Ясно, что значения $X_p(k)$ и $X(e^{j2\pi k/N})$ в точках $\omega = 2\pi k/N$ совпадают.

Поскольку ДПФ однозначно представляет последовательность конечной длины, появляется возможность найти ее z -преобразование через коэффициенты ДПФ этой последовательности. Из соотношений (2.137), (2.132) и определения z -преобразования получаем

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)nk} z^{-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)h} z^{-1}]^n = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \left[\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j(2\pi/N)h}} \right]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Равенство (2.141) показывает, что z -преобразование последовательности непосредственно связано с коэффициентами ее ДПФ. Для точек на единичной окружности равенство (2.141) принимает вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \frac{e^{-j\omega[(N-1)/2] \sin(\omega N/2)}}{e^{j(\pi k/N)} \sin(\omega/2 - \pi k/N)}, \quad (2.142)$$

где функции вида $\sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2 - \pi k/N)$ интерполируют значения коэффициентов ДПФ $X_p(k)$ на всю ось частот. Следовательно, с помощью формулы (2.142) по коэффициентам ДПФ

последовательности конечной длины можно найти ее непрерывный частотный спектр.

Представление конечных последовательностей с помощью ДПФ удобно также для получения значений преобразования Фурье в L точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Для получения требуемого частотного разрешения L может быть выбрано значительно большим, чем N . Рассмотрим конечную последовательность $\{x(n), 0 \leq n \leq N-1\}$ с преобразованием Фурье

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}. \quad (2.143)$$

Вычисляя $X(e^{j\omega})$ на частотах $\omega_l = (2\pi/L)l$, $l = 0, 1, \dots, L-1$, получим

$$X[e^{j(2\pi/N)l}] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/L)ln}. \quad (2.144)$$

Введем новую последовательность $\hat{x}(n)$ длины L точек ($L > N$):

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq L-1, \end{cases} \quad (2.145)$$

и найдем ее L -точечное ДПФ:

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \hat{x}(n) e^{-j(2\pi/L)kn}. \quad (2.146)$$

Поскольку $\hat{x}(n) = 0$ при $n \geq N$, равенство (2.146) можно записать в виде

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/L)kn}. \quad (2.147)$$

Сравнивая (2.147) и (2.144), получим

$$\hat{X}(k) = X[e^{j(2\pi/L)k}]. \quad (2.148)$$

Таким образом, простое дополнение последовательности конечной длины нулевыми отсчетами позволяет достичь любого разрешения¹⁾ при расчете преобразования Фурье этой последовательности для совокупности точек, равномерно распределенных по единичной окружности. При спектральном анализе конечных последовательностей эта несложная операция является одной из наиболее полезных.

¹⁾ Частотное разрешение зависит только от длительности сигнала N . Выбор $L > N$ лишь улучшает условия различения синусоидальных компонент. — Прим. ред.

Итак, мы показали, что ДПФ однозначно представляет последовательность конечной длины, содержащую N элементов, причем коэффициенты ДПФ равны значениям z -преобразования последовательности в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Аналогично z -преобразование любой (в том числе и бесконечной) последовательности однозначно представляет эту последовательность. Было также показано, что дискретизация во временной области приводит к наложению в частотной области. Покажем теперь, что дискретизация в частотной области также приводит к наложению во временной области. Рассмотрим сначала, какая получится последовательность, если в качестве коэффициентов ДПФ взять значения произвольного z -преобразования, вычисленного в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Для большей ясности предположим, что последовательность $h(n)$ (не обязательно конечная) имеет z -преобразование

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}. \quad (2.149)$$

Определим набор коэффициентов ДПФ как

$$H_p(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (2.150)$$

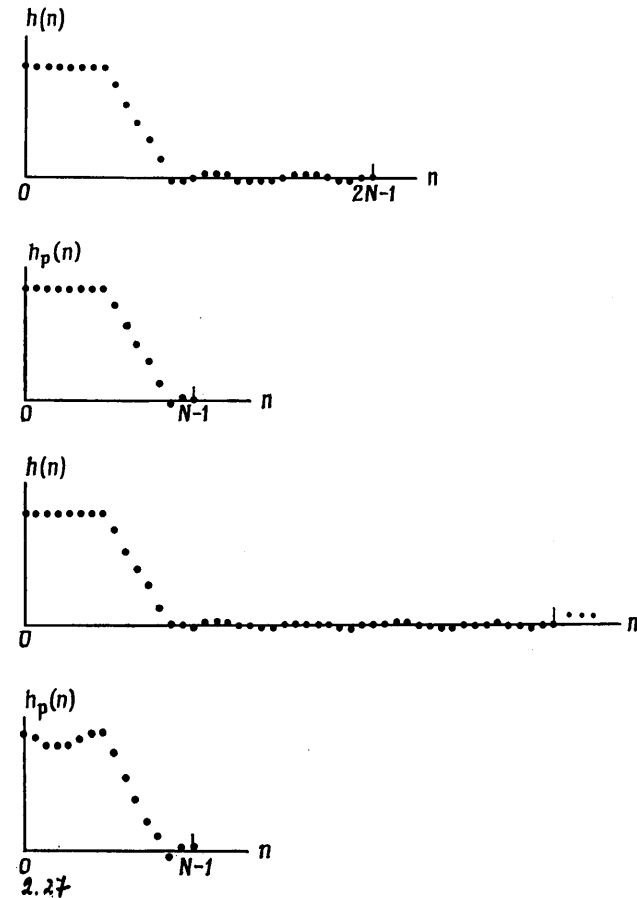
По этим коэффициентам можно найти периодическую последовательность $h_p(n)$, равную

$$h_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_p(k) e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (2.151)$$

Подставляя значения коэффициентов (2.150) в формулу (2.151) и заменяя индекс суммирования на m , получим

$$\begin{aligned} h_p(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j(2\pi/N)mk} \right] e^{j(2\pi/N)nk} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)k(m-n)} \right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} u_0(m-n+rN), \\ h_p(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n-rN). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Соотношение (2.152) является весьма важным. Оно показывает, что периодическая последовательность, получаемая из обратного



Фиг. 2.27. Две последовательности $h(n)$ и соответствующие им эквивалентные периодические последовательности.

ДПФ набора значений z -преобразования непериодической последовательности, вычисленных в N точках, которые равномерно распределены по единичной окружности, состоит из сдвинутых и наложенных копий исходной непериодической последовательности. Если длина последовательности $h(n)$ не превышает N отсчетов, то наложение в $h_p(n)$ фактически отсутствует. Равенство (2.152) также показывает, что искажения, связанные с наложением, которые возникают при описании бесконечной последовательности конечным числом N коэффициентов ДПФ, уменьшаются при увеличении N . На фиг. 2.27 изображены две последовательности

$h(n)$ и соответствующие им N -точечные периодические эквиваленты. В первом примере длина последовательности $h(n)$ близка к N , поэтому $h_p(n)$ повторяет ее почти без искажений. Во втором примере длина $h(n)$ значительно больше N , поэтому периодическая последовательность заметно отличается от исходной.

2.22. Свойства ДПФ

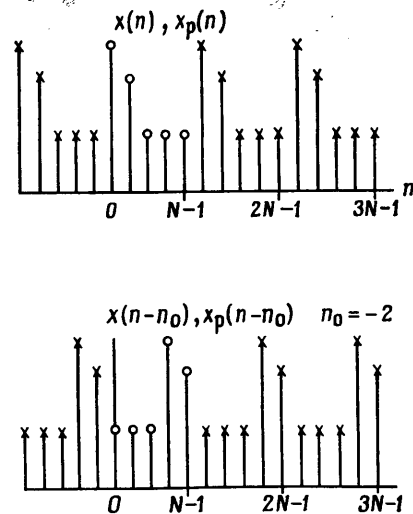
Некоторые свойства ДПФ играют в практических вопросах обработки сигналов важную роль. Ниже они будут в основном перечислены, детали будут рассмотрены только в случае необходимости.

1. Линейность

Если $x_p(n)$ и $y_p(n)$ — периодические последовательности (с периодом в N отсчетов каждая), а $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ — их ДПФ, то дискретное преобразование Фурье последовательности $x_p(n) + y_p(n)$ равно $X_p(k) + Y_p(k)$. Это положение справедливо и для последовательностей конечной длины.

2. Сдвиг

Если последовательность $x_p(n)$ периодическая с периодом в N отсчетов, а ее ДПФ равно $X_p(k)$, то ДПФ периодической последовательности вида $x_p(n - n_0)$ будет равно $X_p(k) e^{-j(2\pi/N)n_0k}$.



Фиг. 2.28. К определению ДПФ сдвинутой последовательности.

При анализе последовательностей конечной длины необходимо учитывать специфический характер временного сдвига последовательности. Так, на фиг. 2.28, а изображена конечная последовательность $x(n)$ длиной в N отсчетов. Там же крестиками изображены отсчеты эквивалентной периодической последовательности $x_p(n)$, имеющей то же ДПФ, что и $x(n)$. Чтобы найти ДПФ сдвинутой последовательности $x(n - n_0)$, причем $n_0 < N$, следует рассмотреть сдвинутую периодическую последовательность $x_p(n - n_0)$ и в качестве эквивалентной сдвинутой конечной последовательности (имеющей ДПФ $X(k) e^{-j(2\pi/N)n_0k}$) принять отрезок последовательности $x_p(n - n_0)$ в интервале $0 \leq n \leq N - 1$. Таким образом, с точки зрения ДПФ последовательность $x(n - n_0)$ получается путем *кругового сдвига* элементов последовательности $x(n)$ на n_0 отсчетов.

3. Свойства симметрии

Если периодическая последовательность $x_p(n)$ с периодом в N отсчетов является действительной, то ее ДПФ $X_p(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [X_p(k)] &= \operatorname{Re} [X_p(N - k)], \\ \operatorname{Im} [X_p(k)] &= -\operatorname{Im} [X_p(N - k)], \\ |X_p(k)| &= |X_p(N - k)|, \\ \arg X_p(k) &= -\arg X_p(N - k). \end{aligned} \quad (2.153)$$

Аналогичные равенства справедливы и для конечной действительной последовательности $x(n)$, имеющей N -точечное ДПФ $X(k)$. Если ввести дополнительное условие симметрии последовательности $x_p(n)$, т. е. считать, что

$$x_p(n) = x_p(N - n), \quad (2.154)$$

то окажется, что $X_p(k)$ может быть только действительной.

Поскольку чаще всего приходится иметь дело с действительными последовательностями, то, вычислив одно ДПФ, можно получить ДПФ двух последовательностей, используя свойства симметрии (2.153). Рассмотрим действительные периодические последовательности $x_p(n)$ и $y_p(n)$ с периодами в N отсчетов и N -точечными ДПФ $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ соответственно. Введем комплексную последовательность $z_p(n)$ вида

$$z_p(n) = x_p(n) + jy_p(n). \quad (2.155)$$

Ее ДПФ равно

$$Z_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_p(n) + jy_p(n)] e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad (2.156)$$

$$Z_p(k) = X_p(k) + jY_p(k). \quad (2.157)$$

Выделяя действительную и мнимую части равенства (2.157), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Z_p(k)] &= \operatorname{Re}[X_p(k)] - \operatorname{Im}[Y_p(k)], \\ \operatorname{Im}[Z_p(k)] &= \operatorname{Im}[X_p(k)] + \operatorname{Re}[Y_p(k)]. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Действительные части $X_p(k)$ и $Y_p(k)$ симметричны, а мнимые — антисимметричны, поэтому их легко разделить, используя операции сложения и вычитания:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_p(k)] &= \frac{\operatorname{Re}[Z_p(k)] + \operatorname{Re}[Z_p(N-k)]}{2}, \\ \operatorname{Im}[Y_p(k)] &= \frac{\operatorname{Re}[Z_p(N-k)] - \operatorname{Re}[Z_p(k)]}{2}, \\ \operatorname{Re}[Y_p(k)] &= \frac{\operatorname{Im}[Z_p(k)] + \operatorname{Im}[Z_p(N-k)]}{2}, \\ \operatorname{Im}[X_p(k)] &= \frac{\operatorname{Im}[Z_p(k)] - \operatorname{Im}[Z_p(N-k)]}{2}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Итак, вычисляя одно N -точечное ДПФ, удается преобразовать сразу две действительные последовательности длиной по N отсчетов. Если эти последовательности являются еще и симметричными, то число операций, необходимых для получения их ДПФ, можно сократить еще больше.

2.23. Свертка последовательностей

Если $x_p(n)$ и $h_p(n)$ — две периодические последовательности с периодами по N отсчетов и ДПФ, равными

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad (2.160)$$

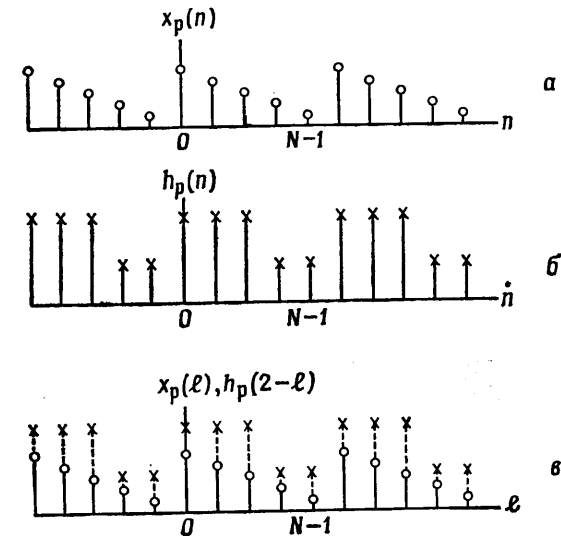
$$H_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad (2.161)$$

то N -точечное ДПФ последовательности $y_p(n)$, являющейся круговой (или периодической) сверткой последовательностей $x_p(n)$ и $h_p(n)$, т. е.

$$y_p(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l), \quad (2.162)$$

равно

$$Y_p(k) = H_p(k) X_p(k). \quad (2.163)$$



Фиг. 2.29. Круговая (периодическая) свертка.

Поскольку из формулы (2.163) получаются важные следствия, ниже показано, как она выводится. Сначала необходимо разъяснить понятие круговой свертки. На фиг. 2.29, а, б изображены периодические последовательности $x_p(n)$ и $h_p(n)$, а на фиг. 2.29, в показано, как вычисляется значение круговой свертки (2.162) при $n=2$. В силу периодичности последовательностей $x_p(l)$ и $h_p(n-l)$ достаточно рассматривать их на интервале $0 \leq l \leq N-1$. С изменением n последовательность $h_p(n-l)$ смещается относительно $x_p(l)$. Когда отсчет $h_p(n-l)$ выходит за точку $l=N-1$, точно такой же отсчет появляется в точке $l=0$. Поэтому *круговая свертка* определяет свертку двух последовательностей, заданных на окружности.

Формулу (2.163) можно получить, найдя N -точечное ДПФ правой части (2.162), т. е.

$$\begin{aligned} Y_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l) \right] e^{-j(2\pi/N)nk} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{N-1} h_p(n-l) e^{-j(2\pi/N)(n-l)k} \right]}_{H_p(k)} e^{-j(2\pi/N)lk} = \\ &= H_p(k) \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) e^{-j(2\pi/N)lk}}_{X_p(k)} = H_p(k) X_p(k). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Полученная формула справедлива и для конечных последовательностей, если рассматривать $x_p(k)$ и $h_p(k)$ как эквивалентные им периодические последовательности с теми же ДПФ. Однако для конечных последовательностей обычно нужна линейная (ее называют аперiodической), а не круговая свертка, поэтому в приведенные формулы следует внести уточнения.

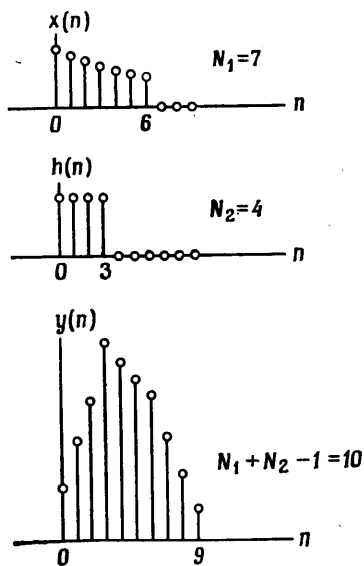
2.24. Линейная свертка конечных последовательностей

Рассмотрим две конечные последовательности $x(n)$ и $h(n)$ длины по N_1 и N_2 отсчетов, т. е. $x(n)$ отлична от нуля при $0 \leq n \leq N_1 - 1$, а $h(n)$ — при $0 \leq n \leq N_2 - 1$. *Линейной или аперiodической сверткой* этих последовательностей называют последовательность $y(n)$, определяемую соотношением

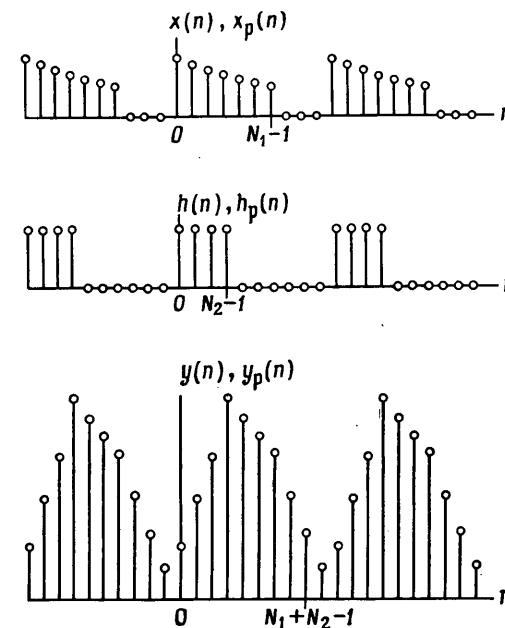
$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m), \quad (2.165)$$

где $h(m)$ и $x(n-m)$ равны нулю вне соответствующих интервалов. На фиг. 2.30 приведены примеры последовательностей $x(n)$, $h(n)$ и $y(n)$. Ясно, что последовательность $y(n)$ является конечной и имеет длину $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчетов.

Выше было показано, что, перемножая ДПФ двух конечных последовательностей и находя обратное ДПФ произведения, получаем такой же результат, как при круговой свертке эквивалентных периодических последовательностей, образованных из данных конечных последовательностей. Исходя из этого (см. также пример на фиг. 2.29), можно довольно просто получить линейную свертку двух конечных последовательностей. Свертка периодических последовательностей периодична и имеет тот же период, что и сами последовательности. Поскольку период свертки $y(n)$ (фиг. 2.30) равен $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчетам, то для получения такого периода при круговой свертке необходимо, чтобы $x(n)$ и $h(n)$ содержали по $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчетов, что достигается дополнением каждой из двух последовательностей соответствующим числом нулевых отсчетов. После этого можно найти $(N_1 + N_2 - 1)$ -точечные ДПФ дополненных последовательностей,



Фиг. 2.30. Линейная (аперiodическая) свертка.



Фиг. 2.31. Вычисление линейной свертки с помощью круговой свертки.

перемножить их и выполнить обратное ДПФ произведения. В результате получается искомая свертка $y(n)$. На фиг. 2.31, иллюстрирующей эти операции, изображены эквивалентные периодические последовательности, используемые при вычислении круговой свертки. Ясно, что дополнение исходных последовательностей конечной длины $x(n)$ и $h(n)$ нулевыми отсчетами доводит период до нужной величины и позволяет устранить круговые наложения, характерные для круговой свертки. В результате каждый период последовательности $y_p(n)$ (фиг. 2.31) совпадает с $y(n)$ (фиг. 2.30). Рассмотренный метод вычисления свертки двух конечных последовательностей с применением алгоритма ДПФ называется быстрой сверткой в противоположность методу прямого вычисления суммы (2.165), называемому прямой или медленной сверткой. Термин «быстрая» применяется потому, что ДПФ можно вычислить быстро и эффективно, используя один из алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Можно показать, что даже при умеренных величинах $(N_1 + N_2 - 1)$ (например, порядка 30) быстрая свертка оказывается эффективнее прямой. Поэтому рассмотренная методика является важным вычислительным средством при обработке сигналов.

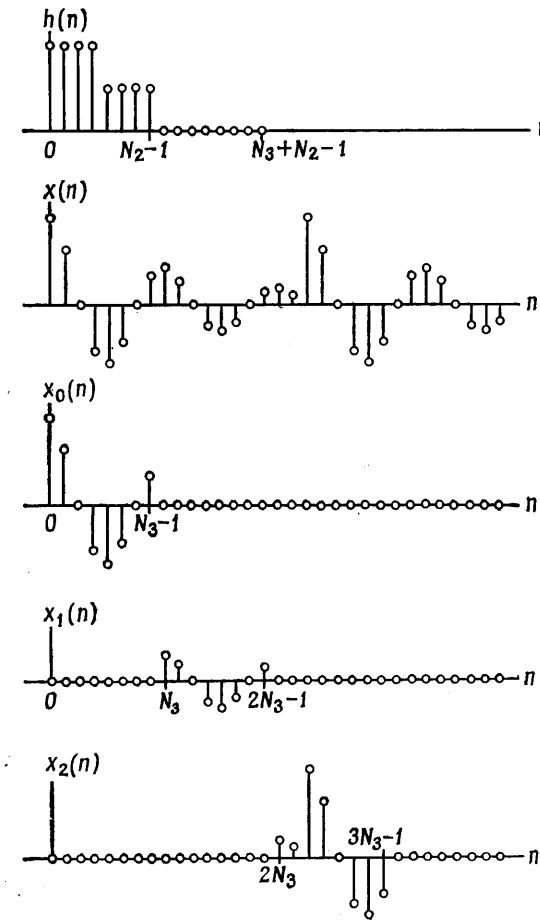
Для практических приложений важно отметить, что в рассмотренном выше примере размер ДПФ не обязательно ограничивать величиной $(N_1 + N_2 - 1)$. ДПФ можно выполнять по любому числу отсчетов L , удовлетворяющему условию $L \geq N_1 + N_2 - 1$. Если это условие удовлетворяется, то в отличие от вышеописанной методики последовательности $x(n)$ и $h(n)$ дополняются другим числом нулевых отсчетов. В результате эквивалентная периодическая последовательность $y_p(n)$ будет иметь в конце периодов $(L - N_1 - N_2 + 1)$ нулей. Ясно, что эти отличия никак не искажают желаемого результата. Возможность произвольного выбора L существенна, поскольку практические алгоритмы вычисления ДПФ при разных L имеют неодинаковую эффективность. Так, например, для некоторых алгоритмов необходимо, чтобы L равнялось степени 2. В этом случае в качестве L приходится выбирать число, равное степени 2 и не меньшее чем $N_1 + N_2 - 1$.

2.25. Секционированные свертки

Во многих практических задачах необходимо вычислять свертку двух конечных последовательностей, когда одна из них гораздо длиннее другой (скажем, $N_1 \gg N_2$ или $N_2 \gg N_1$). Конечно, всегда можно выбрать L равным $(N_1 + N_2 - 1)$, но такой подход неэффективен и по ряду причин неудобен. Во-первых, перед вычислением свертки нужно иметь всю более длинную последовательность. На практике, например в радиолокации или при обработке речевых сигналов, это условие не всегда выполнимо. Во-вторых, поскольку обработка начинается только после приема всей последовательности, то результат получается с большой задержкой. И наконец, при слишком больших $(N_1 + N_2 - 1)$ вычисление ДПФ значительно усложняется, так как для этого требуется большой объем памяти и возникают некоторые другие, чисто практические трудности, связанные с алгоритмами БПФ. От перечисленных недостатков свободны следующие два метода вычисления свертки. Они основаны на разбиении более длинной последовательности на секции и вычислении частичных свертки, из которых затем формируется искомая выходная последовательность.

Первый из них называется методом перекрытия с суммированием. Сущность этого метода иллюстрируется на фиг. 2.32. Для простоты положим, что последовательность $x(n)$ не ограничена, а $h(n)$ содержит N_2 отсчетов. Разделим последовательность $x(n)$ на смежные секции длиной по N_3 отсчетов (фиг. 2.32). Выбор N_3 довольно сложен, но хорошие результаты получаются, если N_3 является величиной того же порядка, что и N_2 . Итак, входная последовательность $x(n)$ представляется в виде

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n), \quad (2.166)$$



Фиг. 2.32. Метод перекрытия с суммированием.

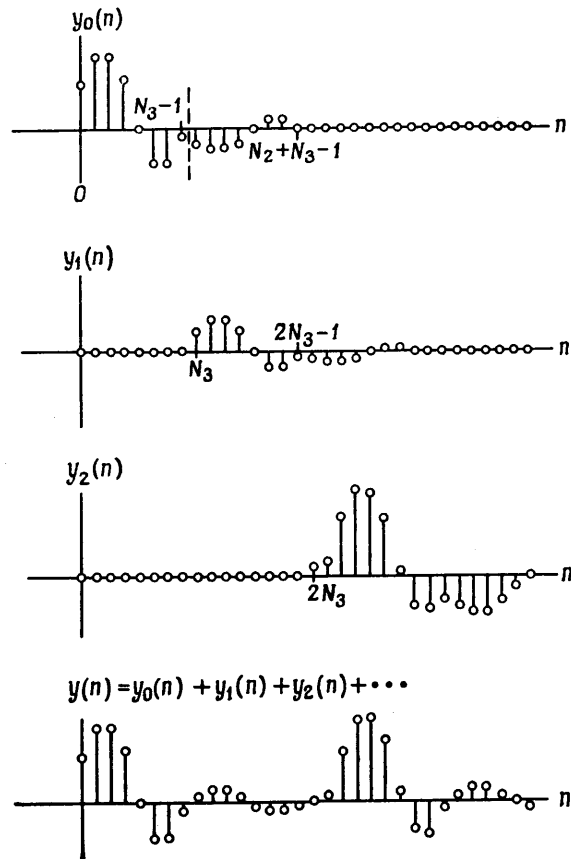
где

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n) & \text{при } kN_3 \leq n \leq (k+1)N_3 - 1, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (2.167)$$

Линейная свертка последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ равна

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m) \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n-m) = \quad (2.168)$$

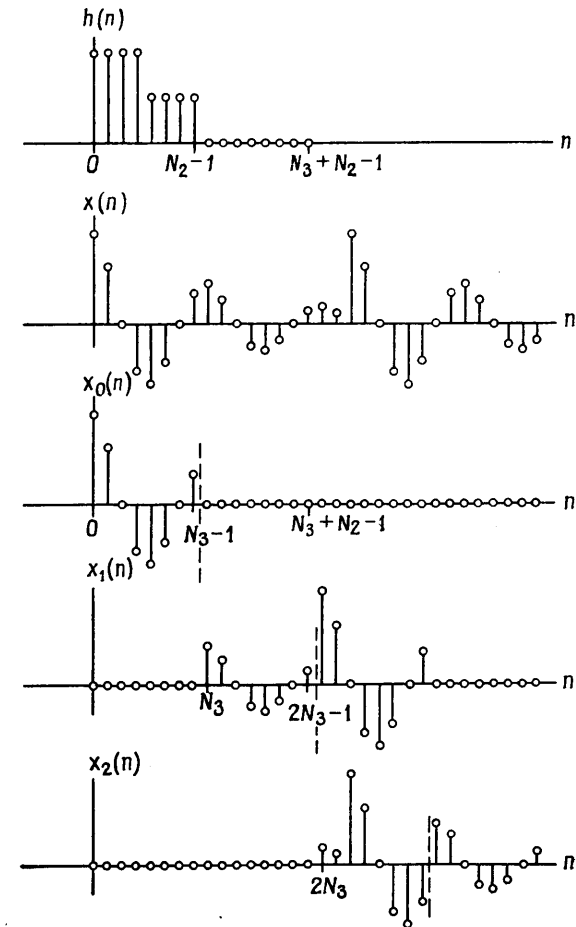
$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n). \quad (2.169)$$



Фиг. 2.33. Формирование выходных значений свертки при использовании метода перекрытия с суммированием.

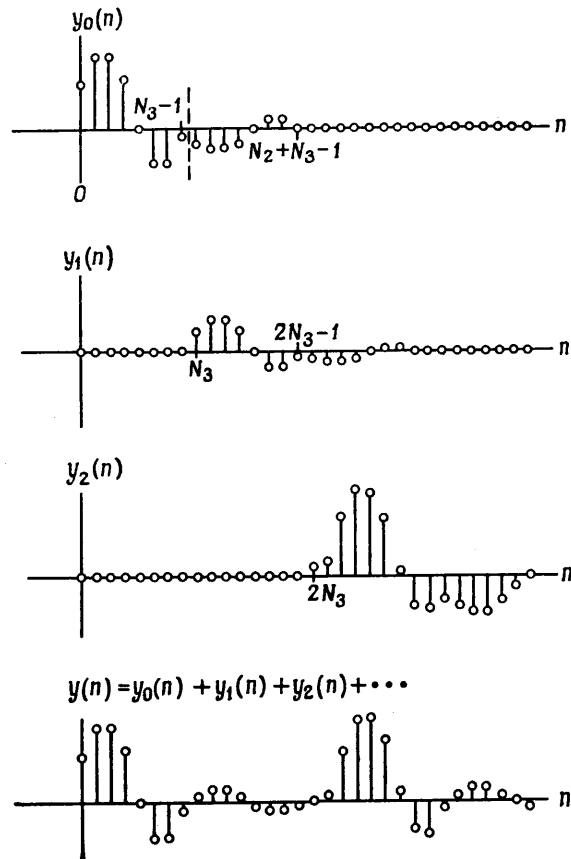
Длина каждой из частичных свертки в сумме (2.169) равна $(N_3 + N_2 - 1)$ отсчетам, т. е. имеется участок длиной в $(N_2 - 1)$ отсчетов, на котором k -я и $(k + 1)$ -я частичные свертки перекрываются, поэтому их отсчеты на участке перекрытия нужно сложить. На фиг. 2.33 показано, как расположены и как суммируются соседние частичные свертки $y_k(n)$. Каждая из них вычисляется методом быстрой свертки, описанным в разд. 2.24. Рассмотренный метод был назван методом перекрытия с суммированием именно потому, что промежуточные частичные свертки перекрываются и для получения конечного результата их необходимо сложить.

Другой метод вычисления линейной свертки последовательностей, одна из которых значительно длиннее другой, также основан



Фиг. 2.34. Метод перекрытия с накоплением.

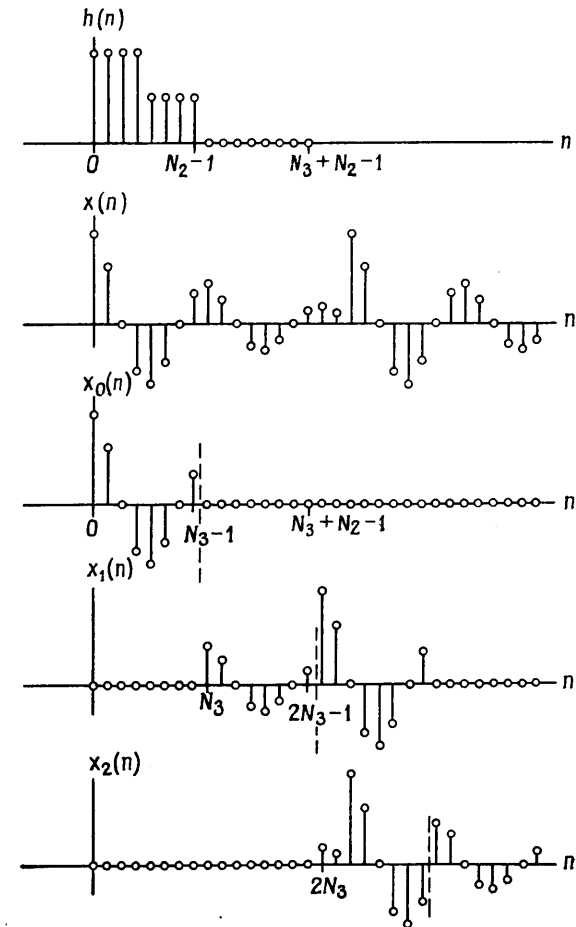
на секционировании более длинной последовательности. Его называют методом перекрытия с накоплением, причем в данном случае перекрываются входные, а не выходные секции. Ошибочные отсчеты круговых свертки отдельных секций отбрасываются. Остальные отсчеты накапливаются и из них формируется конечный результат. Рассмотрим конкретный пример (фиг. 2.34). Последовательность $h(n)$ содержит N_2 отсчетов, а последовательность $x(n)$ разделена на секции $x_k(n)$ длиной по $(N_3 + N_2 - 1)$ отсчетов, перекрывающиеся друг с другом на участках длиной по $(N_2 - 1)$ отсчетов. (Отметим, что участок перекрытия



Фиг. 2.33. Формирование выходных значений свертки при использовании метода перекрытия с суммированием.

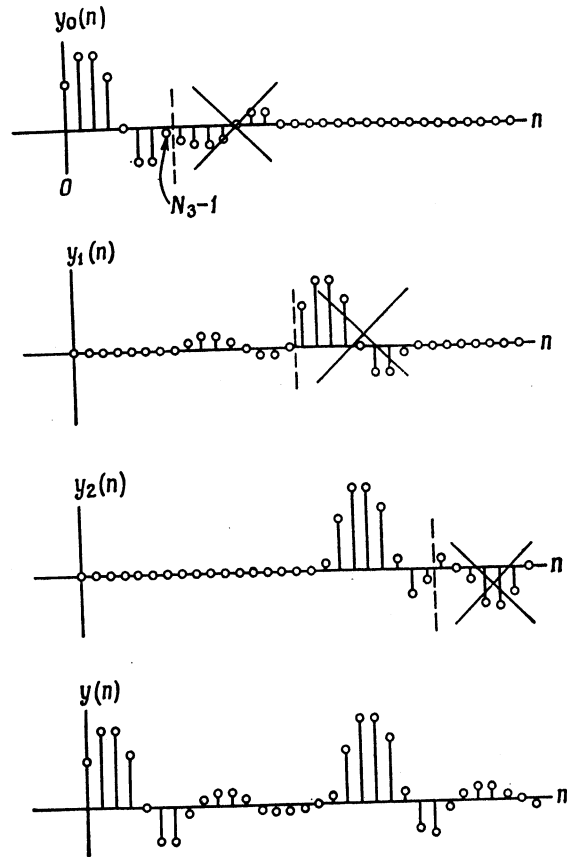
Длина каждой из частичных свертки в сумме (2.169) равна $(N_3 + N_2 - 1)$ отсчетам, т. е. имеется участок длиной в $(N_2 - 1)$ отсчетов, поэтому их отсчеты на участке перекрытия нужно сложить. На фиг. 2.33 показано, как расположены и как суммируются соседние частичные свертки $y_k(n)$. Каждая из них вычисляется методом быстрой свертки, описанным в разд. 2.24. Рассмотренный метод был назван методом перекрытия с суммированием именно потому, что промежуточные частичные свертки перекрываются и для получения конечного результата их необходимо сложить.

Другой метод вычисления линейной свертки последовательностей, одна из которых значительно длиннее другой, также основан



Фиг. 2.34. Метод перекрытия с накоплением.

на секционировании более длинной последовательности. Его называют методом перекрытия с накоплением, причем в данном случае перекрываются входные, а не выходные секции. Ошибочные отсчеты круговых свертки отдельных секций отбрасываются. Остальные отсчеты накапливаются и из них формируется конечный результат. Рассмотрим конкретный пример (фиг. 2.34). Последовательность $h(n)$ содержит N_2 отсчетов, а последовательность $x(n)$ разделена на секции $x_k(n)$ длиной по $(N_3 + N_2 - 1)$ отсчетов, перекрывающиеся друг с другом на участках длиной по $(N_2 - 1)$ отсчетов. (Отметим, что участок перекрытия



Фиг. 2.35. Формирование выходных значений свертки при использовании метода перекрытия с накоплением.

находится в конце последовательности $x_h(n)$. Это удобно для вычисления круговой свертки с помощью ДПФ¹⁾.) Для каждой секции вычисляется круговая свертка последовательностей $h(n)$ и $x_h(n)$, содержащая $(N_3 + N_2 - 1)$ отсчет. В результате получается набор последовательностей $y_h(n)$, изображенных на фиг. 2.35. Последние $(N_2 - 1)$ отсчетов каждой из последовательностей $y_h(n)$ отбрасываются (они неверны из-за циклического характера свертки), а остальные присоединяются к правильным отсчетам последовательности $y_{h-1}(n)$ и т. д. В результате

¹⁾ Здесь перекрытие носит условный характер: последние $(N_2 - 1)$ отсчетов секции повторяют первые $(N_2 - 1)$ отсчетов предыдущей секции. Прим. ред.

получается искомая последовательность, тождественная свертке $y(n)$. Итак, используя метод перекрытия с суммированием или метод перекрытия с накоплением, можно сравнительно легко найти свертку короткой и очень длинной последовательностей, причем результат получается в виде отдельных небольших секций, которые объединяются соответствующим образом в одну последовательность.

2.26. Дискретное преобразование Гильберта

Выше рассматривались различные способы представления последовательностей, в частности z -преобразование, преобразование Фурье, ряды Фурье. В данном разделе будет показано, что z -преобразование импульсной характеристики линейной и устойчивой физической реализуемой системы в любой точке, лежащей вне единичной окружности, может быть выражено через значения действительной или мнимой части преобразования Фурье той же импульсной характеристики. Иначе говоря, действительную и мнимую части преобразования Фурье действительной последовательности можно выразить друг через друга. Рассмотрим физически реализуемую последовательность $x(n)$ [т. е. $x(n) = 0$ при $n < 0$] и ее z -преобразование $X(z)$. Предположим, что функция $X(z)$ — аналитическая вне единичной окружности, т. е. все полюсы $X(z)$ лежат внутри этой окружности. Пусть $X_d(e^{j\omega})$ и $X_m(e^{j\omega})$ — действительная и мнимая части преобразования Фурье последовательности $x(n)$, т. е.

$$X(e^{j\omega}) = X_d(e^{j\omega}) + jX_m(e^{j\omega}). \quad (2.170)$$

Введем $x_c(n)$, четную часть $x(n)$, как

$$x_c(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)]. \quad (2.171)$$

Тогда $x(n)$ можно записать в виде

$$x(n) = 2x_c(n) s(n), \quad (2.172)$$

где

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.173)$$

Используя формулу (2.172), найдем значения z -преобразования $X(z)$ в точках z , лежащих вне единичной окружности ($z = re^{j\omega}$,

$r > 1$). Оно равно

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_{\text{ч}}(n) s(n) r^{-n} e^{-jn\omega}. \quad (2.174)$$

Правая часть равенства (2.174) представляет собой преобразование Фурье последовательности

$$y(n) = [2x_{\text{ч}}(n)] [s(n) r^{-n}]. \quad (2.175)$$

Поскольку последовательность $y(n)$ равна произведению двух последовательностей, ее преобразование Фурье можно найти с помощью теоремы о комплексной свертке [см. (2.81)] в виде свертки преобразований Фурье отдельных сомножителей, т. е.

$$X(re^{j\omega}) = X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_{\text{д}}(v) \left(\frac{e^{j\omega} + r^{-1}v}{e^{j\omega} - r^{-1}v} \right) \frac{dv}{v}. \quad (2.176)$$

Здесь z -преобразования $x_{\text{ч}}(n)$ и $s(n) r^{-n}$ равны соответственно $X_{\text{д}}(z)$ и $0,5(1 + r^{-1}z^{-1})/(1 - r^{-1}z^{-1})$, а контур интегрирования C совпадает с единичной окружностью.

Равенство (2.176) связывает значения функции $X(re^{j\omega})$ в точках, лежащих вне единичной окружности, со значениями ее действительной части $X_{\text{д}}(z)$ на единичной окружности. Если $X_{\text{д}}(z)$ имеет вид рациональной дроби, то контурный интеграл (2.176) можно легко вычислить с помощью вычетов.

Аналогично можно получить соотношение, связывающее $X(e^{j\omega})$ с $X_{\text{м}}(e^{j\omega})$. Представим $x(n)$ в виде

$$x(n) = 2x_{\text{н}}(n) s(n) + x(0) u_0(n), \quad (2.177)$$

где $x_{\text{н}}(n)$ — нечетная составляющая $x(n)$, определяемая как

$$x_{\text{н}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)]. \quad (2.178)$$

В этом случае выражение для $X(re^{j\omega})$ имеет вид

$$X(re^{j\omega}) = X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi} \oint_C X_{\text{м}}(v) \left(\frac{e^{j\omega} + r^{-1}v}{e^{j\omega} - r^{-1}v} \right) \frac{dv}{v} + x(0), \quad (2.179)$$

причем z -преобразование $x_{\text{н}}(n)$ равно $X_{\text{м}}(z)$, а контуром интегрирования по-прежнему является единичная окружность.

Чтобы найти соотношение, связывающее $X_{\text{д}}(e^{j\omega})$ и $X_{\text{м}}(e^{j\omega})$, рассмотрим предельные значения правых частей (2.176) и (2.179), когда $r \rightarrow 1$. Так как при этом полюс подынтегральной функции приближается к контуру интегрирования, то вычисление интегралов следует производить аккуратно. Если эти интегралы при-

равнять главным значениям интеграла типа Коши, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j} P \oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & |z_0| < 1, \\ 0, & |z_0| > 1, \\ \frac{1}{2} f(z_0), & |z_0| = 1 \end{cases} \quad (2.180)$$

(где $P \oint g(z) dz$ — главное значение интеграла типа Коши), то можно найти пределы интегралов (2.176) и (2.179) при $r \rightarrow 1$. Однако вместо того, чтобы непосредственно вычислять эти интегралы, введем новую переменную интегрирования $v = e^{j\theta}$ (так как интегрирование производится по единичной окружности) и представим $X(re^{j\omega})$ следующим образом:

$$X(re^{j\omega}) = X_{\text{д}}(re^{j\omega}) + jX_{\text{м}}(re^{j\omega}). \quad (2.181)$$

Перепишем равенство (2.176) в виде

$$X_{\text{д}}(re^{j\omega}) + jX_{\text{м}}(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{д}}(e^{j\theta}) \frac{1-r^{-2} + j2r^{-1} \sin(\theta-\omega)}{1-2r^{-1} \cos(\theta-\omega) + r^{-2}} d\theta, \quad (2.182)$$

откуда, приравняв мнимые части, получим

$$X_{\text{м}}(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X_{\text{д}}(e^{j\theta}) 2r^{-1} \sin(\theta-\omega)}{1-2r^{-1} \cos(\theta-\omega) + r^{-2}} d\theta. \quad (2.183)$$

Преобразуя равенство (2.179) аналогичным образом, найдем

$$X_{\text{д}}(re^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X_{\text{д}}(e^{j\theta}) 2r^{-1} \sin(\theta-\omega)}{1-2r^{-1} \cos(\theta-\omega) + r^{-2}} d\theta + x(0). \quad (2.184)$$

Переходя в полученных выражениях к пределу при $r \rightarrow 1$ и используя для вычисления интегралов формулу (2.180), получим искомые соотношения

$$X_{\text{м}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{д}}(e^{j\theta}) \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta-\omega}{2} \right) d\theta \quad (2.185)$$

и

$$X_{\text{д}}(e^{j\omega}) = x(0) - \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{м}}(e^{j\theta}) \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta-\omega}{2} \right) d\theta. \quad (2.186)$$

Эти соотношения называют парой дискретных преобразований Гильберта. Они позволяют определить мнимую часть частотной

характеристики физически реализуемой системы по ее действительной части и, наоборот, действительную часть частотной характеристики по ее мнимой части.

Формулы дискретного преобразования Гильберта можно также получить, сопоставляя логарифм модуля частотной характеристики и фазовую характеристику физически реализуемой *минимально-фазовой* системы. (Все нули и полюсы передаточной функции такой системы лежат внутри единичной окружности.) Вообще говоря, полученные соотношения применяются довольно редко, так как ограничения, накладываемые на размещение нулей передаточной функции, являются слишком строгими. Во многих реальных системах нули располагаются вне или на единичной окружности.

2.27. Преобразование Гильберта действительных сигналов

Одной из наиболее важных областей применения преобразования Гильберта являются системы модуляции. В них (например, в системах однополосной модуляции) часто обрабатываются комплексные полосовые сигналы. Такие сигналы характерны тем, что на нижней половине единичной окружности (т. е. при $\pi \leq \omega < 2\pi$) их спектр равен нулю. Таким образом, если $v(n)$ относится к рассматриваемому классу сигналов, его преобразование Фурье

$$V(e^{j\omega}) = 0, \quad \pi \leq \omega < 2\pi. \quad (2.187)$$

Ясно, что сигнал $v(n)$ является комплексным, поскольку преобразование Фурье действительного сигнала удовлетворяет соотношению

$$V^*(e^{-j\omega}) = V(e^{j\omega}); \quad (2.188)$$

если бы сигнал $v(n)$ был действительным, то из равенства (2.188) следовало бы, что $V(e^{j\omega}) = 0$. Комплексный сигнал $v(n)$ можно представить в виде

$$v(n) = x(n) + j\hat{x}(n), \quad (2.189)$$

где $x(n)$ и $\hat{x}(n)$ — действительные последовательности. Равенство (2.187) выполняется, если

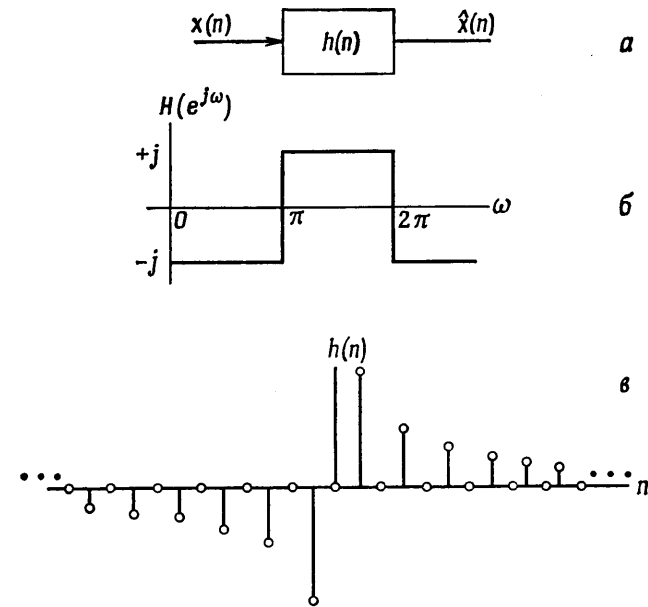
$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j\hat{X}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{при } \pi \leq \omega < 2\pi \quad (2.190)$$

или

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = jX(e^{j\omega}), \quad \pi \leq \omega < 2\pi. \quad (2.191)$$

Поскольку последовательности $\hat{x}(n)$ и $x(n)$ действительные, то ясно, что

$$\hat{X}^*(e^{j\omega}) = -jX(e^{j\omega}), \quad 0 \leq \omega < \pi. \quad (2.192)$$



Фиг. 2.36. Импульсная и частотная характеристики идеального преобразователя Гильберта.

Таким образом, сигнал $\hat{x}(n)$ можно получить, пропустив сигнал $x(n)$ через фильтр с частотной характеристикой

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \leq \omega < \pi, \\ j, & \pi \leq \omega < 2\pi. \end{cases} \quad (2.193)$$

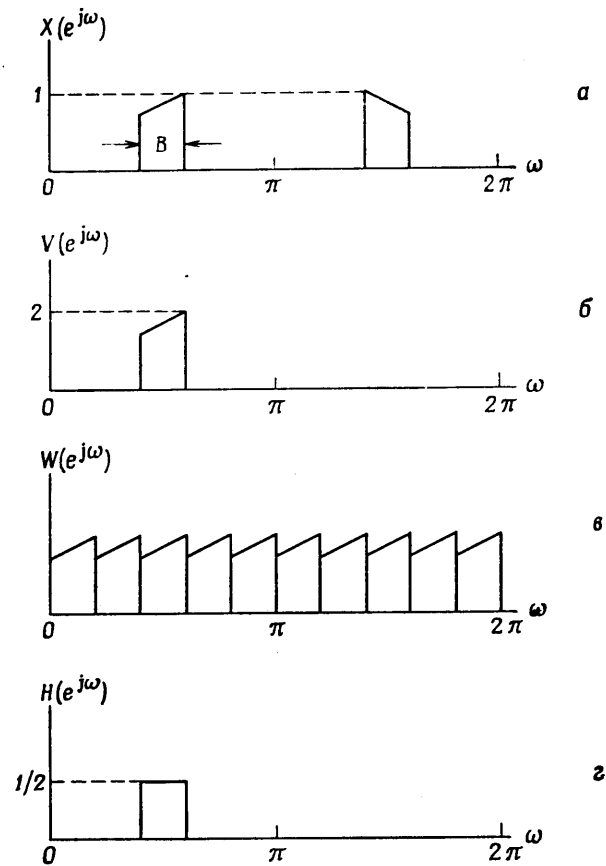
При этом $V(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega})$ на интервале $0 \leq \omega < \pi$ и $V(e^{j\omega}) = 0$ на интервале $\pi \leq \omega < 2\pi$, как и было принято. Импульсная характеристика фильтра с частотной характеристикой вида (2.193) получается из обратного преобразования Фурье частотной характеристики (2.193):

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi -je^{j\omega n} d\omega + \int_\pi^{2\pi} je^{j\omega n} d\omega \right), \quad (2.194)$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1 - e^{j\pi n}}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

откуда

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (2.195)$$



Фиг. 2.37. Дискретизация полосового колебания.

Равенства (2.193) и (2.195) описывают идеальный цифровой преобразователь Гильберта. На фиг. 2.36 изображены его частотная и импульсная характеристики. Ясно, что такое устройство физически не реализуемо, так как его импульсная характеристика простирается от $-\infty$ до ∞ . Более того, z -преобразование последовательности (2.195) сходится только на единичной окружности. Поэтому идеальный преобразователь Гильберта подобен идеальному фильтру нижних частот или идеальному дифференциатору в том смысле, что на практике их можно реализовать только приближенно. В гл. 3 и 4 будет рассмотрено, как проектируются реализуемые фильтры, аппроксимирующие перечисленные идеальные цепи.

Поскольку последовательность $\hat{x}(n)$ можно получить, пропускаемая $x(n)$ через фильтр, то эти две последовательности связаны соотношением типа свертки:

$$\hat{x}(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{\infty} x(n-m) \frac{\sin^2(\pi m/2)}{m}. \quad (2.196)$$

Аналогичным образом из $\hat{x}(n)$ с помощью фильтра, импульсная характеристика которого описывается выражением (2.195) с обратным знаком, можно получить $x(n)$. Следовательно,

$$x(n) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{\infty} \hat{x}(n-m) \frac{\sin^2(\pi m/2)}{m}. \quad (2.197)$$

Равенства (2.196) и (2.197) представляют собой пару преобразований Гильберта для действительных сигналов $x(n)$ и $\hat{x}(n)$.

По аналогии с непрерывными аналитическими сигналами, спектр которых равен нулю в области отрицательных частот, последовательность $v(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$ также называют аналитическим сигналом. Такой сигнал играет важную роль при дискретизации полосовых сигналов (фиг. 2.37). На фиг. 2.37, а изображен спектр полосового действительного колебания $x(n)$, а на фиг. 2.37, б — спектр аналитического сигнала $v(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$. При дискретизации аналитического сигнала $v(n)$ частоту дискретизации можно уменьшить до $(B/2\pi)$ комплексных отсчетов в секунду, не опасаясь наложений в спектре. Спектр получающейся при этом последовательности $w(n)$ (считается, что $2\pi/B$ — целое) изображен на фиг. 2.37, в. Чтобы восстановить исходный сигнал в виде последовательности с первоначальной частотой дискретизации, применяют полосовой интерполирующий фильтр (фиг. 2.37, г). Действительная часть колебания, получающегося на его выходе, и дает искомый действительный сигнал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gold B., Rader C. M., Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, N. Y., 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
2. Freeman H., Discrete Time Systems, Wiley, N. Y., 1965.
3. Jury E. I., Sampled-Data Control Systems, Wiley, N. Y., 1958; есть русский перевод: Джури Э. И., Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1963.
4. Ragazzini J. R., Franklin G. F., Sampled-Data Control Systems, McGraw-Hill, N. Y., 1958.

5. Jury E. I., Theory and Application of the Z-Transform Method, Wiley, N. Y., 1964.
6. Kuo F. F., Kaiser J. F., Systems Analysis by Digital Computer, Wiley, N. Y., 1966.
7. Rader C. M., Gold B., Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, *Proc. IEEE*, 55, No. 2, 149—171 (Feb. 1967); есть русский перевод: Голд, Рейдер, Методы расчета цифровых фильтров в частотной области, *ТИИЭР*, т. 55, № 2, стр. 19—43 (1967).
8. Gold B., Oppenheim A. V., Rader C. M., Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform, *Proc. Sym. Computer Proc. in Communication*, 235—250 (1969).
9. Stockham T. G., High Speed Convolution and Correlation, *AFIPS Conference Proceedings*, 28, 229—233 (1966).
10. Oppenheim A. V., Schaffer R. W., Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

3.1. Введение

Как было показано в гл. 2, класс последовательностей конечной длины обладает некоторыми свойствами, желательными с точки зрения построения фильтров. Например, никогда не возникает вопрос об устойчивости и физической реализуемости фильтров, поскольку КИХ-последовательности гарантируют устойчивость, а при введении соответствующей конечной задержки и реализуемость. Более того, ниже будет показано, что КИХ-последовательности можно выбрать так, чтобы фильтры имели *строго* линейные фазовые характеристики. Поэтому, используя КИХ-последовательности, можно проектировать фильтры с произвольной амплитудной характеристикой.

Интересно отметить, что до появления алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) реализация КИХ-фильтров считалась, как правило, нереальной, поскольку для достаточно хорошей аппроксимации фильтров с острыми срезами требуются весьма длинные последовательности. Разработка на основе высокоэффективного алгоритма БПФ методов быстрой свертки изменила это положение, и в настоящее время КИХ-фильтры успешно конкурируют с БИХ-фильтрами, имеющими острые срезы в частотной характеристике.

3.2. Порядок расчета фильтров

Порядок расчета цифрового фильтра (реализуемого программным путем на ЦВМ или в виде специализированного устройства) включает четыре основных этапа:

1. Решение задачи аппроксимации с целью определения коэффициентов фильтра, при которых фильтр удовлетворяет заданным требованиям.

2. Выбор конкретной схемы построения фильтра и квантование найденных значений его коэффициентов в соответствии с фиксированной длиной слова.

3. Квантование переменных величин фильтра, т. е. выбор длины слова входных, выходных и промежуточных переменных.