

Глава 3

ВЕЙВЛЕТ – ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИГНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Итак, вейвлет-преобразование выполняется при помощи древовидно соединенных двухканальных блоков фильтров. Пусть глубина дерева d . Тогда обычно подразумевается, что сигнал имеет длину 2^d . Если это не выполняется, можно добавить недостающие отсчеты, например дописать сигнал нулями. Другим подходом является осуществление периодического или симметричного продолжения сигнала. Однако это приводит к увеличению объема данных, что нежелательно при решении задач сжатия сигнала. В данной главе рассматривается эффективный метод «удлинения» сигнала на этапе фильтрации. При помощи данного метода может осуществляться вейвлет-декомпозиция сигналов произвольной длины без увеличения объема данных.

Необходимо отметить, что существует еще одна возможность решения проблемы границ сигнала: конструирование граничных фильтров. Этот подход в книге не рассматривается. Интересующимся рекомендуем обратиться к статьям Е.Ковачевич (см. Интернет-ссылки).

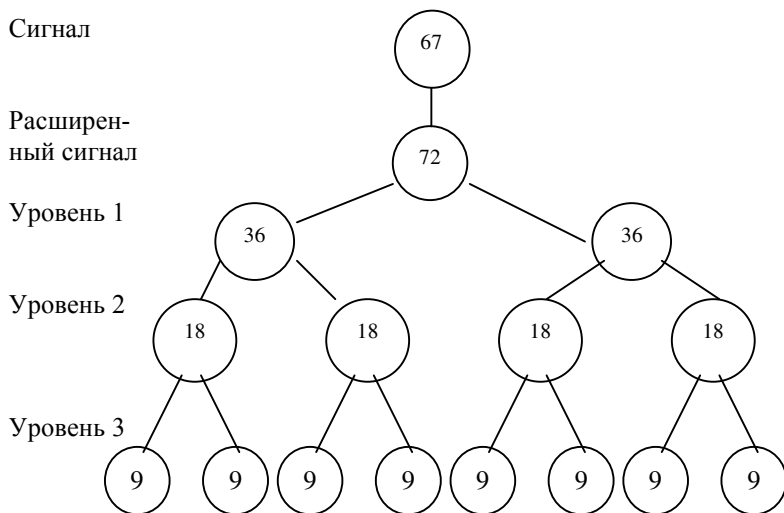
3.1. Условия полного восстановления сигнала

Вейвлет-преобразование (DWT) и субполосное кодирование - два популярных и очень похожих метода. В большинстве случаев используется двухканальная схема, в которой исходный сигнал делится на две субполосы, каждая вдвое меньше размером, чем исходная. В результате рекурсивного повторения этого процесса для обеих субполос получаем древовидное разбиение спектра на определенное количество уровней. Полное восстановление сигнала из субполос возможно лишь в отсутствие квантования коэффициентов. Будем предполагать это на протяжении всех последующих рассуждений. Однако и при квантовании коэффициентов можно построить схему, осуществляющую почти полное восстановление. Полное восстановление зависит от выполнения двух условий:

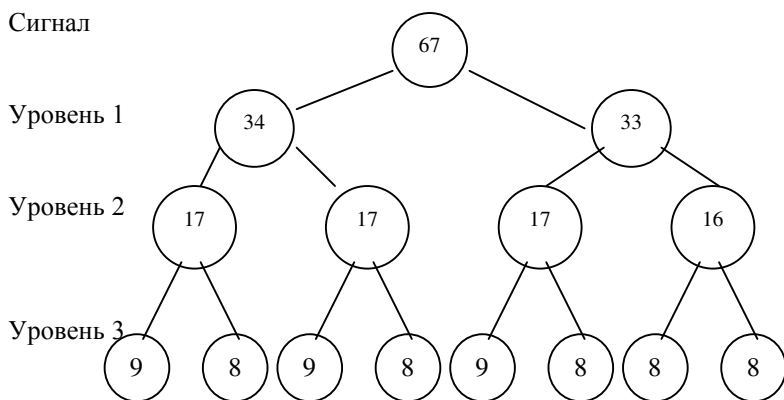
- соответствующего расчета фильтров анализа и синтеза;

- соответствующего продолжения сигнала конечной длины после границы.

В большинстве публикаций последний аспект не рассматривается, хотя от него так же зависит эффективность кодирования, как будет показано в разделе 3.4 при обсуждении эффективного метода продолжения сигнала.



(а)



(б)

Рис. 3.1. Трехуровневая декомпозиция сигнала длиной 67 отсчетов:
(а) обычный способ; (б) эффективный способ

Данный метод основан на следующем факте. На каждом уровне древо-видного DWT сигнал должен быть четной длины. Если она нечетная, то после прореживания мы либо потеряем какую-то информацию, либо добавим один лишний отсчет. Поэтому для дерева глубиной d необходимо иметь

сигнал длиной 2^d . В противном случае он удлиняется некоторым образом до этого размера. На рис. 3.1(а) показано, как сигнал длиной 67 должен быть увеличен до длины 72 для построения дерева глубиной 3. Ясно, что декомпозиция, представленная на рис. 3.1(б) лучше подходит для целей кодирования, так как не увеличивается количество отсчетов. Как будет показано в разделе 3.4, такая декомпозиция возможна с сохранением свойства полного восстановления.

Иными словами, нами будет показано, каким образом может быть осуществлено вейвлет-преобразование сигнала нечетной длины, в результате которого не происходит увеличения количества отсчетов. В результате сигнал произвольной длины N может быть декомпозирован, в принципе, на N субполос длиной 1 без потери свойства полного восстановления.

3.2. Методика расчета фильтров, позволяющих осуществить полное восстановление сигнала

Двухканальная схема анализа-синтеза представлена на рис.3.2. Все фильтры данной схемы являются казуальными. Сдвиги фильтров осуществляются путем умножения на комплексную экспоненту. Входной сигнал S делится на две части путем фильтрации НЧ фильтром H , который производит смещение сигнала на p отсчетов, и ВЧ фильтром G , который сдвигает сигнал на q отсчетов. После прореживания осуществляется кодирование сигналов, передача их по каналу (на схеме эти операции не показаны). Секция синтеза выполняет интерполяцию сигналов и фильтрацию смещенными фильтрами F и E . После умножения на 2 для сохранения величины амплитуды, оба сигнала складываются. В результате чего получается исходный сигнал, если фильтры обладают свойством полного восстановления.

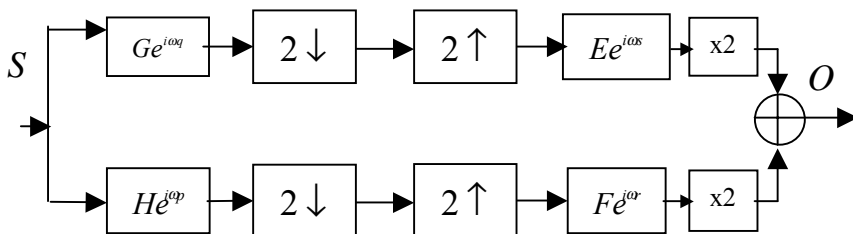


Рис. 3.2 . Схема двухполосной схемы анализа-синтеза: фильтры H и F низкочастотные, G и E - высокочастотные

Система анализа-синтеза описывается в области Фурье следующим образом:

$$O(\omega) = [F(\omega)H(\omega)e^{i\omega(p+r)} + E(\omega)G(\omega)e^{i\omega(q+s)}]S(\omega) + [F(\omega)H(\omega + \pi)e^{i\omega(p+r)}e^{ip\pi} + E(\omega)G(\omega + \pi)e^{i\omega(q+s)}e^{iq\pi}]S(\omega + \pi), \quad (3.1)$$

где O – выходной сигнал системы. Вторая часть (3.1) представляет собой искажение из-за наложения спектров и должна быть устранена для полного восстановления сигнала. Это может быть достигнуто в случае $p + r = q + s$, и тогда

$$F(\omega) = G(\omega + \pi), \quad E(\omega) = -H(\omega + \pi), \quad |p - q| \bmod 2 = 0 \quad (3.2)$$

или

$$F(\omega) = G(\omega + \pi), \quad E(\omega) = H(\omega + \pi), \quad |p - q| \bmod 2 = 1. \quad (3.3)$$

Далее будем использовать (3.2). В этом случае функция передачи

$$T(\omega) = [H(\omega)G(\omega + \pi) - G(\omega)H(\omega + \pi)]e^{i\omega(p+r)}. \quad (3.4)$$

Для достижения полного восстановления фильтры должны рассчитываться так, чтобы $H(\omega)G(\omega + \pi) - G(\omega)H(\omega + \pi)$ равнялось чистой задержке. Далее, необходимо выбрать p, q, r и s так, чтобы общая задержка системы равнялась нулю. Тогда из (3.4) имеем

$$p = (L_H - 2)/2, \quad q = (L_G - 2)/2 \quad (3.5)$$

для четных фильтров и

$$p = (L_H - 1)/2, \quad q = (L_G - 3)/2 \quad (3.6)$$

для нечетных, где L_H и L_G означают длины фильтров H и G . Для симметричных фильтров задержка системы будет равна нулю, если положить $r = q + 1$ и $s = p + 1$.

Для того чтобы $H(\omega)G(\omega + \pi) - G(\omega)H(\omega + \pi)$ равнялось чистой задержке, мы можем взять, например, фильтр G , коэффициенты которого равны

коэффициентам H , но записаны в обратном порядке и через один умножены на -1 . В частотной области это означает

$$G(\omega) = H(-\omega + \pi) e^{i(-\omega + \pi)(L_n - 1)}. \quad (3.7)$$

Отметим казуальность фильтра G . Отсюда вытекает

$$T(\omega) = [H(\omega)H(-\omega) - H(\omega + \pi)H(-\omega + \pi) e^{i\pi(L_n - 1)}] e^{i\omega(p+r+1-L_n)}. \quad (3.8)$$

Чистая задержка достигается, если

$$H(\omega)H(-\omega) + (-1)^{L_n} H(\omega + \pi)H(-\omega + \pi) = 1, \quad (3.9)$$

в результате чего получается система с полным восстановлением. Отметим, что равенства (3.7) и (3.9) являются аналогами (2.36) и (2.26), соответственно. Другой возможной системой с полным восстановлением является биортогональная система, которая будет описана позднее.

3.3. Продолжения сигналов, сохраняющие свойство полного восстановления

В этом разделе будут рассмотрены традиционные методы продолжения сигналов, используемые при фильтрации сигналов конечной длины. Проблема фильтрации таких сигналов заключается в пересечении фильтром границы сигнала. Существуют четыре основных метода решения данной проблемы:

- добавление нулей;
- повторение граничного значения;
- периодизация сигнала (круговая свертка);
- симметричное отражение сигнала относительно границы.

Можно ввести следующий критерий сохранения полного восстановления при продолжении сигнала.

Предположим, сигнал длиной N продолжен до бесконечности с обеих сторон. Далее он фильтруется, прореживается. Если все коэффициенты обеих бесконечных субполос могут быть определены из $N/2$ отсчетов в каждой субполосе, то продолжение сигнала сохраняет полное восстановление.

Более строго можно сказать, что в каждой из бесконечных субполос может быть только $N/2$ различных отсчетов. Это невозможно при применении первых двух методов продолжения сигнала. Третий и четвертый методы обеспечивают полное восстановление. Периодическое и симметричное продолжения сигналов далее описываются более подробно и иллюстрируются

диаграммами, наглядно показывающими сохранение полного восстановления в этих случаях.

3.3.1. Периодическое продолжение

Метод периодического продолжения является наиболее часто используемым, так как он пригоден для любого типа фильтра. На рис.3.3 представлена диаграмма, поясняющая периодическое продолжение. На ней показана система анализа-синтеза (см. рис.3.2), повернутая на 90^0 . Для демонстрации продолжения сигнала использован ортогональный нелинейно-фазовый фильтр длиной 8, удовлетворяющий (3.2), (3.5) и (3.7).

В обоих блоках анализа в верхней строке показан исходный сигнал длиной $N=8$ в темной рамке. Строчными буквами в квадратных рамках обозначаются отдельные отсчеты сигнала. Вне пределов темной рамки сигнал продолжается периодически, что отображается на диаграмме путем использования одних и тех же букв. $N/2=4$ строки в середине блока показывают четыре положения фильтра. Коэффициенты фильтра представлены прописными буквами. Для каждого положения вычисляется скалярное произведение коэффициентов фильтра и части сигнала, расположенного в блоке непосредственно над ним. Значения $N/2$ скалярных произведений показаны в нижней строке в темной рамке. Например, 'к' есть результат скалярного произведения фильтра в его первой позиции и части сигнала, обозначенного символами 'f', 'g', ..., 'e'. Пустые квадраты означают прореживание. В нижней строке показаны также значения, появляющиеся в выходном сигнале в случае свертки с больше чем $N/2$ позициями фильтра. Как видно, новых значений не возникает. Это означает, что свойство полного восстановления сохраняется.

В блоках синтеза субполосный сигнал продолжается и интерполируется, как показано в верхней строке. Для реконструкции требуются все N позиций фильтра (показаны только три из них). Для нашего выбора фильтров выполняется условие (3.7) и общая задержка системы $p+r+1-L_H$. Так что, с учетом (3.5), выбор $r=s=4$ приводит к общей задержке, равной 0.

Для некоторых приложений, например для кодирования изображений, периодическое продолжение сигнала нежелательно. Левая и правая части сигнала, как правило, различаются. Это приводит к значительному перепаду в сигнале возле границы, следовательно, и к большим коэффициентам разложения, что неприемлемо для кодирования. Метод симметричного продолжения сигнала решает эту проблему, однако требует для своего применения симметричных фильтров.

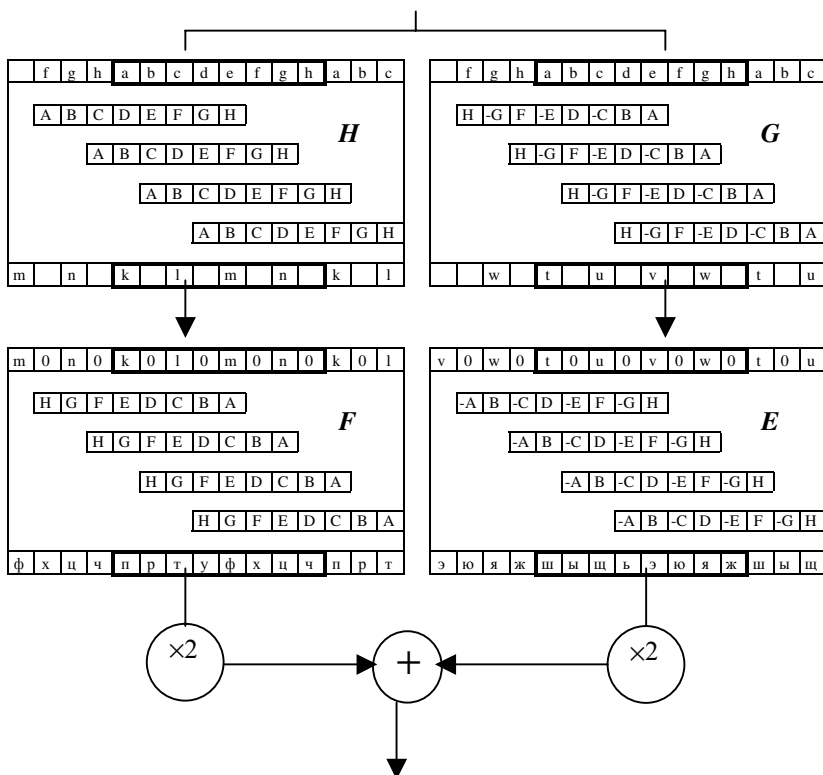


Рис.3.3. Периодическое продолжение сигнала (независимо от типа фильтра)

3.3.2. Симметричное продолжение

Симметричное продолжение сигнала может применяться при использовании симметричных фильтров и зависит от четности длины фильтра. Именно такое продолжение применено в видеокодеках ADV6xx. На диаграмме 3.4(а) показан случай четного фильтра. Примером такого фильтра может являться фильтр Джонстона, обладающий свойством почти полного восстановления. Симметрия фильтров показана на рисунке повторением букв. Входной сигнал отражается относительно границы, что приводит к гладкой склейке.

Для фильтров нечетной длины симметричное продолжение должно выполняться по-другому для получения $N/2$ различных отсчетов. Это показано на рис.3.4(б) для пары фильтров длиной 9 и 7. В блоках анализа ось симметрии проходит через отсчет (нечетная симметрия). В блоке синтеза

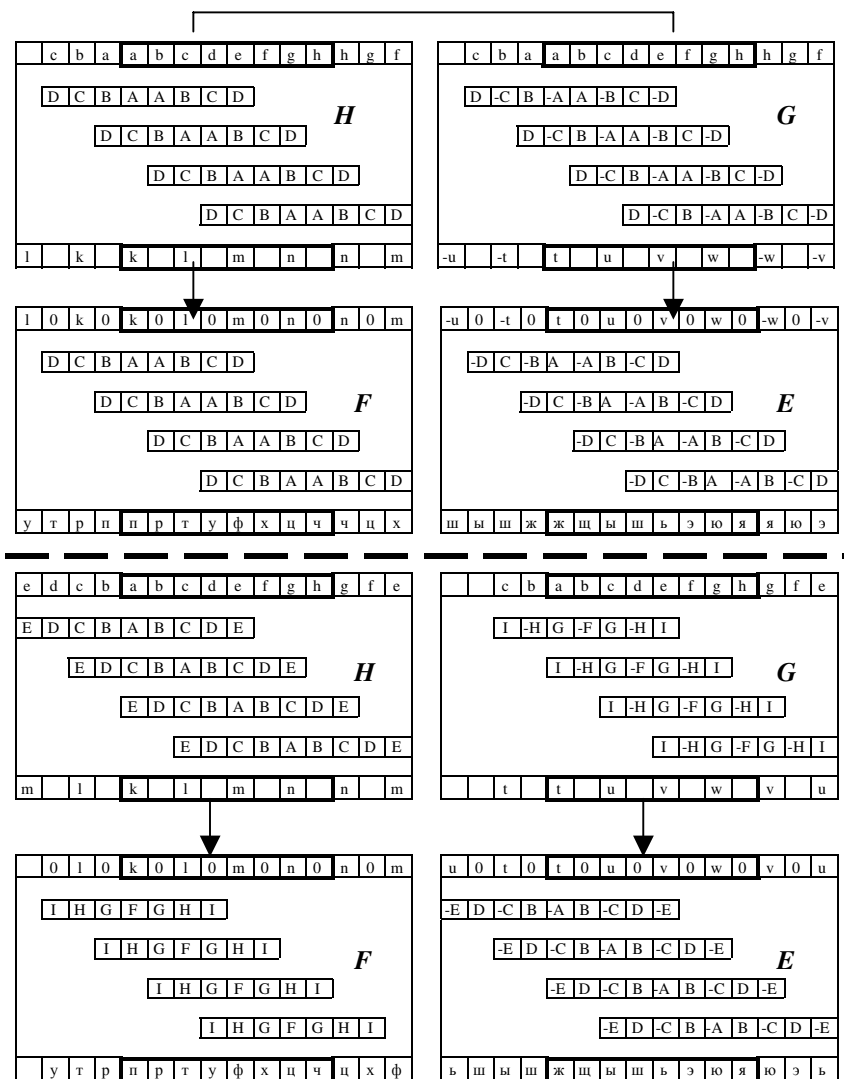


Рис. 3.4. Симметричное продолжение; (а) симметричные фильтры четной длины; (б) симметричные фильтры нечетной длины.

продолжение зависит от сигнала. Для одного канала левая часть сигнала продолжается путем симметричного нечетного отображения, правая – путем четного. Для другого канала – наоборот. Поэтому продолжение сигнала при синтезе отличается от продолжения его при анализе. Понятно, почему

в случае нечетной длины фильтров нельзя применять четное расширение: значения отсчетов субполос вне темной рамки не равны тем, что внутри ее. Следовательно, они несут информацию о сигнале, которая теряется при четной симметрии, так как эти отсчеты не передаются.

3.4. Эффективный метод продолжения для декомпозиции сигнала произвольной длины

В данном разделе мы покажем, каким образом сигнал нечетной длины может быть подвергнут вейвлет-преобразованию без увеличения количества коэффициентов. Это достигается путем применения продолжения сигнала, которое имеет три варианта: периодическое для любого типа фильтра и два варианта симметричного продолжения для симметричного фильтра.

Вернемся к схемам продолжения сигналов (см. рис.3.3 и 3.4). В случае сигнала нечетной длины (например, $N = 7$) отсчет, обозначенный h , отсутствует в нашем сигнале. Таким образом, темная рамка покрывает отсчеты a - g . Новый метод продолжения сигнала заключается в добавлении одного отсчета h и обработке получившегося четного сигнала обычным образом. Значение h выбирается так, чтобы один из отсчетов в субполосе принял какое-то фиксированное значение. Это фиксированное значение не зависит от сигнала, не несет о нем информации, значит, его не надо передавать. Так что, суммарное количество отсчетов в обеих субполосах равно количеству отсчетов исходного сигнала. Это позволяет осуществить разложение сигнала произвольной длины, показанное на рис.3.1(б).

В приведенных примерах в качестве фиксированного значения взят правый отсчет ВЧ полосы, обозначенный w на диаграмме. Значение w получается в результате фильтрации ВЧ фильтрами, находящимися на последних четырех позициях. Получается линейное уравнение относительно h . Приравняв w к нулю, всегда можно определить h .

Для осуществления реконструкции на приемной стороне не требуется никакой дополнительной информации в силу того, что известно, куда надо дописать нуль.

Точное значение, к которому мы приравниваем w , не важно для полного восстановления. Однако его выбор будет влиять на отсчеты в НЧ субполосе. Общее правило такое, что выбор w не должен изменять статистики НЧ субполосы.

В табл.3.1 представлены значения w , обеспечивающие полное восстановление для всех возможных длин фильтров и продолжений сигнала. Сигнал длиной N обозначается s_n , а ВЧ фильтр - g_n . Значение q выбирается в соответствии с (3.5) и (3.6).

**Формулы для добавляемого отсчета
при вейвлет-преобразовании сигнала нечетной длины**

Тип расширения / длина фильтра	Формула
Периодическое/четная	$-\left(\sum_{k=0}^q s_{N-q-1+k} g_k + \sum_{k=0}^{q-1} s_k g_{q+2+k}\right) / g_{q+1}$
Периодическое/нечетная	$-\left(\sum_{k=0}^q s_{N-q-1+k} g_k + \sum_{k=0}^q s_k g_{q+2+k}\right) / g_{q+1}$
Симметричное/четная	$-\left(\sum_{k=0}^q s_{N-q-1+k} g_k + \sum_{k=0}^{q-2} s_k g_{q+3+k}\right) / (g_q + g_{q+1})$
Симметричное/нечетная	$-2\left(\sum_{k=0}^q s_{N-q-1+k} g_k\right) / g_{q+1}$

Метод эффективного продолжения сигнала не увеличивает вычислительной сложности. Вместо последнего скалярного произведения при фильтрации (не требующегося) мы вычисляем значение добавляемого отсчета. Это требует того же количества умножений и сложений.

К сожалению, при применении данного метода для многомерной фильтрации значительно увеличивается его вычислительная сложность.

3.5. Симметрично-периодическое продолжение сигнала

Симметричное продолжение для фильтров нечетной длины приводит к «смещению» периода сигнала. В результате продолжения сигнала, показанного на рис.3.4 (б), получается сигнал периодичностью $2N-2$, а не $2N$. Для фильтров четной длины периодичность всегда $2N$.

Используя метод, описанный в предыдущем разделе, можно осуществить симметрично-периодическое продолжение сигнала, дающее периодичность $2N$ для фильтров нечетной длины. Оно показано на рис.3.5 для той же пары фильтров 9-7. Добавляемый символ обозначен z . При соответствующем выборе z , как и в разделе 3.4, отсчет x на левой границе становится равен нулю, что уменьшает количество отсчетов, зависящих от сигнала с $N/2+1$ до $N/2$.

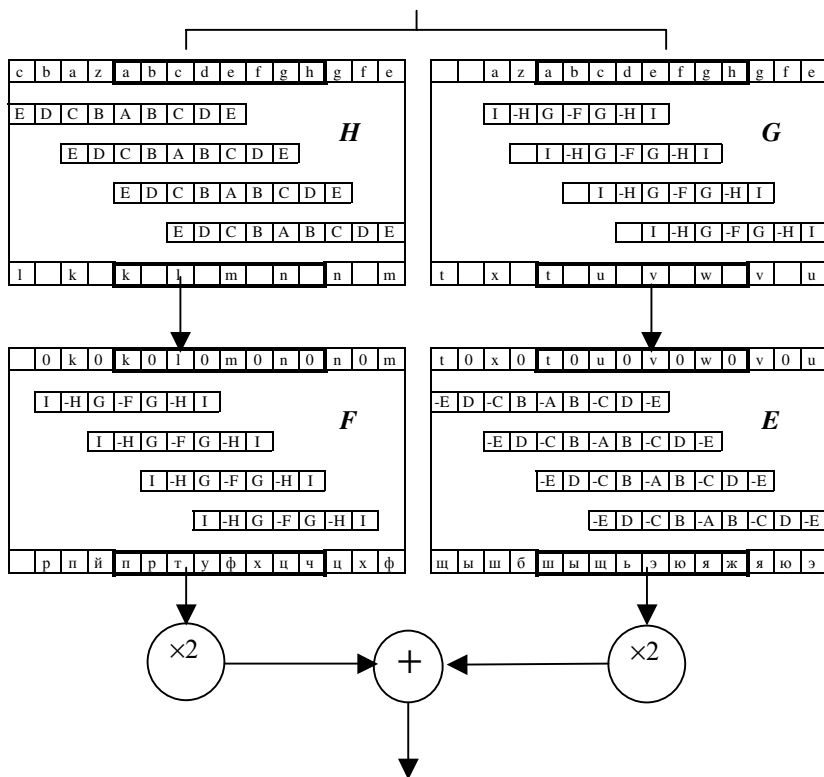


Рис.3.5. Симметрично-периодическое продолжение сигнала

Итак, в данной главе были показаны методы продолжения сигналов для осуществления двухканального субполосного и вейвлет-преобразования с полным восстановлением. Представленные диаграммы наглядно свидетельствуют, что полное восстановление тесно связано с правильным продолжением сигнала. Был представлен новый метод для продолжения сигнала нечетной длины, не увеличивающий числа отсчетов и сохраняющий свойство полного восстановления.

Метод также пригоден для многомерной фильтрации, хотя в случае неразделимых фильтров является непрактичным.

В главе показан также метод симметрично-периодического продолжения сигнала при фильтрации фильтром нечетной длины. Его отличительным свойством является то, что сигнал на выходе имеет период $2N$, а не $2N-2$. Это является важным в некоторых приложениях.