ВВЕДЕНИЕ

Первое упоминание о вейвлетах появилось в литературе по цифровой обработке и анализу сейсмических сигналов (работы А.Гроссмана и Ж.Морлета). Так как интерес авторов заключался в анализе сигналов, набор базисных функций был избыточным. Далее, математик И.Мейер показал существование вейвлетов, образующих ортонормальный базис в $L^2(R)$. Дискретизация вейвлет-преобразования была описана в статье И.Добеши, которая перекинула мост между математиками и специалистами в области обработки сигналов. Добеши разработала семейство вейвлет-фильтров, имеющих максимальную гладкость для данной длины фильтра. Популярность вейвлетов увеличилась после введения С.Маллатом концепции кратномасштабного анализа. Он же, по-видимому, первым применил вейвлеты для кодирования изображений.

И И.Добеши, и С.Маллат показали, что практическое выполнение вейвлет-преобразования осуществляется посредством двухполосного банка фильтров анализа-синтеза, известного ранее в теории субполосного кодирования (см. главу 1). Эта теория может быть описана в терминах вейвлетов. Главное различие между этими двумя направлениями заключается в критериях построения фильтров, как это будет показано далее.

Некоторые идеи теории вейвлетов частично были разработаны уже очень давно. Например, А.Хаар опубликовал в 1910 году полную ортонормальную систему базисных функций с локальной областью определения. Эти функции называются теперь вейвлетами Хаара.

В настоящее время исследования в области вейвлетов ведутся по многим направлениям. В главе 6 будет представлена лифтинговая схема выполнения вейвлет-преобразования, имеющая ряд преимуществ по сравнению с традиционной. Материалы этой главы в основном основаны на работах В.Свелденса, ссылки на которые имеются в списке литературы. Активно исследуется целочисленное вейвлет-преобразование, которому посвящена глава 7. Многие перспективные направления в области теории и практики вейвлет-преобразования, такие как вейвлеты, оптимальные по некоторому критерию, вейвлеты, определенные на интервале, вейвлеты, адаптивные к сигналу и т.д., не нашли своего отражения на страницах книги.

Несмотря на то, что теория вейвлет-преобразования уже в основном разработана, точного определения, что же такое "вейвлет", какие функции можно назвать вейвлетами, насколько известно, не существует. Обычно под

вейвлетами понимаются функции, сдвиги и растяжения которых образуют базис многих важных пространств, в том числе и $L^2(R)$. Эти функции являются компактными как во временной, так и в частотной области. Вейвлеты непосредственно связаны с кратномасштабным анализом сигналов.

Вейвлеты могут быть ортогональными, полуортогональными, биортогональными. Эти функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными. Различают вейвлеты с компактной областью определения и не имеющие таковой. Некоторые функции имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления связанного с ними вейвлет-преобразования. Вейвлеты различаются также степенью гладкости. Для практики желательно было бы иметь ортогональные симметричные (асимметричные) вейвлеты. К сожалению, доказана теорема о том, что такими вейвлетами являются лишь вейвлеты Хаара. Функции Хаара не обладают достаточной гладкостью и не подходят для большинства приложений. Поэтому для кодирования изображений обычно используют биортогональные вейвлеты.

В настоящее время многие исследователи понимают под вейвлетами более широкий класс функций. Это и вейвлет-пакеты, рассматриваемые в главе 5, и локальные тригонометрические базисы (вейвлеты Малвара), и мультивейвлеты, и так называемые вейвлеты второго поколения, не являющиеся сдвигами и растяжениями одной функции. Базисы преобразования Фурье не являются вейвлетами, так как у них отсутствует локализация в пространстве (времени).

Российские математики вейвлеты иногда называют всплесками. На наш взгляд, этот термин является неудачным, а попытка русификации терминологии может ввести в заблуждение и порождать ошибки.

Некоторым может показаться, что вейвлеты не являются чем-то фундаментально новым. В самом деле, сходные идеи появлялись на протяжении последних десятилетий : субполосное кодирование, успешно применяемое при кодировании речи, пирамидальные схемы кодирования изображений, преобразование и функции Габора (вейвлеты Габора). С развитием теории вейвлетов произошло как бы объединение, взаимопроникновение, взаимообогащение этих идей, что привело к качественно новому результату.

Так как с точки зрения практики наиболее интересными представляются быстрые алгоритмы вычисления вейвлет-преобразования, то в первой главе кратко рассматриваются вопросы, связанные с так называемым субполосным кодированием.